Beweis der Helmholtzschen Wirbelsätze

Norbert Seehafer
Institut für Physik und Astronomie, Universität Potsdam
Karl-Liebknecht-Str. 24/25, 14476 Potsdam, GERMANY

25. Dezember 2024

Zusammenfassung

Herleitungen oder Beweise der Helmholtzschen Wirbelsätze für Flüssigkeitsströmungen in Lehrbüchern sind häufig rudimentär oder rein intuitiv und damit letztlich nicht überzeugend. In diesem Tutorial werden die Wirbelsätze exakt formuliert und mathematisch vollständig bewiesen.

1 Formulierung der Wirbelsätze

1.1 Voraussetzungen

Wir betrachten die Strömung einer reibungsfreien, barotropen Flüssigkeit. Externe Kraftfelder, wenn vorhanden, sollen konservativ sein. Es seien ρ die Massendichte, $\vec{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit, p der Druck, $\vec{f}_{\text{ext}}$ die räumliche Dichte der externen Kräfte und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\,\nabla \tag{1}$$

die Lagrangesche (oder substantielle oder mobile) zeitliche Ableitung. Dann soll die Strömung der Euler-Gleichung

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \vec{f}_{\text{ext}} \tag{2}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} = \vec{0}\,, \quad \nabla \times \frac{\vec{f}_{\text{ext}}}{\rho} = \vec{0} \tag{3}$$

sowie der Gleichung der Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung),

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho\,\nabla\vec{v}\,, \tag{4}$$

genügen.

Die erste der Bedingungen in Gl. (3) definiert die Eigenschaft der Barotropie. Im Spezialfall räumlich homogener Massendichte, $\rho \equiv \rho_0$, ist sie offensichtlich erfüllt, da dann der Faktor $1/\rho$ vor den Operator $\nabla\times$ gezogen werden kann. Hierunter fällt der häufig betrachtete Spezialfall der inkompressiblen Strömung, charakterisiert durch die Bedingung $\nabla\vec{v} = 0$, mit räumlich und dann wegen Gl. (4) auch zeitlich konstanter Dichte.

Die erste der Bedingungen in Gl. (3) ist auch in dem allgemeineren Fall erfüllt, dass ρ räumlich variabel, aber eine Funktion allein des Druckes ist, $\rho = \rho(p)$, denn dann gilt

$$\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{1}{\rho}\nabla \times \nabla p + \nabla\frac{1}{\rho} \times \nabla p = \nabla\frac{1}{\rho} \times \nabla p = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial p}\nabla p \times \nabla p = \vec{0}\,. \qquad (5)$$

Ein Beispiel ist hier der Fall einer polytropen Zustandsgleichung $p = K\rho^\gamma$, wo K und γ Konstanten sind, mit der Umkehrung $\rho = (p/K)^{-\gamma}$. Im Spezialfall eines adiabatischen idealen Gases ist $\gamma = c_\mathrm{p}/c_\mathrm{v}$, das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen.

Ein wichtiges Beispiel für externe Kräfte ist die Gravitation. Es sei $\vec{g}$ die gravitative Beschleunigung (die Stärke des Gravitationsfeldes, die als Kraft pro Masseneinheit definiert wird). Falls weitere externe Kräfte nicht vorhanden sind, ist dann $\vec{f}_\mathrm{ext}/\rho = \vec{g}$ und die zweite der Bedingungen in Gl. (3) ist erfüllt, da die Gravitationsfelder beliebiger Massenverteilungen konservativ sind — das zugehörige Gravitationspotential U (so dass $\vec{g} = -\nabla U$) kann aus der Poisson-Gleichung $\Delta U = 4\pi G\rho$, wo G die Gravitationskonstante ist, bestimmt werden. Im Falle der näherungsweise als räumlich konstant angenommenen Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche ist die Erfülltheit der Bedingung $\nabla \times (\vec{f}_\mathrm{ext}/\rho) = \nabla \times \vec{g} = \vec{0}$ offensichtlich.

Die durch Gl. (1) definierte Lagrangesche Zeitableitung ist die totale zeitliche Ableitung entlang der Bahn eines mit der Strömung bewegten Flüssigkeitsteilchens. In der Lagrangeschen Betrachtung wird die Position $\vec{x}$ eines Flüssigkeitsteilchens als Funktion seiner Anfangsposition $\vec{x}_0$ aufgefasst, mit der Zeit t als Parameter, also $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t)$. Der Index 0 bezeichnet Anfangswerte ($t = 0$). Wir fassen die Abbildungen der Anfangspositionen auf die aktuellen Positionen als Diffeomorphismen auf, d.h., jede dieser Abbildungen (zu einer festen Zeit t) soll eindeutig umkehrbar (bijektiv) und einschließlich ihrer Inversen stetig differenzierbar (bezüglich $\vec{x}_0$ bzw. $\vec{x}$) sein. Zusätzlich soll auch $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ bezüglich des Parameters t stetig differenzierbar sein.

Aus der angenommenen Stetigkeit der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen folgt:
(i) Von Flüssigkeitsteilchen gebildete Kurven bzw. Flächen bleiben Kurven bzw. Flächen.
(ii) Zusammenhängende Flüssigkeitsvolumina bleiben zusammenhängend.
(iii) Die Oberfläche (der Rand) eines Flüssigkeitsvolumens bleibt Oberfläche (Rand); innere Flüssigkeitsteilchen bleiben im Inneren.

Die Wirbelstärke oder Vortizität wird durch

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} \qquad (6)$$

definiert. Durch Anwendung des Operators $\nabla\times$ auf Gl. (2) unter Berücksichtigung der Bedingungen in Gl. (3) sowie der Vektoridentität

$$\frac{1}{2}\nabla\vec{v}^2 = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v}\nabla)\vec{v} \tag{7}$$

erhalten wir die Wirbelgleichung

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega})\,. \tag{8}$$

In diesem Tutorial werden Vektoren als Spaltenvektoren bzw. als Matrizen mit nur einer Spalte aufgefasst. Ihre Transponierten, gekennzeichnet durch den hochgestellten Buchstaben t, sind dann Zeilenvektoren bzw. Matrizen mit nur einer Zeile. In Komponentenschreibweise werden wiederholt der Kronecker-Tensor

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } i = j \\ 0\,, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \tag{9}$$

und der Levi-Civita-Tensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } (i,j,k) \text{ gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1\,, & \text{falls } (i,j,k) \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0\,, & \text{falls zwei der Indizes } i,j,k \text{ gleich sind} \end{cases} \tag{10}$$

verwendet und gemäß der Einsteinschen Summenkonvention wird über doppelt auftretende Indizes implizit summiert.

1.2 Erster Satz

Die Feldlinien von $\vec{\omega}$ werden als Wirbellinien bezeichnet. Jede Wirbellinie definiert eine Materialkurve (einen Flüssigkeitsfaden), gebildet aus Flüssigkeitsteilchen, die längs dieser Wirbellinie angeordnet sind.

Der erste Helmholtzsche Wirbelsatz lautet: Die Flüssigkeitsteilchen, die zu einem Zeitpunkt längs einer Wirbellinie angeordnet sind (eine mit einer Wirbellinie zusammenfallende Materialkurve bilden), behalten diese Eigenschaft; die Wirbellinien sind „materialisiert“, „bleiben erhalten“, sind „in die Flüssigkeit eingefroren“, „bewegen sich mit der Flüssigkeit“.

Diese Erhaltung der Wirbellinien überträgt sich unmittelbar auf die als Wirbelröhren bezeichneten Flussröhren von $\vec{\omega}$, definierbar als Bündel von Wirbellinien, die ein Flächenstück kreuzen, zu dem $\vec{\omega}$ nirgendwo tangential ist; dass $\vec{\omega}$ dann, wenn das Flächenstück mit der Strömung bewegt wird, nicht-tangential bleibt, wird durch den zweiten Wirbelsatz (siehe Abschnitt 1.3) gesichert.

1.3 Zweiter Satz

Es sei C eine von Flüssigkeitsteilchen gebildete geschlossenen Kurve. Das Linienintegral

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{x} \tag{11}$$

heißt Zirkulation längs C. Nach dem Satz von Stokes gilt auch

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega}\,\mathrm{d}\vec{S}\,, \tag{12}$$

wo S eine beliebige von C aufgespannte Fläche (ein Flächenstück mit der Randkurve C) ist.

Der zweite Wirbelsatz lautet

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0\,. \tag{13}$$

Die Zirkulation längs einer mit der Flüssigkeit bewegten geschlossenen Kurve bleibt also erhalten. Gemäß Gl. (12) ist das äquivalent dazu, dass der Fluss von $\vec{\omega}$ durch ein mit der Flüssigkeit bewegtes Flächenstück erhalten bleibt

Dieser zweite Helmholtzsche Wirbelsatz ist auch als Kelvin's Theorem bekannt.

2 Geschwindigkeits- und Deformationsgradienten

Es seien V die Geschwindigkeitsgradienten-Matrix,

$$V_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,, \tag{14}$$

und J die Deformatiosgradienten-Matrix,

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}\,. \tag{15}$$

J ist die Jacobi-Matrix der Abbildung $\vec{x}_0 \to \vec{x}$. Da diese Abbildung invertierbar ist, kann die Determinante von J nicht verschwinden, also ihr Vorzeichen nicht wechseln. Gleichzeitig gilt

$$J_{ij} = \delta_{ij}, \quad \det(J) = 1 \quad \text{für } t = 0\,. \tag{16}$$

Daraus folgt

$$0 < \det(J) < \infty\,. \tag{17}$$

Für die Lagrangesche Zeitableitung von J erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial}{\partial x_{0j}}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_{0j}} = V_{ip}J_{pj}\,, \tag{18}$$

also

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = VJ\,. \tag{19}$$

Unter Verwendung von

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(JJ^{-1}) = \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}J^{-1} + J\frac{\mathrm{d}J^{-1}}{\mathrm{d}t} = VJJ^{-1} + J\frac{\mathrm{d}J^{-1}}{\mathrm{d}t} = V + J\frac{\mathrm{d}J^{-1}}{\mathrm{d}t} \tag{20}$$

findet man weiterhin

$$\frac{\mathrm{d}J^{-1}}{\mathrm{d}t} = -J^{-1}V\,. \tag{21}$$

3 Infinitesimale Linien-, Flächen- und Volumenelemente

3.1 Infinitesimales Linienelement

Die Lagrangesche Änderung eines Linienelementes $\mathrm{d}\vec{x}$ findet man, indem man das totale Differential der Funktion $\vec{x}(\vec{x}_0)$ zu einem festen Zeitpunkt bildet, nämlich

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \mathrm{d}x_{0j} \tag{22}$$

bzw.

$$\mathrm{d}\vec{x} = J \mathrm{d}\vec{x}_0 \,. \tag{23}$$

3.2 Infinitesimales Flächenelement

Das orientierte Flächenelement $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ werde durch die Linienelemente $\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}$ und $\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}$ aufgespannt,

$$\mathrm{d}\vec{\sigma} = \mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \times \mathrm{d}\vec{x}^{(2)} = J \mathrm{d}\vec{x}_0^{(1)} \times J \mathrm{d}\vec{x}_0^{(2)} \,. \tag{24}$$

In Komponentenschreibweise ergibt das

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_i &= \varepsilon_{ijk} \left(J \mathrm{d}\vec{x}_0^{(1)} \right)_j \left(J \mathrm{d}\vec{x}_0^{(2)} \right)_k \\
&= \varepsilon_{ijk} J_{jn} \mathrm{d}x_{0n}^{(1)} J_{km} \mathrm{d}x_{0m}^{(2)} \\
&= \delta_{il} \varepsilon_{ljk} J_{jn} \mathrm{d}x_{0n}^{(1)} J_{km} \mathrm{d}x_{0m}^{(2)} \\
&= \left(J^{\mathrm{t}} \right)_{ip}^{-1} J_{pl}^{\mathrm{t}} \varepsilon_{ljk} J_{jn} \mathrm{d}x_{0n}^{(1)} J_{km} \mathrm{d}x_{0m}^{(2)} \\
&= \left(J^{\mathrm{t}} \right)_{ip}^{-1} \varepsilon_{ljk} J_{lp} J_{jn} J_{km} \mathrm{d}x_{0n}^{(1)} \mathrm{d}x_{0m}^{(2)} \\
&= \left(J^{\mathrm{t}} \right)_{ip}^{-1} \det(J) \varepsilon_{pnm} \mathrm{d}x_{0n}^{(1)} \mathrm{d}x_{0m}^{(2)} \,,
\end{aligned} \tag{25}$$

was sich in Vektorschreibweise in der Form

$$\mathrm{d}\vec{\sigma} = \det(J) \left(J^{-1} \right)^{\mathrm{t}} \mathrm{d}\vec{\sigma}_0 \tag{26}$$

zusammenfassen lässt.

3.3 Infinitesimales Volumenelement

Ein infinitesimales Volumenelement schließlich werde durch die drei Linienelemente $\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}$, $\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}$ und $\mathrm{d}\vec{x}^{(3)}$ aufgespannt, die in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden sollen. Ihr Spatprodukt ergibt den Inhalt $\mathrm{d}\mathcal{V}$ des Volumenelementes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathcal{V} &= \left(\mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \times \mathrm{d}\vec{x}^{(2)} \right)^{\mathrm{t}} \mathrm{d}\vec{x}^{(3)} \\
&= \mathrm{d}\vec{\sigma}^{\mathrm{t}} \mathrm{d}\vec{x}^{(3)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det(J)\mathrm{d}\vec{\sigma}_0^{\mathrm{t}} J^{-1} J \mathrm{d}\vec{x}_0^{(3)} \\
&= \det(J)\,\mathrm{d}\mathcal{V}_0
\end{aligned} \tag{27}
$$

Für die Massendichte ρ folgt

$$
\rho = \frac{\rho_0}{\det(J)}\,. \tag{28}
$$

4 Transportgleichung für $\vec{\omega}/\rho$

Aus der Wirbelgleichung für eine reibungsfreie und barotrope Strömung, Gl. (8), in Kombination mit der Gleichung der Massenerhaltung, Gl. (4), findet man unter Verwendung einer Substitution der Lagrangeschen Zeitableitung gemäß Gl. (1) sowie der Vektoridentität

$$
\nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = (\vec{\omega}\nabla)\vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{\omega} + \vec{v}(\nabla\vec{\omega}) - \vec{\omega}(\nabla\vec{v}) \tag{29}
$$

(der dritte Summand auf der rechten Seite von Gleichung (29) verschwindet, da $\nabla\vec{\omega} = 0$ wegen $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$):

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{\omega}}{\rho} &= \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - \frac{\vec{\omega}}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{\omega}\right) + \frac{\vec{\omega}}{\rho}\nabla\vec{v} \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + (\vec{v}\nabla)\vec{\omega}\right) + \frac{\vec{\omega}}{\rho}\nabla\vec{v} \\
&= \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\nabla\right)\vec{v}
\end{aligned} \tag{30}
$$

Aus den Gleichungen (21) und (30) folgt

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J^{-1}\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = -J^{-1}V\frac{\vec{\omega}}{\rho} + J^{-1}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\nabla\right)\vec{v}\,, \tag{31}
$$

woraus sich unter Beachtung von

$$
\left[\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\nabla\right)\vec{v}\right]_i = \frac{\omega_j}{\rho}\nabla_j v_i = \frac{\omega_j}{\rho}V_{ij} = \left[V\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right]_i \tag{32}
$$

die Beziehung

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J^{-1}\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \vec{0} \tag{33}
$$

ergibt, die sich in

$$
J^{-1}\frac{\vec{\omega}}{\rho} = J^{-1}(t=0)\frac{\vec{\omega}_0}{\rho_0} \tag{34}
$$

und, wegen $J^{-1}(t=0)_{ij} = \delta_{ij}$, schließlich in

$$
\frac{\vec{\omega}}{\rho} = J\frac{\vec{\omega}_0}{\rho_0} \tag{35}
$$

umformen lässt. Die Wirbelsätze lassen sich aus Gleichung (35) unter Zuhilfenahme der Beziehungen aus Abschnitt 3 herleiten.

5 Herleitung der beiden Helmholtzschen Wirbelsätze aus der Transportgleichung für $\vec{\omega}/\rho$

5.1 Erster Satz: Erhaltung der Wirbellinien

Die Erhaltung der $\vec{\omega}$-Linien folgt unmittelbar aus dem Vergleich der Gln. (23) und (35). Bei der Bewegung mit der Strömung werden $\mathrm{d}\vec{x}$ und $\vec{\omega}/\rho$ mit der selben Matrix (J) transformiert. Wenn $\mathrm{d}\vec{x}$ und $\vec{\omega}$ anfänglich parallel waren, bleiben sie parallel. Ein mitbewegter Flüssigkeitsfaden, der anfänglich mit einer $\vec{\omega}$-Linie zusammenfällt, tut das auch zu allen späteren (und früheren) Zeiten.

5.2 Zweiter Satz: Erhaltung des Flusses von $\vec{\omega}$ durch mitbewegte Flächen

Für den Fluss von $\vec{\omega}/\rho$ durch ein mitbewegtes Flächenelement ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{t}}\frac{\vec{\omega}}{\rho} &= \det(J)\mathrm{d}\vec{\sigma}_0^{\mathrm{t}}J^{-1}J\frac{\vec{\omega_0}}{\rho_0} \\ &= \det(J)\mathrm{d}\vec{\sigma}_0^{\mathrm{t}}\frac{\vec{\omega_0}}{\rho_0} \\ &= \frac{1}{\rho}\mathrm{d}\vec{\sigma}_0^{\mathrm{t}}\vec{\omega_0}\,, \end{aligned} \tag{36}$$

woraus nach Multiplikation mit ρ

$$\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{t}}\vec{\omega} = \mathrm{d}\vec{\sigma}_0^{\mathrm{t}}\vec{\omega_0} \tag{37}$$

folgt, was zu beweisen war.

6 Magnetohydrodynamische Analogie: Das eingefrorene Magnetfeld

Die betrachtete Flüsigkeit sei nun elektrisch leitend. Sie braucht nicht mehr barotrop zu sein, und auch über ihre Viskosität sowie externe Kräfte werden keine Annahmen gemacht.

Wir betrachten den Grenzfall der nicht-relativistischen idealen Magnetohydrodynamik (MHD):
(i) Die auftretenden Geschwindigkeiten sind klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, $|\vec{v}| \ll c$; dann kann der Maxwellsche Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden.
(ii) Die elektrische Leitfähigkeit σ ist unendlich hoch; dann verschwindet die magnetische Diffusivität $1/(\mu_0\sigma)$ (analog zum Verschwinden der Wirbeldiffusion in einer reibungsfreien Strömung).

Für das Magnetfeld (genauer: die magnetische Induktion) $\vec{B}$ gilt dann

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})\,, \quad \nabla \vec{B} = 0\,. \tag{38}$$

Aus zu Gl. (38) analogen Beziehungen für die Wirbelstärke $\vec{\omega}$, nämlich der Wirbelgleichung, Gl. (8) und $\nabla\vec{\omega} = 0$ wurden, in Kombination mit der Gleichung der Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung), die beiden Helmholtzschen Wirbelsätze hergeleitet, wobei von der Beziehung $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ kein expliziter Gebrauch gemacht wurde; lediglich $\nabla\vec{\omega} = 0$ wurde verwendet. Analog zu den Wirbelsätzen gilt daher:
(i) Ein Flüssigkeitsfaden, der mit einer magnetischen Feldlinie übereinstimmt, behält diese Eigenschaft; „die magnetischen Feldlinien bleiben erhalten“. Diese Eigenschaft überträgt sich wiederum unmittelbar auf magnetische Flussröhren.
(ii) Der Fluss von $\vec{B}$ durch ein mit der Flüssigkeit bewegtes Flächenstück bleibt erhalten.
(i) und (ii) zusammenfassend sagt man, das Magnetfeld sei in die Flüssigkeit „eingefroren“.