

Grundkurs Astrophysik

0-01

Vorlesung mit Übung, 2 Semester 2014/2015
Wolf-Rainer Hamann, Universität Potsdam

Inhalt

- I Erde
Einschub: Zwei-Körper-Problem
- II Mond
- III Planeten
- IV *Einschub:* Strahlungstransport, Sternatmosphären
- V Sonne
- VI Sterne: Zustandsgrößen
- VII *Einschub:* Astronomische Instrumente
- VIII Sterne: Innerer Aufbau
- IX Sterne: Entstehung - Entwicklung - Spätphasen
- X Diffuse Materie
- XI Sternhaufen, Galaxien
- XII Kosmologie

3

Vorlesungsskript

0-03

- Teilnehmer erhalten je ein (!) Exemplar
- Vorlesungsskript und Übungsblätter liegen im Internet

<http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~wrh/grundkurs.html>

Übungen

Donnerstag, 10:15 - 11:45, alle 14 Tage
ungerade Kalenderwochen, Beginn am 23. Oktober 2012
Übungsleiterin: Kathleen Scholz
Email: kamuelle@astro.physik.uni-potsdam.de

Kriterien zur Vergabe der Leistungspunkte

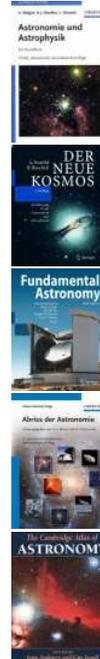
- Übungsaufgaben (50% der Punkte je Semester)
- Klausur am Ende des 2. Semesters

3

Literatur

0-02

- A. Weigert, H. Wendker, L. Wisotzki:
Astronomie und Astrophysik
5. Auflage 2009, Wiley 59 Euro
- A. Unsöld, B. Baschek:
Der neue Kosmos
7. Auflage 2002, Springer 60 Euro
- Karttunen et al.:
Fundamental Astronomy
5. Auflage 2007, Springer 32 Euro
- H.-J. Röser, W. Tscharnuter, H.H. Voigt:
Abriss der Astronomie
6. Auflage 2012, Wiley 79 Euro
- J. Audouze, G. Israel: :
Cambridge Atlas of Astronomy
neu 100 Euro - vergriffen; antiquarisch

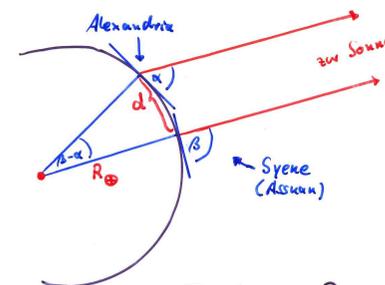


3

I. Erde

I.1 1-01

- Kugelgestalt
- bereits in der Antike bekannt
(z.B. Pythagoras von Samos, 570 - 497 v. Chr.)
- Bestimmung des Erdradius durch
Eratosthenes (275 - 194 v. Chr.) :



Messung der Kulminationshöhen
der Sonne (α und β) an
zwei Orten bekannter
Nord-Süd-Eutfernung d

$$\Rightarrow \frac{d}{2\pi R_{\oplus}} = \frac{\beta - \alpha}{360^\circ}$$

Ergebnis: $R_{\oplus} = 150\,000$ (152 000 ?) "Stadien"
auf $\approx 1\%$ richtig!

3

- Neuvermessung (Französische Revolution)
 - Definition des "Meters" als $10^{-7} \times [\text{Nordpol} - \text{Äquator}]$
- Heutiger Wert:
 - Nordpol - Äquator: 10 002.02 km
 - $\hat{=} R_{\oplus} \approx 6370 \text{ km}$

Mittlere Dichte:

$$\text{Volumen } V_{\oplus} = \frac{4\pi}{3} R_{\oplus}^3 = 1.08 \cdot 10^{27} \text{ cm}^3$$

$$\bar{\rho}_{\oplus} = M_{\oplus} / V_{\oplus} = \underline{\underline{5.5 \text{ g/cm}^3}}$$

Vergleiche: typische Dichte von Oberflächengestein
(Granit, Basalt): $\approx 3 \text{ g/cm}^3$

⇒ höhere Dichten im Erdinneren
(Eisen - Nickel - Kern)

Masse der Erde

Voraussetzungen:

- Gravitationskonstante G aus Labormessungen:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ cgs}$$

- Fallbeschleunigung (s. Abb.)

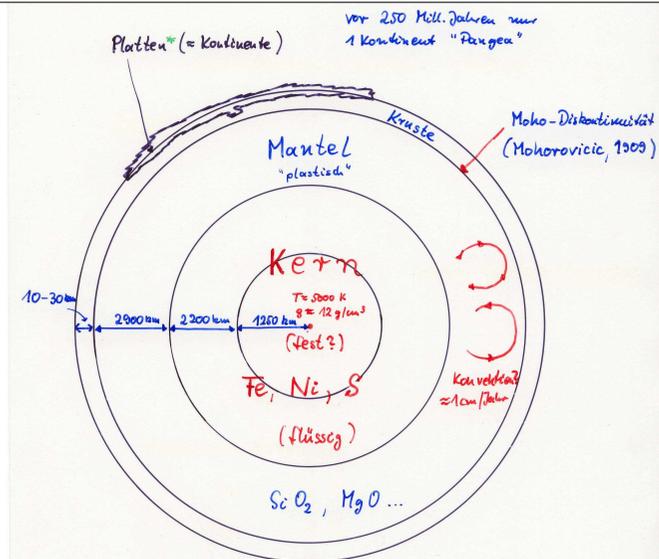
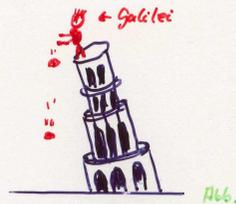
$$g = 981 \text{ cm/s}^2$$

- Gravitationsgesetz

$$g = \frac{G \cdot M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$$

(Ann.: sphärisch-symmetrische Massenverteilung)

$$\Rightarrow M_{\oplus} = \frac{g \cdot R_{\oplus}^2}{G} = \underline{\underline{5.97 \cdot 10^{27} \text{ g}}}$$



* Älteste Gesteine: Kristallisation vor $\approx 4 \cdot 10^8$ Jahren

Wärme: Entstehung aus radioakt. Zerfall (U^{238} , Th^{232} , K^{40})
Transport durch Wärmeleitung u. Konvektion

• Erdoberfläche

$\frac{2}{3}$ Ozeane, $\frac{1}{3}$ Kontinente

"Biosphäre": Ozeane, große Teile der Land-Oberfläche

- trägt pflanzliches, tierisches u. intelligentes (?) Leben

<u>Albedo:</u>	Ozeane	7-9%	
	Kiefernwald	12%	
	Sandboden	= 30%	Mittelwert ≈ 31%
	"White Sands" Mexiko	60%	
	Schnee	≥ 60%	
	[Wolken	30-90%	- bedecken ≈ 50% der Erdoberfläche]

• Druck (auf Meereshöhe):

$$p_0 = 1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

mit leichten Schwankungen von typisch $\pm 2\%$

• Dichte:

Berechnung nach der "Allg. Gasgleichung"

d.h. Näherung "ideales Gas"!

$$p \cdot V = N k T$$

V = Volumen; N = Zahl der Teilchen in V

k = Boltzmann-Konstante = $1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$

• Erdatmosphäre

Resultat der Entwicklung, besonders der Produktion von Sauerstoff durch Photosynthese

• Zusammensetzung (Massenbruchteile)

N_2	76%
O_2	23%
H_2O	0.06 - 1.7%
Ar	1.3%

• Durchschnittl. Temperatur auf Meereshöhe:

$$\langle T \rangle = 288 \text{ K} \left[\hat{=} 15^\circ \text{C} \right]$$

... mit erheblichen örtlichen und zeitlichen Schwankungen, typischerweise $\pm 5\%$

Dichte = Masse / Volumen:

$$\rho = N \cdot A \cdot m_H / V$$

A = Massenzahl (Mittelwert)
 m_H = Masseneinheit = $1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{kT}{A m_H} \rho$$

Einsetzen: für Erdoberfläche

$$T_0 = 288 \text{ K}$$

$$A_0 = \frac{3}{4} \cdot 28 + \frac{1}{4} \cdot 32 = 29 \quad \left(\frac{3}{4} N_2, \frac{1}{4} O_2 \right)$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{29 \cdot 1.66 \cdot 10^{-24}}{1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 288} \cdot p_0 = 1.21 \cdot 10^{-3} \cdot p_0 \quad [\text{cgs}]$$

$$\rho_0 = 1.23 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3 = 1.23 \text{ g/Liter}$$

"Säulendichte"

= Masse über einer Flächeneinheit

Druck = Gewicht / Flächeneinheit

Gewicht = Masse · Schwerebeschleunigung

$$\Rightarrow \text{Säulendichte} = \frac{p_0}{g} = \frac{1.013 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2}{981 \text{ cm/s}^2} = \underline{1032 \text{ g/cm}^2}$$

Äquivalenzhöhe \neq Skalenhöhe

wenn Dichte konstant = ρ_0 wäre,
hätte die Atmosphäre die Höhe

$$H_0 = \frac{p_0}{g \rho_0} = \frac{k T_0}{g A_0 m_H}$$

als Differentialgleichung

$$\frac{dp(h)}{dh} = -g \rho(h) \quad \text{Hydrostatische Gleichung}$$

Einsetzen der Zustandsgleichung (Allg. Gasgleichung):

$$\frac{dp}{dh} = - \frac{g A m_H}{k T} \rho(h)$$

oder kurz:

$$\frac{dp(h)}{dh} = - \frac{1}{H(h)} \rho(h)$$

$$= \frac{1}{1.21 \cdot 10^{-3} \cdot 981} \text{ cm} = 8.4 \cdot 10^5 \text{ cm}$$

$$H_0 = 8.4 \text{ km}$$

Beachte: $H_0/R_\oplus \approx 1.3\%$, also sehr klein!

Dichteschichtung $\rho(h)$ bzw. Druckschichtung $p(h)$

"hydrostatische Schichtung":

Auftrieb = Gewicht

Netto: $- \Delta p \cdot F$

$F \cdot (p - \Delta p)$

$F \cdot p$

Δh

$mg = g V g = g F \Delta h g$

also: $- \Delta p = g \Delta h g$

Die "Skalenhöhe" $H(h) := \frac{k T(h)}{g A(h) m_H}$

ist genau genommen von h abhängig.

Näherung: $H(h) = H_0 = \text{const.}$

\Rightarrow Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

\Rightarrow simple Lösung:

$$p(h) = p_0 e^{-h/H_0} \quad \text{Barometrische Höhenformel}$$

\Rightarrow Abnahme der Dichte und des Drucks

- um 1% auf 100 m
- auf 70% in 3000 m Höhe (Zugspitze)
- auf 40% in 8000 m Höhe (Himalaya)

[zum Wärmehaushalt der Erdatmosphäre siehe Ende von Kap. I]

• Erdmagnetfeld

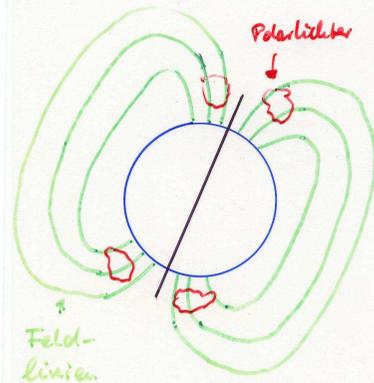
- = magnetischer Dipol
magn. Südpol bei 69° östl. Länge, 79° nördl. Breite
- magn. Pole "wandern"
- Feldstärke und -richtung verändern sich
auf Zeithala $\approx 10\,000$ Jahren Wechsel der Pole (bei Kristallisation in Gestein "eingefroren")
- Ursache: "Dynamo-Effekt"
durch Erdrotation und Konvektion von elektrisch leitendem Material im Erdinneren

I.9

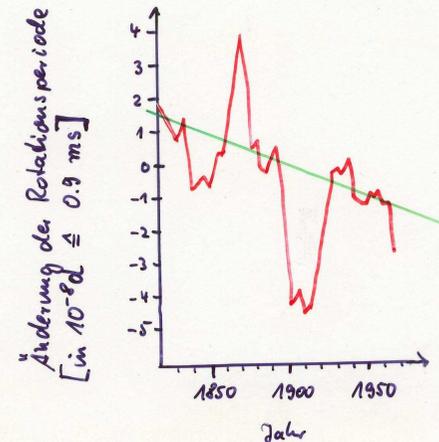
• Rotation der Erde

- Periode (gegenüber Stern-Hintergrund)
 $23^h 56^m 4^s = \frac{365.25}{366.25} \cdot 24^h$
= 1 "siderischer Tag" oder "Sternstag"
- Änderungen der Periode:
 - Verlangsamung durch Gezeitenreibung (+ siehe später)
derzeit $\approx 16 \cdot 10^{-6}$ sec/Jahr
→ vor 370 Mill. Jahren: 1 Jahr = 400 Tage
(aus Korallen)

- Feldstärke am Äquator: 0.32 gauss
- Magnetosphäre:
 - Wechselwirkung des Erdmagnetfelds mit elekt. geladenen Teilchen von der Sonne
 - Teilchen bewegen sich entlang der Feldlinien
 - Eindringen in dichtere Atmosphäre in der Nähe der Pole
→ "Nordlichter", "Polarlichter"
[engl. (polar) aurorae]

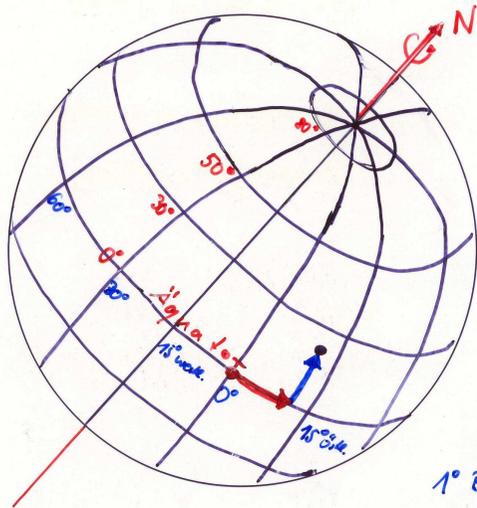


- stochastische Schwankungen
Änderungen des Trägheitsmoments
durch Verlagerung von Massen



• Geographische Koordinaten

I.10



Polarkoordinaten:
Polachse \perp Äquator

Längentreise:
Großkreise,
Null-Meridian durch
Greenwich bei London

Breitentreise:
keine Großkreise,
 $1^\circ \text{ Breite} \approx \frac{10000}{90} = 111 \text{ km}$

z. B. Koordinaten von Potsdam:

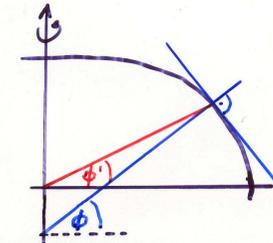
13°0 östl. Länge (engl. longitude)
52°4 nördl. Breite (engl. latitude)

• Abplattung der Erde

wegen der Zentrifugalkraft

$R_{\text{Äquator}} = 6378.2 \text{ km}$
 $R_{\text{Pol}} = 6356.8 \text{ km}$ (1/300 weniger)

Folge: kleiner Unterschied
zwischen geographische =
astronomische Breite ϕ
und geozentrischer Breite ϕ'



z. B. Koordinaten von Potsdam:

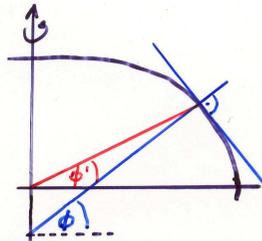
13°0 östl. Länge (engl. longitude)
52°4 nördl. Breite (engl. latitude)

• Abplattung der Erde

wegen der Zentrifugalkraft

$R_{\text{Äquator}} = 6378.2 \text{ km}$
 $R_{\text{Pol}} = 6356.8 \text{ km}$ (1/300 weniger)

Folge: kleiner Unterschied
zwischen geographische =
astronomische Breite ϕ
und geozentrischer Breite ϕ'



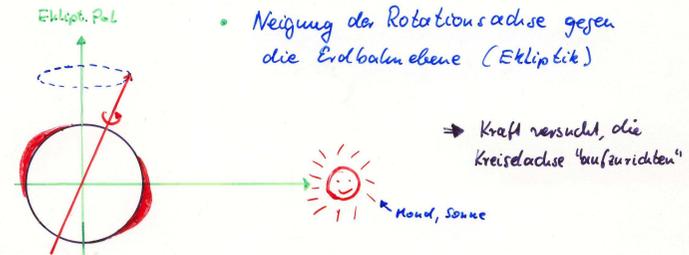
• Präzession

Rotationsachse der Erde ändert
ihre Lage im Raum (entdeckt: Hipparchus 130 v. Chr.)

• Lunisolar - Präzession (← Haupteffekt)

Ursachen:

- Abplattung der Erde
- Anziehung der Sonne und des Mondes
- Neigung der Rotationsachse gegen die Erdbahnebene (Ekliptik)



→ Rotations-Pol kreist um den ekliptischen Pol

- Neigung: 23.5°
- Periode: ≈ 26000 Jahre

Nutation

- Mond-Anteil der Präzession hat Pol der Mondbahn zum Mittelpunkt
- Mondbahn ist 5° gegen Ekliptik geneigt
- Mondknoten-Pol präzediert in 18.6 Jahren um den ekliptischen Pol



⇒ kleine überlagerte Schwingung der Erdachse
 Periode: 18.6 Jahre
 Amplitude: Größenordnung $\pm 8''$

• Gravitations-Gesetz

$$\vec{K}_i = - \frac{G m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

- keine weiteren Kräfte (Reibung, weitere Körper ...)

Ziel: "Lösung der Bewegungsgleichung"

- d.h.:
- Bestimmung der (möglichen) Bahnen
 - Berechnung der Position(en) zur Zeit t bei gegebener Bahn

Bahn der Erde um die Sonne

Einschub: Das "Zwei-Körper-Problem" der Mechanik



"Hebelgesetz": $m_1 \vec{r}_1 = - m_2 \vec{r}_2$ (Vektoren)

oder $m_1 r_1 = m_2 r_2 = \mu (r_1 + r_2)$

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{"reduzierte Masse"}$$

Voraussetzungen:

- 2 Massenpunkte (gilt auch genau für sphärisch-symmetrische Körper)
- Newton'sche Mechanik
 bes.: $\vec{K}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$ ($i=1,2$) Kraft = Masse \times Beschleunigung
- $\vec{K}_1 = -\vec{K}_2$ "actio = reactio"

... man erinnert sich an die

Erhaltungs-Sätze

- allgemein gültig für abgeschlossene Systeme
- entsprechen jeweils einer Symmetrie der Raumzeit
 (Theorem von E. Nöther)

• Impuls-Erhaltung (vektoriell: 3-dim.)

folgt aus der Homogenität des Raumes

Def.: Impuls eines Körpers: $m_i \dot{\vec{r}}_i$ "Masse \cdot Geschwindigkeit"

[engl.: conservation of momentum]

• Drehimpuls-Erhaltung (vektoriell: 3-dim.)

1-26

[Engl.: angular momentum]

folgt aus der Isotropie des Raumes

Def.: (Bahn-) Drehimpuls eines Körpers:

$$\vec{N}_i = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad \text{"Radiusvektor} \times \text{Impulsvektor"}$$

Vektorprodukt ("Kreuzprodukt"):

$$\vec{N}_i \perp \vec{r}_i ; \vec{N}_i \perp \dot{\vec{r}}_i ; N_i = m_i r_i \dot{r}_i \sin(\angle \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)$$

• Energie-Erhaltung (skalar: 1-dim.)

folgt aus der Homogenität der Zeit

Hier: $E = E_{kin} + E_{pot} = const.$

Kinetische Energie eines Körpers: $\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$

Potenitielle Energie des Systems (2 Körper): $E_{pot} = -\frac{G m_1 m_2}{r_1 + r_2}$

• Drehimpuls-Erhaltung \Rightarrow

1-28

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = const.$$

$$\vec{N}_1 = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1$$

$$\vec{N}_2 = m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

mit $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$:
 $\vec{N} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

wg. der Symmetrie: $\vec{N}_2 = -m_1 \vec{r}_1 \times (-\frac{m_2}{m_1} \dot{\vec{r}}_1)$
 $= \frac{m_1}{m_2} \vec{N}_1$

\rightarrow d.h. \vec{N}_1 und \vec{N}_2 bleiben sogar für sich erhalten.

\rightarrow d.h. $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$

Da $\dot{\vec{r}}_i \perp \vec{N}_i$ (Kreuzprodukt!):

Beide Körper bewegen sich in einer (derselben!) Ebene, deren Lage im Raum konstant bleibt (nämlich \perp zu \vec{N}).

Schlussfolgerungen für unser 2-Körper-Problem:

1-27

I.14

• Impuls-Erhaltung \Rightarrow

• Schwerpunkt bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit

\Rightarrow wähle Schwerpunkt als Koordinaten-Ursprung

• $\vec{r}_1(t)$ legt $\vec{r}_2(t)$ automatisch fest:

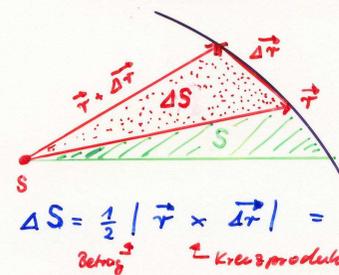
(siehe oben "Hebelgesetz")

\rightarrow beide Bahnen sind "ähnliche" geometrische Figuren

\rightarrow ein momentaner Zustand ist durch genau 6 Parameter beschreibbar, z.B.: $\vec{r}_1(t), \dot{\vec{r}}_1(t)$

... ferner folgt aus der Drehimpuls-Erhaltung der "Flächensatz" (2. Keplersches Gesetz)

I.15 1-29



$$\Delta \vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \Delta t$$

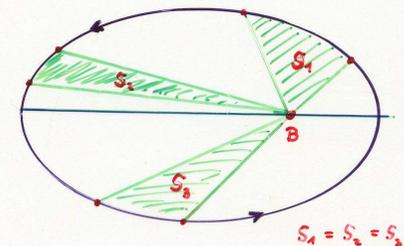
Flächenzuwachs ΔS

Parallelogramm $\rightarrow \Delta S = \frac{1}{2} r \cdot dr \cdot \sin \alpha$

$$\Delta S = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta \vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| \Delta t = const. \cdot \Delta t$$

Retrag \vec{r} \perp Kreuzprodukt $N/m = const.$

"Der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen."



• Energie - Erhaltung \Rightarrow

Da: $\lim_{(r_1+r_2) \rightarrow \infty} E_{\text{pot.}} = 0$ und $E_{\text{kin.}} \geq 0$

- \Rightarrow
- für $E < 0$ ist (r_1+r_2) beschränkt, d.h. die Bahn ist "gebunden"
 - für $E > 0$ ist selbst im Unendlichen noch $\dot{r} > 0$
 - \rightarrow ein einzeln Körper kann keinen anderen Körper "einfangen"

Integration durch trichreiche Vektoralgebra:

x-Multiplikation von links mit $\vec{N}_1 = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1$

[Index "1" ab hier weglassen]

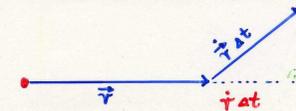
$$m [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{mC}{r^2} [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] \times \frac{\vec{r}}{r}$$

"Entwickelungssatz": $a \times [b \times c] = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c$ Skalarprodukte!

$$\vec{N} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{mC}{r^3} \{ (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} \}$$

const. $(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) = r^2$ ↑ $(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = r \dot{r}$

weil Projektion von $\dot{\vec{r}}$ auf \vec{r} :



Bahnformen im Gravitationsfeld

$$\vec{K}_i = -\frac{G m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} \quad (i=1,2)$$

\Rightarrow z.B. für Körper 1:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{G m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1} \\ &= -\frac{G m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^2} \end{aligned}$$

\Rightarrow $\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{C}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1}$ "Bewegungsgleichung":
DGL 2. Ordnung (3-dim.)

also:

$$\vec{N} \times \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}) = -mC \left\{ \frac{r \dot{\vec{r}}}{r^2} - \dot{r} \frac{\vec{r}}{r} \right\}$$

$$= -mC \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \leftarrow \text{"Quotientenregel" !}$$

jetzt leicht: Zeit-Integration:

$$\vec{N} \times \dot{\vec{r}} = -mC \frac{\vec{r}}{r} - \vec{A} \leftarrow \text{Integrations-Konstante}$$

• - Multiplikation von rechts mit \vec{r} :

$$[\vec{N} \times \dot{\vec{r}}] \cdot \vec{r} = -mC \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} - (\vec{A} \cdot \vec{r})$$

"Spatprodukt";
zykl. Vertauschung
möglich:

$$\frac{r^2}{r}$$

$$\underbrace{[\dot{\vec{r}} \times \vec{r}] \cdot \vec{N}}_{-N/m} = -mC r - (\vec{A} \cdot \vec{r})$$

Definiere $\varphi = \angle(\vec{A}, \vec{r})$

$$-N^2/m = -mC r - A \cdot r \cdot \cos \varphi \quad | : -mC$$

$$\underbrace{\frac{N^2}{m^2 C}}_{=: p} = \left\{ 1 + \underbrace{\frac{A}{mC}}_{=: \epsilon} \cos \varphi \right\} r \quad | : \{ \dots \}$$

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

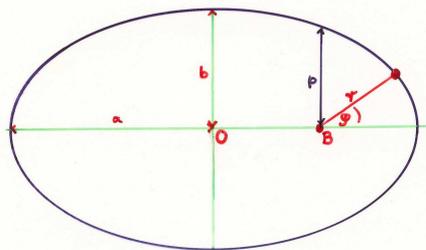
d.h. die Polargleichung der Kegelschnitte!
"1. Keplersches Gesetz"

Anmerkungen:

- Der Schwerpunkt liegt im Brennpunkt des Kegelschnittes!
- Transformation auf Relativ-Koordinaten (z.B. Körper 1 als Koordinaten-Ursprung) liefert "ähnlichen" Kegelschnitt (selbes c) mit addierten Achsen: $a = a_1 + a_2$ usw.
- Andere Kraft-gesetze (z.B. $K \propto r^n$, $n \neq -2$) geben i.A. keine geschlossenen Bahnen, sondern "Rosetten".
Ausnahme: $n = +1$ (Pendel!) \Rightarrow Ellipse mit Kraftzentrum im Mittelpunkt.

Kegelschnitte:

z. B. Ellipse $0 < \epsilon < 1$



$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

φ = "wahre Anomalie"

B = Brennpunkt

O = Mittelpunkt

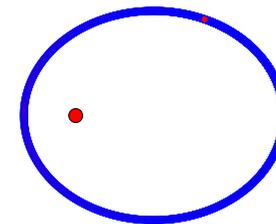
a = große Halbachse

b = kleine Halbachse

	Kreis	Ellipse	Parabel	Hyperbel
ϵ = Exzentrizität	0	< 1	1	> 1
p = Parameter	a	$a(1-\epsilon^2)$	p	$a(\epsilon^2-1)$
b = kleine Halbachse	a	$a\sqrt{1-\epsilon^2}$	-	$a\sqrt{\epsilon^2-1}$
r_p = Perizentrums-r	a	$a(1-\epsilon)$	$p/2$	$a(\epsilon-1)$
r_A = Apozentrums-r	a	$a(1+\epsilon)$	∞	∞

Bewegung im Zentralfeld

Force-law exponent $n = -2$



Demo: Simple numerische Integration der Bewegungsgleichung

Anfangswerte r_0, v_0

Loop über i :

Zeitschritt $t_{i+1} = t_i + \Delta t$

$r_{i+1} = r_i + v_i \Delta t$

$\Delta v = -C r_i^n \Delta t$

$v_{i+1} = v_i + \Delta v$

Demo $n = -2.1$

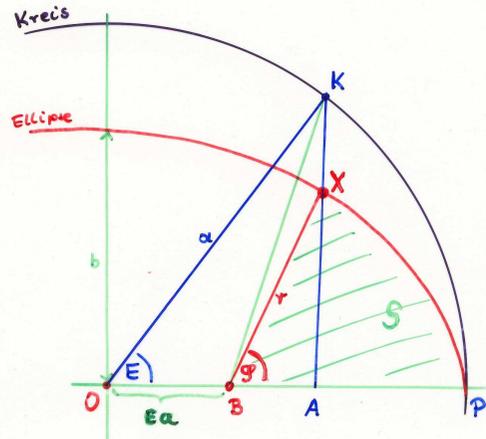
Demo $n = 1$

Bestimmung des Bahnortes

I.191-38

"Keplers Problem":

Anwendung des Flächensatzes auf Ellipsen
zwecks Berechnung der "wahren Anomalie" $\varphi(t)$



Ellipse =
"gestauchter" Kreis,
Ordinaten im Verhältnis
 b/a verkürzt!

1-40

I.20

$$\Rightarrow \text{Fläche } (B, P, K) = \text{Kreissector } (O, P, K) - \text{Dreieck } (O, B, K)$$

$$= \frac{E}{2\pi} \pi a^2 - \frac{1}{2} \epsilon a^2 \sin E$$

$$= \frac{1}{2} a^2 (E - \epsilon \sin E)$$

Diese Fläche wird durch den Faktor $\frac{b}{a}$ auf S gestaucht:

$$S(t) = \frac{1}{2} ab M(t) = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \cdot a^2 (E - \epsilon \sin E)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(t) - \epsilon \sin E(t) = M(t) \text{ + gegeben!}}$$

"Keplersche Gleichung":

transzendente Gleichung zur Bestimmung von E(t)

Flächensatz $\Rightarrow S(t) = \pi ab \cdot \frac{t - t_0}{U}$

πab = Fläche der Ellipse t_0 = Perizentriums-Durchgang U = Umlaufzeit

Def.: "mittlere Anomalie" $M(t)$: gleichförmig wachsende Winkel

$$M(t) := 2\pi (t - t_0) / U \Rightarrow S(t) = \frac{\pi b}{a} M(t)$$

Bestimmung der "Exzentrischen Anomalie" $E(t)$:

- Fläche des Kreissectors (O, P, K) : $\frac{E}{2\pi} \pi a^2$

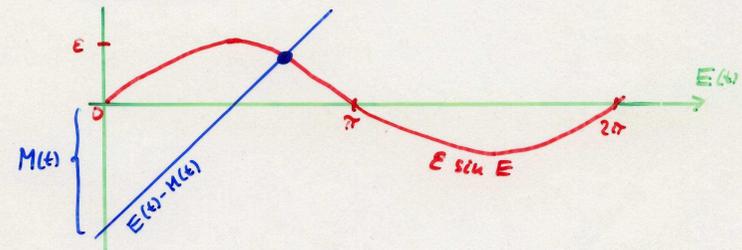
- Fläche des Dreiecks (O, B, K) :

$$\frac{1}{2} \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \epsilon a \cdot a \sin E = \frac{1}{2} \epsilon a^2 \sin E$$

1-39

Lösung durch iterative Methoden.

Ausdrücklich:



1-41

Abschluss: Umrechnung $E \rightarrow \varphi$
(siehe Voigt, S. 34)

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

fertig.

Zusammenhang zwischen Umlaufzeit U und großer Halbachse a

$$\text{Flächensatz} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{\pi ab}{U} \quad + \text{Ellipsenfläche} \\ b = \sqrt{a p}$$

(I.15 oben) ↓

$$\frac{N}{2m} = \frac{\pi a^{3/2} p^{1/2}}{U}$$

$$\text{setze ein: } \sqrt{p} = \frac{N}{m \sqrt{C}} \quad (\text{I.17 unten})$$

$$\Rightarrow \frac{N}{m} = \frac{2\pi a^{3/2}}{U} \frac{N}{m \sqrt{C}} \quad \rightarrow \text{Quadrieren}$$

$$U^2 = \frac{4\pi^2}{C_1} a^3 \quad (\text{für Körper 1})$$

$$\text{wobei } C_1 = G m_2^3 / (m_1 + m_2)^2 \quad (\text{I.16})$$

Umrechnung auf relative Koordinaten:

$$\alpha_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \alpha \quad \rightarrow \text{einsetzen}$$

$$U^2 = \frac{4\pi^2 (m_1 + m_2)^2}{G m_2^3} \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} a^3$$

$$U^2 = \frac{4\pi^2}{G (m_1 + m_2)} a^3$$

3. Keplersches Gesetz

- strenge Form -

Gesamtenergie

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad \text{in jedem Zeitpunkt}$$

$$\bullet E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \mu v^2$$

Notation: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ usw. $\mu = \text{"reduzierte Masse"}$

für lineare Größen gilt: $m_1 x_1 = m_2 x_2 = \mu x$

im Zeitpunkt des Perizentrums-Durchgangs ist $\vec{r}_p \perp \vec{v}_p$

$$\rightarrow N = \mu r_p v_p \quad \rightarrow \text{einsetzen:}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{N^2}{2\mu r_p^2}$$

Um N^2 loszuwerden: Def. von p_1 (I.17 unten):

$$N_1^2 = p_1 m_1^2 C_1 = p_1 m_1^2 \frac{G m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \\ = p_1 m_2 G \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} = p_1 m_2 G \mu^2$$

$$\Rightarrow \text{wegen } m_1 N_1 = \mu N$$

$$N^2 = \frac{m_1^2}{\mu^2} N_1^2 = p_1 G m_1^2 m_2 = \mu p G m_1 m_2$$

$$\rightarrow E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} G m_1 m_2 \frac{p}{r_p^2}$$

$$\bullet E_{\text{pot}} = - \frac{G m_1 m_2}{r_p} \quad \text{vgl. (I.13 unten)} \quad \text{Normierung so, dass } \lim_{r \rightarrow \infty} E_{\text{pot}} = 0$$

$$\Rightarrow E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{G m_1 m_2}{r_p} \left(\frac{1}{2} \frac{p}{r_p} - 1 \right)$$

$$\text{da } \frac{p}{r_p} = \frac{a(1-\epsilon^2)}{a(1-\epsilon)} = 1 + \epsilon \quad \rightarrow$$

$$E = G \frac{m_1 m_2}{2 r_p} (\epsilon - 1)$$

Kreis, Ellipse: $\epsilon < 1 \rightarrow E < 0$
Parabel: $\epsilon = 1 \rightarrow E = 0$
Hyperbel: $\epsilon > 1 \rightarrow E > 0$

Bahnelemente

= die übliche Art, die 6 Integrationskonstanten der Bewegungsgleichung anzugeben

- Orientierung der Bahnebene
(2 Winkel in einem vorgegebenen Koordinatensystem)
- Orientierung des Kegelschnitts in der Ebene
(1 Winkel, der z.B. die Richtung zum Perizentrum angibt)
- Form des Kegelschnitts
 a und e bzw. p und $e=1$

:

- Zeitpunkt t_0 eines Perizentrums-Durchgangs
- ⇒ Berechnung des Ortes zu jeder Zeit t möglich.
("Ephemeriden-Berechnung")

Bahnbestimmung

- ≙ das inverse Problem, d.h. Bestimmung der Bahnelemente aus Ortsmessungen.
- sehr schwierig, da i.A. die geozentrische Entfernung unbekannt (nur Richtung = 2 Winkel an der Himmelshugel wird gemessen!)
 - im Prinzip genügen 3 Beobachtungen (= 6 Meßgrößen!)
 - klassische Lösungsmethoden von Laplace und Gauss
- Ende des Einschubs zum 2-Körper-Problem -

: