

IV Strahlungstransport, Sternatmosphären

4-01
IV.1

- Das Strahlungsfeld
 - makroskopische Beschreibung -
- spezifische Intensität I_ν bzw. I_λ

$$I_\nu(\nu, \vec{n}, \vec{r}, t)$$

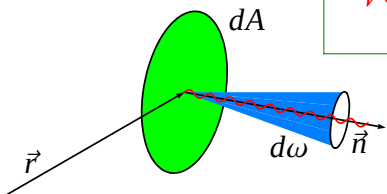
$\swarrow$ Frequenz $\downarrow$ Richtung $\swarrow$ Ort $\swarrow$ Zeit

Definition:

Sei $\Delta^4 E$ = Energie des Strahlungsfeldes

- im Frequenzintervall $(\nu, \nu + \Delta\nu)$
- im Zeitintervall $(t, t + \Delta t)$
- im Raumwinkel $\Delta\omega$ um $\vec{n}$
- durch ein Flächenelement ΔA am Ort $\vec{r}$, senkrecht zu $\vec{n}$

$$I_\nu(\nu, \vec{n}, \vec{r}, t) := \frac{d^4 E}{dA dt d\omega d\nu}$$



alternativ: I_λ statt ν

IV.2

4-03

→ bezogen auf das Wellenlängen-Intervall $(\lambda, \lambda + d\lambda)$

$$I_\lambda := \frac{d^4 E}{d\lambda dt d\omega dA}$$

Umrechnung:

$$I_\lambda \cdot |d\lambda| = I_\nu \cdot |d\nu|$$

$$\nu \cdot \lambda = c \rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

$$\rightarrow I_\nu = \frac{c}{\nu^2} I_\lambda \quad I_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu$$

	Dimension	Einheit (i.B.)
I_ν	$\frac{\text{Energie}}{\text{Frequenz Zeit Raumwinkel Fläche}}$	$\frac{\text{erg}}{\text{Hz s sterad cm}^2}$
I_λ	$\frac{\text{Energie}}{\text{Wellenlänge Zeit Raumwinkel Fläche}}$	$\frac{\text{erg}}{\text{\AA s sterad cm}^2}$

4-04

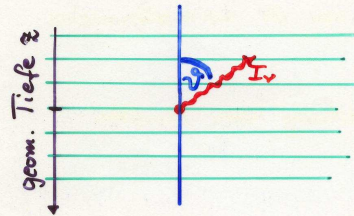
spezielle Symmetrien:

statt allgemein: $I_\nu = I_\nu(\nu, \vec{n}, \vec{r}, t)$

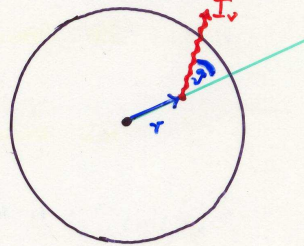
häufig

- I_ν zeitlich konstant ("stationärer Fall")
- ein-dimensionale Geometrie:

planparallel



sphärisch



4-05

also: $\vec{r} \rightarrow z$ bzw. r

$\vec{n} \rightarrow \vartheta$ (Winkel gegen z-Achse bzw. $\vec{r}$)

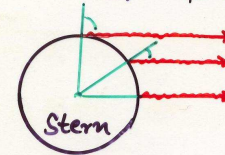
übliche Definition: $\mu := \cos \vartheta$

... also nur 3 unabhängige Variable:

$$I_v = I_v(\vartheta, \mu, z) \text{ bzw. } I_v(\vartheta, \mu, r)$$

• "Randverdunklung" (engl. Limb darkening):

$I_v(\vartheta, \mu)$ als Funktion von μ (bei festem ϑ)



→ Beobachter

• "Spektrum"

$I_v(\vartheta, \mu)$ als Funktion von ϑ (bei festem μ ,
z.B. $\mu=1$: Sonnenmitte)

Merke: Intensitäten sind nur bei der Sonne direkt beobachtbar!

- Bei Sternen keine räumliche Auflösung möglich.

4-07

• Emergente Intensität I_v^+

engl. "emergent intensity"

= Intensität am äußeren Rand der Sternatmosphäre
(entsprechende Werte für z bzw. r eingesetzt)

übliche Schreibweise:

$I_v^+(\vartheta, \mu)$ für $\mu > 0$ ("auswärts")

und $I_v^-(\vartheta, \mu)$ für $\mu < 0$ ("einwärts")

Beachte: Bei Sternatmosphären ist normalerweise

$$I^- \equiv 0$$

d.h. keine Einstrahlung von außen!

IV.4 4-06

• Strahlungs-Fluß (genauer: Flussdichte) IV.5

allgemeine Definition:

$$\vec{F}_v := \int_{4\pi} I_v(\vec{n}) \cdot \vec{n} d\omega$$

Bei ein-dimensionalen Geometrie:

Richtung von $\vec{F}_v$: nur auswärts/einwärts möglich!

→ skalare Größe F_v (>0 für auswärts,
 <0 für einwärts)

$$F_v(\vartheta, z) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_v(\vartheta, \mu, z) \mu d\mu$$

für 1-dimensionale Geometrie, $\mu = \cos \vartheta$

4-08

Dimension: $\frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche} \cdot \text{Frequenz}}$

Dimension z.B. $\frac{\text{erg}}{\text{s cm}^2 \text{ Hz}}$?
oder Watt / (cm² Hz)

Anschauliche Bedeutung von F_ν :

- die durch ein Flächenelement $\perp$ zur z -Achse durchfließende Leistung [nur Photonen $\in (\nu, \nu+d\nu)$]
- Gewichtungsfaktor μ : Projektion des Flächenelements auf die Strahlrichtung von $I_\nu(\mu)$
- Netto-Bilanz der beiden Halbräume
 $\mu > 0$ (auswärts) - $\mu < 0$ (einwärts)

Beachte: nur auswärts-Richtungen ($\mu > 0$);
denn lin ist am äußeren Rand normalerweise
 $F_\nu^- = 2\pi \int_{\mu=-1}^0 I_\nu(\nu, \mu) \mu d\mu = 0$ wegen $I_\nu^- = 0$.

• Bolometrischer Fluß $\mathcal{F}$

= gesamte Strahlungsleistung pro Flächeneinheit,
d.h. integriert über das ganze Spektrum

$$\mathcal{F}(\nu) = \int_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(\nu, z) d\nu ;$$

speziell äußerer Rand: $\mathcal{F}^+ = \int_{\nu=0}^{\infty} F_\nu^+ d\nu$

Achtung: In der Astrophysik übliche
Definition:

„Astrophysikalischer Fluß“

$$F_\nu := F_\nu / \pi$$

↳ „gerader“ Buchstabe

• Emergenter Fluß F_ν^+ engl. „emergent flux“

= Fluß am äußeren Rand der Sternatmosphäre

$$F_\nu^+(\nu) = 2\pi \int_{\mu=0}^1 I_\nu^+(\nu, \mu) \mu d\mu$$

• Leuchtkraft L

= gesamte Strahlungsleistung eines Sterns
= Bolometrischer Fluß $\times$ Sternoberfläche

$$L = 4\pi R_*^2 \mathcal{F}$$

Beispiel Sonne:

$$\begin{aligned} L_\odot &= 3.83 \cdot 10^{33} \text{ erg/s} \\ &= 3.83 \cdot 10^{26} \text{ Watt} \end{aligned}$$

• (absolute) bolometrische Helligkeit M_{Bol}

äquivalent zur Leuchtkraft

Def.: $M_{\text{Bol}} := 4.72 - 2.5 \log \{ L / L_{\odot} \}$

- Angabe in mag = magnitudones = Größenklassen
- logarithmische Skala (5 mag $\hat{=}$ Faktor 100)
(1 mag $\approx$ Faktor 2.5)
- umgedrehtes Vorzeichen: 2. Größe ist schwächer als 1. Größe!
- Nullpunkt ("Kalibration"):
anhand von Wega (α Lyrae), Typ A0

 $\rightarrow$ für die Sonne: $M_{\text{Bol}} = 4.72$ mag

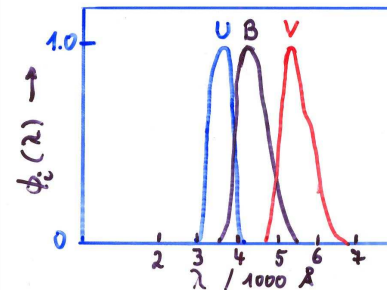


Abb.: Filterfunktionen des Johnson-Systems

Kalibrations-Konstanten durch Standard-Sterne festgelegt:

z. B. Wega (Spektraltyp "A0"): $M_u = M_v = M_b$

Def. der "Farben":

$$M_i := -2.5 \log \left\{ \pi R_*^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} F_{\lambda} \phi_i(\lambda) d\lambda \right\} + C_i$$

• Farbsysteme

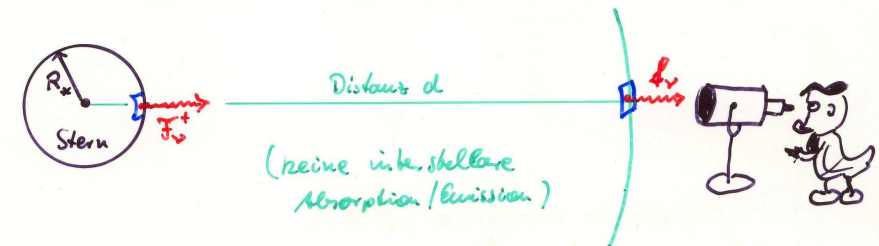
"Farben": Strahlungsleistung eines Sterns in bestimmten, durch Farbfilter definierten Wellenlängen - Abschnitten

Filter systeme: z. B.

Filter	Band [Å]	effektive Mitte [Å]	
U	ultraviolett	3000 - 4000	3600
B	Blau	3600 - 5500	4400
V	visuell	4800 - 6800	5500
} Johnson UV-System			
u	ultraviolett	Bandbreite [Å] 300	3500
v	violett	190	4110
b	blau	180	4670
y	gelb (yellow)	230	5470
} Strömgren-System			

• Flux am Ort des Beobachters, f_v

= (absolut kalibriertes) Spektrum



Energie-Erhaltung $\rightarrow \pi d^2 f_v = \pi R_*^2 F_v$

d. h. geometrische Verdünnung mit d^2 :

$$f_v = F_v \frac{R_*^2}{d^2}$$

- scheinbare Helligkeiten (m_v, m_B usw.)

Def.: $m_i = M_i + D.M.$

dabei ist D.M. = Entfernungsmodul [in mag]
(engl. distance modulus):

$$D.M. [mag] = 2.5 \log \left\{ \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2 \right\} = 5 \log \left\{ d/\text{pc} \right\} - 5$$

mit $1 \text{ pc} = 1 \text{ parsec} = 3.08 \cdot 10^{18} \text{ cm}$

- $\Rightarrow$ für Sterne in 10 pc Entfernung ist $m_i = M_i$
- $\Rightarrow$ impliziert geometrische Verdünnung des Flusses mit d^2

Def.: Planck-Form. $B_\nu(\nu, T) = I_\nu(\nu)$ in Hohlraum mit Temp. T

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \Big/ \left[\exp \left\{ \frac{h\nu}{kT} \right\} - 1 \right]$$

$$B_\lambda(\lambda, T) = 2hc\lambda^{-3} \Big/ \left[\exp \left\{ \frac{hc}{k\lambda T} \right\} - 1 \right]$$

$$B_\lambda(\lambda, T) = 2hc^2\lambda^{-5} \Big/ \left[\exp \left\{ \frac{hc}{k\lambda T} \right\} - 1 \right]$$

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2h\nu^5}{c^5} \Big/ \left[\exp \left\{ \frac{h\nu}{kT} \right\} - 1 \right]$$

mit $h = 6.6252 \cdot 10^{-27} \text{ erg/s}$ Planck'sche Konstante
 $c = 2.998 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ Lichtgeschwindigkeit
 $k = 1.380 \cdot 10^{-16} \text{ erg/deg}$ Boltzmann-Konstante

• Hohlraumstrahlung

= Schwarzer Körper, engl. Black body

= Spezialfall:

Strahlungsfeld im
Thermodynamischen Gleichgewicht

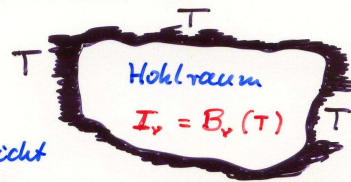
(engl. thermodynamical equilibrium, TE)

mit Materie der Temperatur T

Zustand maximaler Entropie!

(Herleitung siehe Lehrbücher)

im Hohlraum: $I_\nu = I_\nu(\nu, n, f, t)$
 isotrop, homogen, zeitunabhängig



• Asymptotisches Verhalten im Roten

$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1 \Leftrightarrow \text{Rayleigh-Jeans-Gebiet}$$

$$\Leftrightarrow \exp \left\{ \frac{h\nu}{kT} \right\} = 1 + \frac{h\nu}{kT} \quad (\text{Taylor-Entwicklung})$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} B_\nu(\nu, T) &\approx \frac{2k}{c^2} \nu^2 T \\ \text{bzw. } B_\lambda(\lambda, T) &\approx 2kc \lambda^{-4} T \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\cdot \text{Potenz } \nu^2 \text{ bzw. } \lambda^{-4} \\ &\cdot \text{linear in } T \end{aligned}$$

• Asymptotisches Verhalten im Violetten

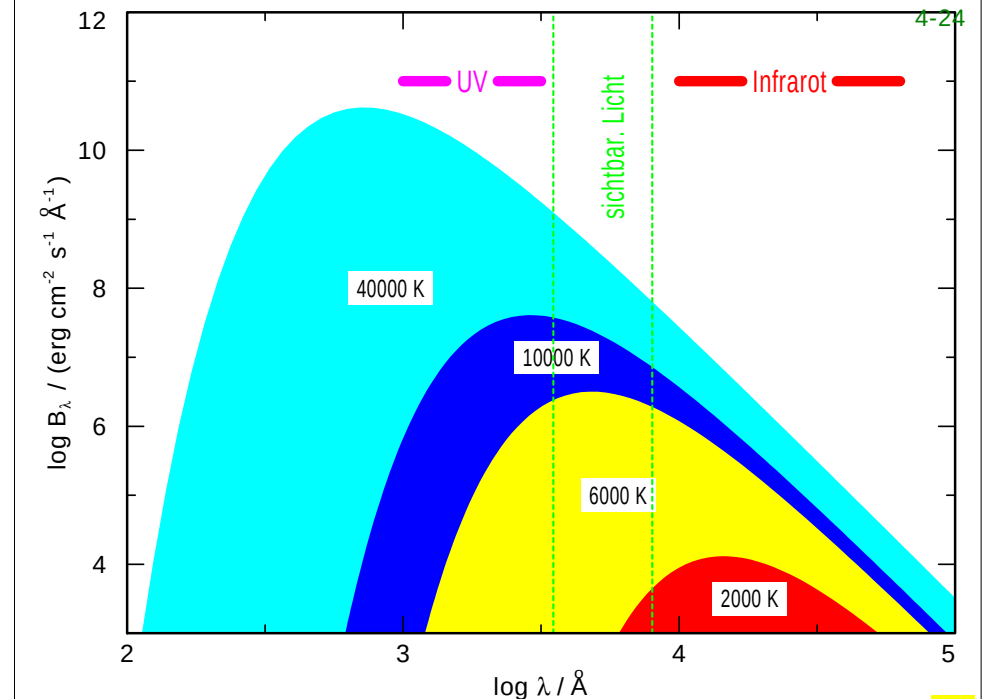
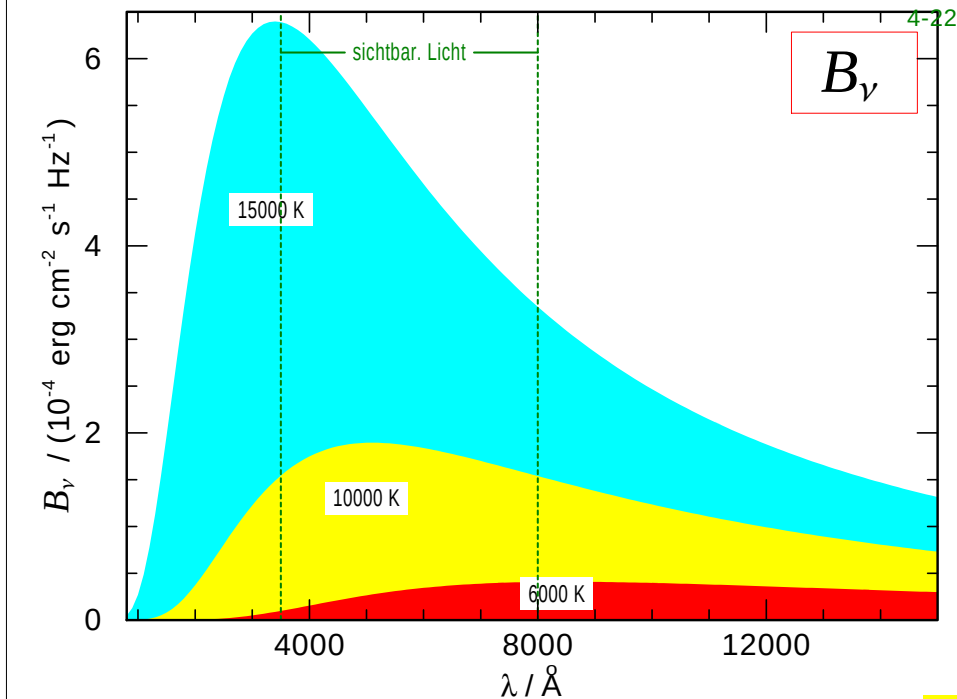
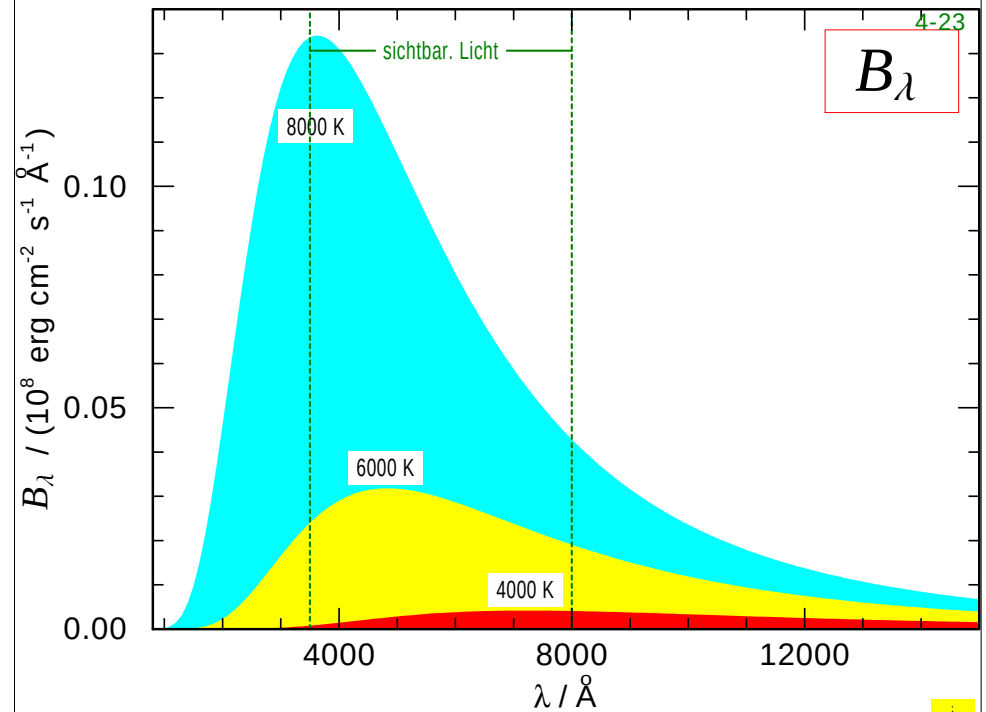
$$\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \Leftrightarrow \text{Wien-Gebiet}$$

$$\Leftrightarrow \exp \left\{ \frac{h\nu}{kT} \right\} - 1 \approx \exp \left\{ \frac{h\nu}{kT} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} B_\nu(\nu, T) &\approx \frac{2h}{c^2} \nu^3 \exp \left\{ -\frac{h\nu}{kT} \right\} \\ \text{bzw. } B_\lambda(\lambda, T) &\approx 2hc^2 \lambda^{-5} \exp \left\{ -\frac{hc}{k\lambda T} \right\} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{exponentieller} \\ &\text{Abfall mit} \\ &\nu \text{ und } \frac{1}{T} \end{aligned}$$

- Lage des Maximums "Wien'sches Verschiebungsgesetz"

	B_ν	B_λ
Bedingung:	$\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} = 0$	$\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} = 0$
mit def. $x := \frac{h\nu}{kT}$ Planck-Form. eingesetzt:	$x - 3(1 - e^{-x}) = 0$	$x - 5(1 - e^{-x}) = 0$
Lösung (numerisch)	$x = 2.8214$	$x = 4.9651$
$\frac{\lambda_{\max}}{[\text{cm}]} \cdot \frac{T}{[\text{K}]} =$	0.5100	0.2879



Beispiele für Wiensches Verschiebungsgesetz:

4-25

	Temperatur [K]	$\lambda_{\max}(B_1)$	$\lambda_{\max}(B_2)$	
Sonne (Atmosph.)	5780	8820 Å	5010 Å	sichtbar
Sonne (Zentrum)	$1.4 \cdot 10^7$	3.4 Å	2.1 Å	Röntgen (keV)
0-Stern (Atmosph.)	60 000	882 Å	480 Å	UV
interstellare Staub	20	0.3 mm	0.1 mm	Sub-mm
3K-Hintergrund	2.7	1.9 mm	1 mm	zwischen IR/Radio

Die Spektren von Sternen (F_ν^+) können
in ganz grober Näherung durch
Planck-Funktionen beschrieben werden:

$$I_\nu^+ = B_\nu(T), I_\nu^- = 0 \rightarrow F_\nu^+ = \pi F_\nu^- = \pi B_\nu(T)$$

4-27

$$\pi B(T) = \sigma T^4$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \\ &= 5.669 \cdot 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ deg}^{-4} \\ &= 5.669 \cdot 10^{-12} \text{ Watt cm}^{-2} \text{ deg}^{-4} \end{aligned}$$

Bolometrischer Fluss

IV.13

4-26

Sei $F_\nu^+ = \pi B_\nu(T)$

dann ist $F^+ = \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu =: \pi B(T)$

Ausintegrieren: $\pi B(T) = \int_0^\infty \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} [\exp\{\frac{h\nu}{kT}\} - 1]^{-1} d\nu$

def.: $x = \frac{h\nu}{kT} \rightarrow \nu = \frac{xkT}{h}$ und $dx = \frac{h}{kT} d\nu$

einsetzen: $\pi B(T) = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{= \frac{\pi^4}{15} \text{ (uneigentliches Integral)}}$

$$\pi B(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4$$

IV.14 4-28

Effektivtemperatur eines Sterns: T_{eff}

Definition: Temperatur, bei der ein Blackbody dieselbe Leuchtkraft hätte wie der Stern.

d.h.: $F^+ = \pi B(T_{\text{eff}}) = \sigma T_{\text{eff}}^4$

oder $L = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$

$$\Rightarrow T_{\text{eff}} = (F^+/\sigma)^{1/4} = (4\pi\sigma)^{-1/4} L^{1/4} R_*^{-1/2}$$

- Beispiel Sonne:

gemessener kolometrischer Fluss bei der Erde:

$$f = 0.1370 \text{ Watt/cm}^2 \quad (\text{"Solkonstante"})$$

→ Fluss an der Sonnenoberfläche:

$$F^+ = f \left(\frac{d^2}{R_\odot^2} \right) = f \left(\frac{1 \text{ A.U.}}{R_\odot} \right)^2$$

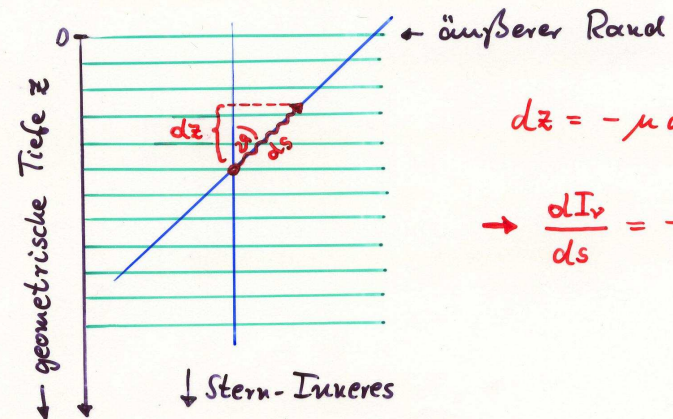
mit $1 \text{ A.U.} = 1.496 \cdot 10^{13} \text{ cm} \approx 150 \text{ Mill. km}$

$R_\odot = 6.960 \cdot 10^{10} \text{ cm} \approx 700 \text{ 000 km}$

$$F^+ = 6329 \text{ Watt/cm}^2$$

→ $T_{\text{eff}} = (F^+/\sigma)^{1/4} = 5780 \text{ K}$

• Das Wegelement ds in planparalleler Geometrie:



$$dz = -\mu ds$$

$$\rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = -\mu \frac{dI_\nu}{dz}$$

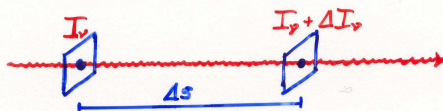
- Strahlungstransport

engl. radiation transfer, radiative transfer (of energy)

Ziel: Modellmäßige Berechnung (Simulation)
von beobachteten (Stern-)Spektren

Prinzip: Differentialgleichung für die Änderung
der spezifischen Intensität I_ν eines "Strahls"
bei Propagation um das Wegelement ds

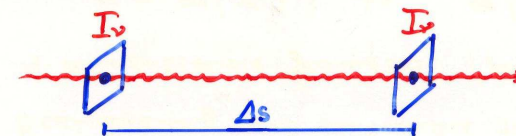
$$\frac{dI_\nu}{ds} = \dots \quad \text{"Transportgleichung"}$$



• die "rechte Seite" der Transportgleichung

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \dots$$

• im leeren Raum:



Energieerhaltung:

$I_\nu = \text{constant entlang des Strahls}$

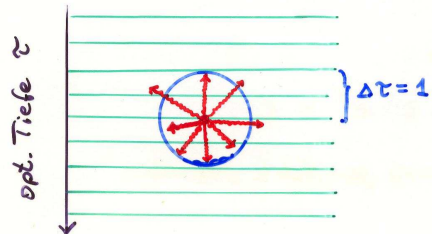
$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0$$

Definition: Optische Tiefe τ :

Def.:
$$\tau(\nu, z) = \int_{z'=0}^z \alpha(\nu, z') dz'$$

- $d\tau = \alpha dz$
- $\rightarrow$ wenn $\alpha > 0$: mit z nach innen anwachsend
- $\tau = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- τ ist dimensionslos
- τ hängt von ν ab (Nachteil!)
- wenn $\alpha = \alpha(\nu)$ nicht vom Ort abhängt:

$$\tau(\nu) = \alpha(\nu) \cdot z$$



- $\frac{1}{\alpha(\nu)} \triangleq$ mittlere freie Weglänge der Photonen

d.h. in Projektion auf die Normalen-Richtung: Photonen der Frequenz ν propagieren im Mittel um

$\langle \Delta \tau(\nu) \rangle = \frac{1}{\alpha(\nu)}$

- Lösung der Transportgleichung (nur Absorption):

Transformation auf τ :

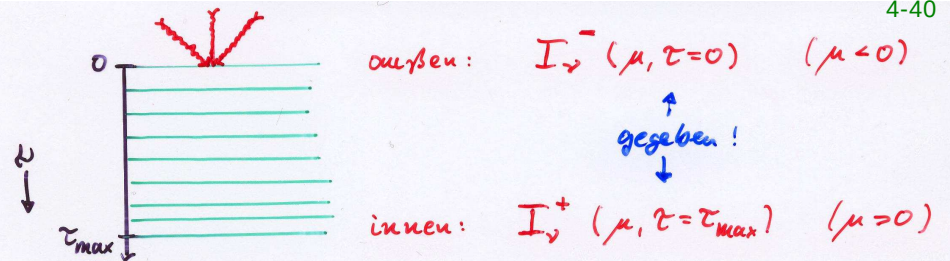
$$\frac{dI_{\nu}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\mu} I_{\nu}(\tau) \quad \nu, \mu \text{ fest}$$

$\Rightarrow$ Lösung:
$$I_{\nu}(\tau) = c \cdot e^{\tau/\mu}$$

Festlegung der Integrationskonstanten durch die Randwerte:

üblicher Fall: das "Schuster-Randwertproblem"

d.h. gegeben ist jeweils die Einstrahlung ins Medium



Daraus folgt für die Integrationskonstanten:

$\mu < 0$:

Randbedingung außen:

$$I_{\nu}^{-}(\mu, \tau=0) = c \cdot e^0 = c$$

$\Rightarrow$ Lösung für nach innen gerichtete Strahlen:

$$\underline{I_{\nu}(\mu, \tau) = I_{\nu}^{-}(\mu, \tau=0) \cdot \exp\left\{-\frac{\tau}{|\mu|}\right\}}$$

$\mu > 0$:

IV. 20

Randbedingung innen:

$$I_{\nu}^{+}(\mu, \tau = \tau_{\max}) = \tau \cdot \exp\left\{\frac{\tau_{\max}}{\mu}\right\}$$

$$\rightarrow \tau = I_{\nu}^{+} \cdot \exp\left\{-\frac{\tau_{\max}}{\mu}\right\}$$

 $\Rightarrow$ Lösung für auswärts laufende Strahlen:

$$I_{\nu}(\mu, \tau) = I_{\nu}^{+}(\mu, \tau = \tau_{\max}) \cdot \exp\left\{-\frac{\tau_{\max} - \tau}{\mu}\right\}$$

Absorption in the macroscopic picture

- Each absorber with (same) absorption cross-section σ
- N = number density of absorbers (per unit volume) $\rightarrow \kappa = N \sigma$
- n = column density of absorbers $\rightarrow \tau = n \sigma$

Projection of all absorption cross sections onto the column cross section

 $\rightarrow$ Probability that a point is *not* covered by any absorber:

$$I_{\nu}(\tau)/I_{\nu}(0) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n = e^{-\tau}$$

Fig.: Randomly redistributed fragments of the same area: $\tau = 1$ Beispiel: Homogenes Medium

(z.B. Glasfilter)

homogen $\rightarrow \kappa$ unabhängig von z $\tau_{\max} = d$ = Dicke der Schicht

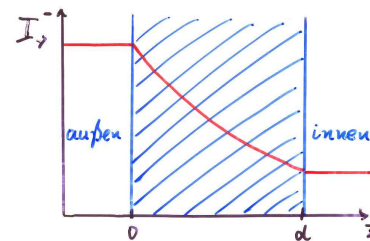
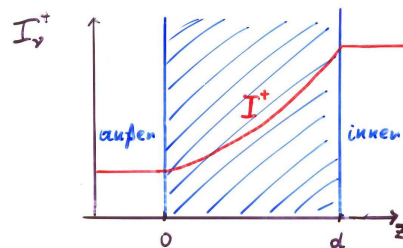
$$\tau = \kappa \cdot z \quad ; \quad \tau_{\max} = \kappa \cdot d$$

$$I_{\nu}^{+}(\mu, \tau=0) =$$

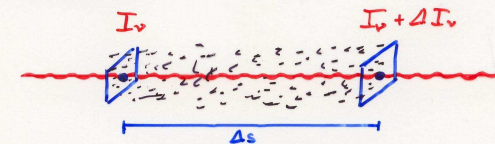
$$= I_{\nu}^{+}(\mu, \tau = \tau_{\max}) \cdot \exp\left\{-\frac{\kappa d}{\mu}\right\}$$

$$I_{\nu}^{-}(\mu, \tau_{\max}) =$$

$$= I_{\nu}^{-}(\mu, \tau=0) \cdot \exp\left\{-\frac{\kappa d}{\mu}\right\}$$

Emission

IV. 21



dem Strahl hinzugefügte Energie:

$$+ \Delta I_{\nu} \Delta \nu \Delta t \Delta \omega \Delta A$$

 $\rightarrow$ proportional zum Wegllement Δs

$$\Delta I_{\nu} = \eta_{\nu} \Delta s$$

 η_{ν} : Proportionalitätsfaktor (Definition!)

"Emissionskoeffizient", engl. "emissivity"

Dimension: Intensität / Länge

Abhängigkeiten:

- η_ν ist - wie κ - i.A. eine komplizierte Funktion der Zustandsgrößen, i.e. von Druck, Temperatur und Strahlungsfeld
 - allgemein $\eta_\nu = \eta_\nu(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)$
 - stationäre Situationen: nicht von t (best.)
 - eindimensionale Geometrie: $\vec{r} \rightarrow r$ oder z
 - übliche Näherung: η_ν isotrop (vollständige Wiederverteilung, engl. complete redistribution)
- $\rightarrow \eta_\nu = \eta_\nu(\nu, z)$

$\Rightarrow$ Transportgleichung:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \kappa (S_\nu - I_\nu)$$

Speziell für planparallele Symmetrie:

mit $ds = -dz/\mu$, vergl. IV. 15

$$\mu \frac{dI_\nu(\nu, \mu, z)}{dz} = \kappa(\nu, z) \{ I_\nu(\nu, \mu, z) - S_\nu(\nu, z) \}$$

- Die (vollständige) Transportgleichung

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \eta_\nu - \kappa \cdot I_\nu$$

!!

Definition:

S_ν (bzw. S_λ) = "Quellfunktion"

(auch: "Ergiebigkeit", engl. "Source Function")

$$S_\nu := \eta_\nu / \kappa$$

anschauliche Bedeutung: Emission, bezogen auf eine optische Weglänge

- Lösung der Transportgleichung bei gegebener Quellfunktion ("Formale Lösung")

IV. 23

(planparallele Symmetrie!)

$$\text{DGL: } \frac{dI(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\mu} (I(\tau) - S(\tau)) \quad \nu, \mu \text{ fest}$$

d.h.: Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die DGL $y' + f(x)y = g(x)$

mit dem Randwert $y(x_0) = y_0$

hat den integrierenden Faktor:

$$M(x) := \exp \left\{ \int_{x_0}^x f(x') dx' \right\}$$

und damit die Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{M(x)} \left[\int_{x_0}^x g(x') M(x') dx' + y_0 \right]$$

Beweis: Probe! $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{M(x)} \right] = - \frac{f(x)}{M(x)}$ (Kettenregel!)

also: $y'(x) = \frac{1}{M(x)} \cdot g(x) M(x) - \frac{f(x)}{M(x)} [\dots]$ (Produktregel!)
 $= g(x) - f(x) \cdot y$, q.e.d.

Speziell: $\tau=0 \Rightarrow$ Emergente Intensität:

$$I^+(\tau=0) = \int_{\tau'=0}^{\tau_{\max}} S(\tau') \exp \left\{ -\frac{\tau'}{\mu} \right\} \frac{d\tau'}{\mu} + I^+(\tau_{\max}) \exp \left\{ -\frac{\tau_{\max}}{\mu} \right\}$$

Interpretation: $\frac{\tau}{\mu}$: opt. Tiefe auf dem Strahl mit μ

$\int S \cdot e^{-\tau} d\tau$: gewichtetes Mittel über die Quellfhn.
 - Gewicht fällt mit $e^{-\tau}$ ab

$I^+(\tau_{\max}) \cdot e^{-\tau_{\max}}$: exponentiell geschwächter Rest
 der Einstrahlung am unteren Rand

Übersetzung auf "unsere" DGL:

$x \rightarrow \tau$ $g(x) \rightarrow -\frac{1}{\mu} S(\tau)$

$f(x) \rightarrow -\frac{1}{\mu}$ $y \rightarrow I$

Referenzpunkt $x_0 \rightarrow \tau=0$ für $\mu < 0$

bzw. $x_0 \rightarrow \tau=\tau_{\max}$ für $\mu > 0$

$\mu > 0$ $M(\tau) = \exp \left\{ \int_{\tau_{\max}}^{\tau} -\frac{d\tau'}{\mu} \right\} = \exp \left\{ \frac{\tau_{\max} - \tau}{\mu} \right\}$

$$\Rightarrow I(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\tau_{\max} - \tau}{\mu} \right\} \left[\int_{\tau_{\max}}^{\tau} -\frac{1}{\mu} S(\tau') \exp \left\{ \frac{\tau_{\max} - \tau'}{\mu} \right\} d\tau' + I^+(\tau_{\max}) \right]$$

$$I(\tau) = \int_{\tau=\tau}^{\tau_{\max}} S(\tau') \exp \left\{ -\frac{\tau' - \tau}{\mu} \right\} \frac{d\tau'}{\mu} + I^+(\tau_{\max}) \exp \left\{ -\frac{\tau_{\max} - \tau}{\mu} \right\}$$

Halbunendliche Atmosphären

häufig betrachteter Fall: $\tau_{\max} \gg 1$

$$\Rightarrow I^+ = \int_{\tau'=0}^{\infty} S_p(\tau') \exp \left\{ -\frac{\tau'}{\mu} \right\} \frac{d\tau'}{\mu}$$

Eddington-Barbier'sche Näherung:

Gewichtsfunktion $e^{-\tau/\mu}$ hat ihren Schwerpunkt
 bei $\tau_{\mu} = 1$ ($\hat{=}$ 1 mittlere freie Weglänge!)

$\Rightarrow$ Emergente Intensität:
 $I^+(\tau, \mu) \approx S_p(\tau(\tau) = \mu)$

Emergenter Fluß:

4-53

$$F_{\nu}^{+} = 2 \int_{\mu=0}^1 I_{\nu}^{+}(\mu) \mu d\mu \quad (\text{vergl. IV.6})$$

mit einem linearen Ansatz für $S_{\nu}(\tau)$:

$$S_{\nu} = S_0 + \tau S_1 \rightarrow I^{+} \approx S_0 + \mu S_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{\nu}^{+} &= 2 \int_{\mu=0}^1 (S_0 + \mu S_1) \mu d\mu = 2 \left[\frac{\mu^2}{2} S_0 + \frac{\mu^3}{3} S_1 \right]_{\mu=0}^1 \\ &= S_0 + \frac{2}{3} S_1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Emergenter Fluß:

$$F_{\nu}^{+}(\nu) \approx S_{\nu}(\tau(\nu) = \frac{2}{3})$$

Kirchhoffscher Satz

IV.26

4-54

- Im thermodynamischen Gleichgewicht
(= T.E.: Hohlraum?) ist stets
und überall:

$$I_{\nu} = B_{\nu}(T) \quad (\text{siehe IV.10})$$

- I_{ν} ist für jeden Strahl ein gewichtetes
Mittel über S_{ν} entlang des Strahls (siehe IV.24)

$\Rightarrow$ damit sich stets $I_{\nu} = B_{\nu}(T)$ ergibt,
ist notwendigerweise überall

$$\begin{aligned} \text{im T.E.:} \quad S_{\nu} &= B_{\nu}(T) \\ \text{oder} \quad \eta_{\nu} &= \alpha(\nu) \cdot B_{\nu}(T) \end{aligned}$$