

VIII. Sterne: Innerer Aufbau

Die meisten Sterne verändern sich nur sehr langsam

⇒ quasi-stationäres Gleichgewicht

- Hydrostatisches Gleichgewicht (vergl. Teil 1 I. 04)

$$\frac{dp(r)}{dr} = -g(r) \rho(r)$$

$\uparrow$  Druckgradient       $\uparrow$  Gravitationsbesch.       $\uparrow$  Dichte

Def.:  $M_r := \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' = \text{Masse innerhalb von } r$

Kugelsymmetrie →  $g(r) = \frac{GM_r}{r^2}$  [vergl. Mechanik-Vorles.]

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r)$$

Frei-Fall-Zeit  $\tau_{FF}$ 

≡ Zeitkonstante für Adjustierung des hydrostat. Gleichgew.

≡ Grundperiode radialer Pulsationen

Größenordnung:

Zeit, um im freien Fall eine Strecke  $\approx R$  zurückzulegen

≡ Umlaufzeit /  $2\pi$  der Kepler-Bahn

vergl. Teil 1, I. 21:  $U^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3$

hier: für äußere Schichten:  $m_1 \approx M$ ,  $m_2 \approx 0$ ,  $a \approx R$

→  $U^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$ ; damit wird  $\tau_{FF} \approx \frac{U}{2\pi}$ :

$$\tau_{FF} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \left(\frac{4\pi}{3} G\right)^{-\frac{1}{2}} \bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}$$

dabei ist  $\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$  die mittlere Dichte des Sterns.

Abschätzung des Drucks im Zentrum [ $p_c$ ]:

Differentialgleichung → Differenzgleichung Rand-Zentrum

$$dp \rightarrow \Delta p = 0 - p_c \quad dr = \Delta r = R - 0 = R$$

rechte Seite: Mittelwerte

$$M_r \approx M \text{ (wg. Dichteanstieg)} \quad r = \frac{R}{2} \quad g(r) = \bar{g} \text{ (mittl. Dichte)}$$

also:  $\frac{p_c}{R} = \frac{GM}{(R/2)^2} \bar{\rho} \Rightarrow \underline{\underline{p_c = \frac{GM}{R} \cdot 4\bar{\rho}}}$

z.B. Sonne:  $M = M_\odot$ ,  $R = R_\odot$ ,  $\bar{\rho} = 1.4 \text{ g/cm}^3$

→  $p_{c,\odot} \approx 1.2 \cdot 10^{16} \text{ dyn/cm}^2 \approx 1.2 \cdot 10^{10} \text{ atm.}$

- genaue Modelle liefern:  $p_{c,\odot} = 2 \cdot 10^{17} \text{ dyn/cm}^2$

Beispiele.

• Sonne:  $\bar{\rho} = 1.4 \text{ g/cm}^3$        $G = 6.67 \cdot 10^{-8} [\text{cgs}]$

→  $\tau_{FF}^\odot \approx 1600 \text{ s} \approx \frac{1}{2} \text{ Stunde}$

• Roter Riese:  $M \approx M_\odot$ ,  $R \approx 100 R_\odot$

→  $\tau_{FF} \approx 10^3 \tau_{FF}^\odot \approx 20 \text{ Tage}$

• Weißer Zwerg:  $M \approx M_\odot$ ,  $R \approx \frac{1}{100} R_\odot$

→  $\tau_{FF} \approx 10^{-3} \tau_{FF}^\odot \approx 1.6 \text{ sec (!)}$

**Zeitskala für Gravitationskollaps bei einer Supernova!**

- Zustandsgleichung der Materie:  $p = p(\rho, T)$

- Ideales Gas,  $p = \frac{k}{A m_H} \rho \cdot T$  [A-mitt. Atomgew.]

... gilt nur in einem kleinen Teil der  $\rho$ - $T$ -Ebene!

- Strahlungsdruck - Gebiet

Druck der Photonen > Gasdruck

$$p_{\text{Rad.}} = a \cdot T^4 \quad \text{Planck-Feld; } a = 7.56 \cdot 10^{-16} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2 \text{K}^4}$$

Grenze zum Idealen Gas:  $p_{\text{Gas}} = p_{\text{Rad.}} \rightarrow \frac{kT}{A m_H} \rho = a T^4$

$$\rightarrow \log \rho - 3 \log T = \text{const.}$$

Dem entarteten Elektronengas kann man keine Bewegungsenergie mehr entziehen!

d.h.  $p = p(\rho)$ , aber nicht Funktion von  $T$ !

genaue Herleitung ergibt:  $p_e \propto \rho^{5/3}$

sofern  $E_{\text{Fermi}} < m_e c^2$  ("nichtrelativistische Entartung")

Grenze zur relativistischen Entartung: bei  $\rho = 10^{6.3} \text{ g/cm}^3$

$\rho$  darüber:  $p_e \propto \rho^{4/3}$

- "Neutronisierung":

bei  $\rho > 10^{8.5} \text{ g/cm}^3$ :  $e^- + p^+ \rightarrow n$

$\rightarrow$  Zusammenbruch des Elektronendrucks

- Neutronenstern: "harte" Zustandsgleichung bei  $\rho = 10^{13.5} \text{ g/cm}^3$

- Elektronen - Entartung

Fermi-Statistik (Pauli-Prinzip):

max. 2 Elektronen pro Phasenraum-Zelle  $h^3$

Zahl der Phasenraum-Zellen bis zur Energie  $E$  (Impuls  $p$ ):

(pro Elektron, d.h.  $\propto \frac{1}{n_e} \propto \frac{1}{\rho}$ ):

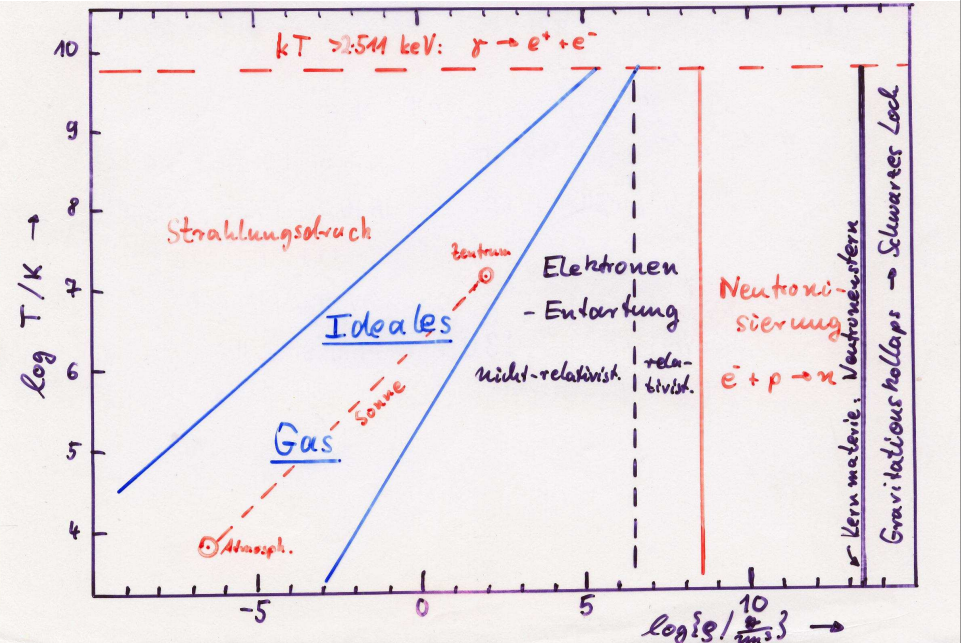
$$N_E \propto \frac{p^3}{\rho} \propto \frac{E^{3/2}}{\rho} \quad \left[ \log. E = \frac{p^2}{2m_e}, p = \text{Impuls!} \right]$$

"Entartung": wenn  $T < T_{\text{Fermi}}$

$\rightarrow$  alle Phasenraum-Zellen bis  $E_{\text{Fermi}} = kT_{\text{Fermi}}$  besetzt ("Fermi-Kante")

Grenzlinie  $\frac{T_{\text{Fermi}}}{\rho^{1/3}} = \text{const.}$

$$\rightarrow \log \rho - \frac{3}{2} \log T = \text{const.}$$

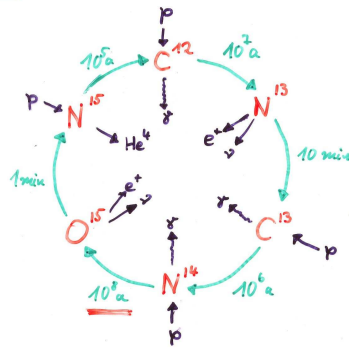




• CNO - Zyklus (Bethe - Weissäcker - Zyklus)

VIII.7

8-13



Neutrino - Verlust:  
6%

Temperatur - Abhängigkeit:

$$\epsilon(T) \propto T^{15.6} \quad (\text{Fit bei } 10^{7.5} \text{ K})$$

CNO - Prozess überwiegt, wenn  $T \gtrsim 15 \cdot 10^6 \text{ K}$

Sonne: 99% p-p, 1% CNO

weil  $T_c = 15 \cdot 10^6 \text{ K}$ , damit  $T_{\text{irr}} < T_c$  im größten Teil des Energie-erzeugenden Kerns

• Kohlenstoff - Brennen

VIII.8

8-15



• weitere Prozesse bis  $\rightarrow \text{Fe}^{56}$

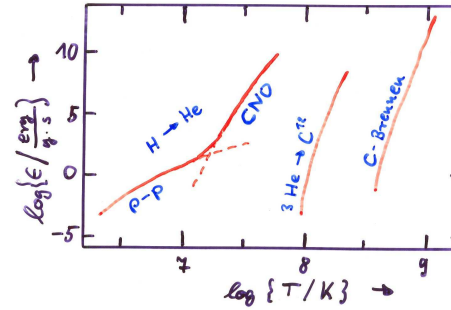
• Neutrino - Bildung



• Fe - Disintegration



Abb.:  $\epsilon(T)$   
der Kernprozesse  
[Voigt, a. 277]



• Helium - Brennen:  $3\alpha$  ("Triple - Alpha") - Prozess

ab  $T \gtrsim 10^8 \text{ K}$ :



$\epsilon(T) \propto T^{30}$  (!) (Fit bei  $T = 10^{8.2} \text{ K}$ )

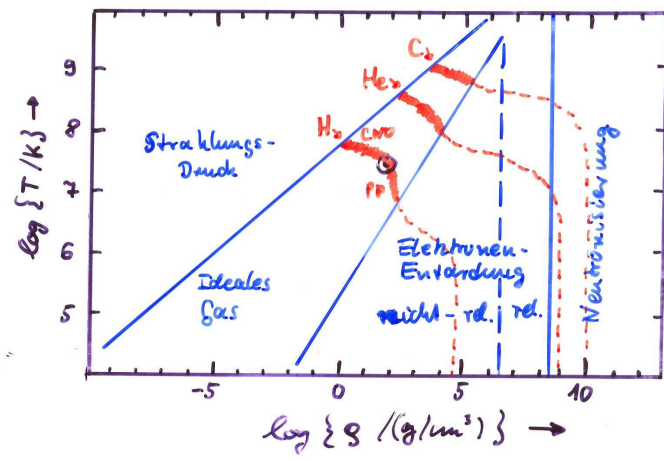
Weitere  $\alpha$  - Reaktionen:



usw.

"Brennregionen"

in der g-T-Ebene



## Gravitations - Energie, $E_G$

VIII.9

8-17

= durch Kontraktion des Sterns aus dem Unendlichen freigesetzte Energie.

Arbeit, um Massenschale  $dM_r$  von  $r \rightarrow \infty$  zu bringen:

$$dM_r \cdot \frac{GM_r}{r}$$

Integral über den ganzen Stern:

$$E_G = \int_{M_r=0}^M \frac{GM_r}{r} dM_r = \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \int_0^M GM_r dM_r = \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle GM^2$$

mit geeignetem Mittelwert  $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = b \cdot \frac{1}{R}$

Für nicht extrem inhomogene Dichteverteilung ist  $b$  von Größenordnung 1.

$$\Rightarrow E_G \approx \frac{GM^2}{R}$$

Vergleich mit der Leuchtkraft  $L$ :

$$\Rightarrow \text{Helmholtz - Kelvin - Zeit: } \tau_{HK} := \frac{E_G}{L}$$

VIII.10 8-19

## Thermische Energie, $E_T$

= Wärme-Inhalt des Sterns.

Virialsatz: im (hydrostatischen) Gleichgewicht:

$$E_T = \frac{1}{2} E_G$$

Beispiel: Abschätzen der "mittleren Temperatur"  $\langle T \rangle$

$$\text{Ideales Gas: } E_T = \frac{M}{A_{MH}} \cdot \frac{3}{2} k \langle T \rangle$$

Zahl der Teilchen      ↑ Freiheitsgrade

$$\text{Sonne: } A = 0.5 (H^+ + e^-), M = M_\odot, E_T = E_T^\odot = \frac{1}{2} E_G^\odot = 2 \cdot 10^{48} \text{ erg}$$

$$\Rightarrow \langle T \rangle = 4 \cdot 10^6 \text{ K}$$

8-18

Beispiele:

• Sonne:  $E_G^\odot = \frac{GM_\odot^2}{R_\odot} = 4 \cdot 10^{48} \text{ erg}$   
 $\tau_{HK}^\odot \approx \frac{E_G^\odot}{L_\odot} = \frac{4 \cdot 10^{48}}{4 \cdot 10^{33}} \text{ s} = 10^{15} \text{ s} = 3 \cdot 10^7 \text{ Jahre} \ll \tau_N !$

• Neutronen-Stern:

$$M \approx M_\odot \quad R = 15 \text{ km} = 2 \cdot 10^{-5} R_\odot$$

$$\rightarrow E_G = 2 \cdot 10^{53} \text{ erg} \approx \frac{1}{10} M_\odot c^2 !$$

→ reicht aus, um alle Kernfusionen rückgängig zu machen!

8-20

## Der stellare Thermostat:

Voraussetzungen:

- $\epsilon(T)$  wächst mit  $T$  ( $\downarrow T > 10^9 \text{ K}$ )
- $p$  wächst mit  $T$  ( $\downarrow$  Entartung!)

Wirkungsweise:

Wenn  $\epsilon(T)$  wächst

- $T$  wächst →  $p$  wächst → Stern expandiert
- $\langle T \rangle$  nimmt ab →  $\epsilon(T)$  nimmt ab.

Zusammenfassung:

VIII. 11

Die Grundgleichungen des Inneren Aufbaus

- formuliert mit  $M_r$  als unabhängiger Variablen
- vorgegeben: **Mass**  $M$  und chem. Zusammensetzung (gef. chem. "Profil")
- gesucht:  $p(r)$  (Druck)  
 $r(M_r)$  ( $\Rightarrow$  Dichteschichtung; bes.  $r(M) = R$ )  
 $L_r$  (besonders  $L_R = L$ )  $\rightarrow T_{\text{eff}}$   
 $T(r)$

④ Transportgleichungradiative Bereiche:graue Näherung (Teil 1/IV.40):  $T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \cdot \tau_{\text{Rosseland}}$ hier:  $L_r$  von  $r$  abhängig:  $L_r = 4\pi r^2 T_{\text{eff}}^4 r^2$  [1/IV.14]

$$\rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\alpha_{\text{Ross}}}{T^3} \frac{3L_r}{4\pi r^2} \quad (\text{mit } d\tau_{\text{Ross}} = -\alpha_{\text{Ross}} dr)$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dM_r} = -\frac{3\alpha_{\text{Ross}} L_r}{16\pi^2 r^4 8T^3}$$

konvektive Bereiche:

$$\rightarrow \text{adiabatischer Gradient: } \frac{d(\ln T)}{d(\ln p)} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \quad [1/IV.45]$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dp} = \frac{T}{p} \frac{\gamma-1}{\gamma} \quad \xrightarrow{\text{④ einsetzen}} \quad \frac{dT}{dM_r} = -\frac{T}{p} \frac{GM_r}{4\pi r^4} \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

4 Differentialgleichungen:① Hydrostatische Gleichung  $\rightarrow p(M_r)$ 

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} g(r) \quad (\leftarrow \text{VIII.1}) \rightarrow \frac{dp}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}$$

② Massen-Gleichung

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (\leftarrow \text{VIII.1})$$

+ Zustands-Gleichung (z.B. für Ideales Gas):  
 führt  $\rho$  auf  $p$  und  $T$  zurück

③ Energie-Gleichung

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon(g, T, r, \dots) \quad (\Sigma \text{ aller Energie-Quellen})$$

Randwerte:

|            | innen<br>$M_r = 0$ | außen<br>$M_r = M$ |
|------------|--------------------|--------------------|
| $p(M_r)$   | $p_c ?$            | $\approx 0$        |
| $r(M_r)$   | 0                  | $R ?$              |
| $L_r(M_r)$ | 0                  | $L ?$              |
| $T(M_r)$   | $T_c ?$            | $T_0 (\approx 0)$  |

Problem: gemischte Randbedingungen, d.h. man kann nicht einfach von innen nach außen (oder umgekehrt) integrieren.

Trickreiche Iterationsmethode: sog. Henyey-Verfahren •

## Resultate: Sternmodelle

VIII. 13

### Hauptreihen - Sterne

- Vorausss.:
- nukleares Gleichgewicht ( $\epsilon = \epsilon_N$ )
  - "Null-Alter": homogene chemische Zusammensetzung (überwiegend Wasserstoff, z.B. "solar")

Freier Parameter: **Masse M**

Resultat:  $L, T_{\text{eff}}$  als Funktion von  $M$ , d.h.:

- $L(M)$ , Masse-Leuchtkraft-Relation
  - "Hauptreihe" im HR-Diagramm
- ZAMS = Zero Age Main Sequence**
- } gute Übereinstimmung mit Beobachtung

VIII. 14

### Unsicherheiten der Modelle: Konvektions-Theorie

- "Overshooting" in angrenzende stabile Schichten
- "Mischungspegel-Parameter"  $\cong$  Effizienz des konvektiven Energie-Transports [adiabatische Schichtung wird nicht ganz erreicht!]
- "Semi-Konvektion" in marginal instabilen Schichten, die durch den chemischen Gradienten stabilisiert werden

### Helium-Hauptreihe

analog zur ZAMS, jedoch für homogene Sterne aus Helium

### Eigenschaften:

- H-Brennen im Zentralgebiet ( $\approx \frac{1}{10} R$ )  
überwiegend PP-Kette, wenn  $M \leq 1.5 M_{\odot}$   
"CNO-Zyklus,  $M \geq 1.5 M_{\odot}$
- Konvektionszonen
  - bei massearmen Sternen ( $M \leq 1.5 M_{\odot}$ ):  
äußere Bereiche wg. H-Rekombination  
("Wasserstoff-Konvektionszone, WkZ;  $\alpha$ - $\gamma$ -Effekt)
  - bei massereichen Sternen ( $M \geq 1.5 M_{\odot}$ ):  
konvektiver Kern  
wg. steilem T-Gradienten beim CNO-Prozess

### Hayashi-Limit

- Wenn Stern nicht im nuklearen Gleichgewicht
- Entwicklung auf Helmholtz-Kelvin-Zeitskala
  - (zusätzliche) Energiegewinnung durch Kontraktion ( $\epsilon_g$ )
  - steilerer Temperaturgradient als im Gleichgewicht
  - größere Ausdehnung der Konvektionszonen

Maximal: vom Zentrum bis zum Rand = "vollkonvektiver Stern"

Aufbaugleichungen → Grenzlinie im HR-Diagramm  
= **Hayashi-Limit** bei  $\approx 3500 \text{ K}$  (etwas abh. von  $M$  und  $Z$ )

