Nichtlineare Dynamik in der Physik: Forschungsbeispiele und Forschungstrends

Jürgen Kurths, Norbert Seehafer und Frank Spahn

Institut für Physik, Max-Planck-Arbeitsgruppe für Nichtlineare Dynamik, Universität Potsdam, PF 601553, D–14415 Potsdam, Germany, e-mail: jkurths@agnld.uni-potsdam.de

1 Einleitung

Nichtlineare Prozesse sind in Natur, Technik und Gesellschaft weit verbreitet. Bei der Untersuchung dieser Phänomene gibt es heute schon große Fortschritte, die sich aber hauptsächlich auf Systeme mit wenigen Freiheitsgraden (niedrigdimensionale Systeme) beziehen. Reale komplexe Systeme sind allerdings im allgemeinen hochdimensional; typische Beispiele dafür finden sich in den Erdund Umweltwissenschaften oder der Astrophysik. Schwerpunkt sind dabei Fragestellungen zu kritischen Phänomenen, z.B. Klima-relevante Variationen der Sonnenaktivität oder die Vorhersagbarkeit starker Erdbeben. Diese natürlichen Systeme, die meist fernab vom thermodynamischen Gleichgewicht sind, zeichnen sich durch vielfältige komplexe Rückkopplungen und reichhaltige Dynamik in einem breitbandigen Spektrum raumzeitlichen Verhaltens aus; sie sind eine besondere Herausforderung für die Nichtlineare Dynamik.

Das für niedrigdimensionale Systeme entwickelte Instrumentarium, wie etwa Bifurkationsanalyse oder Charakteristik mittels fraktaler Dimensionen, läßt sich nicht einfach auf die Analyse derartiger großskaliger natürlicher Systeme übertragen. Im Unterschied zu Laborexperimenten, in denen die experimentellen Bedingungen weitgehend kontrollierbar sind, ergeben sich bei Messungen natürlicher Systeme zusätzliche Schwierigkeiten. Besonders hervorzuheben ist dabei, daß derartige Messungen nicht unter gleichen Bedingungen wiederholt werden können und daß es sich häufig um Beobachtungen transienter Phänomene handelt.

Im folgenden zeigen wir an einigen Beispielen, wie derartige komplexe Prozesse untersucht werden. Zunächst werden Strukturbildungsphänomene in magnetohydrodynamischer Turbulenz, wie sie in großskaligen kosmischen Magnetfeldern, z.B. im Zusammenhang mit der Sonnenaktivität, entstehen, diskutiert. Die Dynamik und Kinetik planetarer Ringe, deren Strukturreichtum durch die Experimente der Voyager-Raumsonden aufgedeckt wurde, steht im Mittelpunkt des darauffolgenden Abschnittes. Schließlich wird auf die Vorhersagbarkeit von Erdbeben eingegangen.

2 Kontinuierliche dynamische Systeme und astrophysikalischer Magnetismus

Abbildung 1 zeigt eine Röntgenaufnahme der Sonne. Erhöhte Emission (helle Regionen) ist dort zu erkennen, wo verstärkt magnetische Energie in Plasmaenergie (Wärme) umgewandelt wird.



Abb. 1. Die Sonne im weichen Röntgenlicht, am 8. Mai 1992 vom Satelliten YOHKOH aus aufgenommen. Plasma mit Temperaturen über einer Million Grad Kelvin ist sichtbar. Erhöhte Strahlungsintensität läßt Regionen (weiß-gelb) mit starken Magnetfeldern erkennen und gibt dort die Topologie bogenartiger, in tieferen Schichten verankerter magnetischer Feldlinien wieder

Alle Formen der Sonnenaktivität verdanken ihre Existenz dem variablen solaren Magnetismus. Der 22-jährige Sonnenfleckenzyklus wird durch einen im Innern der Sonne (in der Konvektionszone) arbeitenden Dynamo verursacht. Die meisten der energetischen Erscheinungen in den äußeren Schichten der Sonne, in die wir hineinsehen können, sind Manifestationen der Freisetzung magnetischer Energie. Weiterhin liefert das Magnetfeld das Verbindungsglied zwischen den verschiedenen Aktivitätserscheinungen, wie z.B. Flecken und Eruptionen. Folglich ist ein wesentlicher Teil der Sonnenforschung auf Magnetfelder konzentriert. Den theoretisch-physikalischen Rahmen zum Verständnis der grundlegenden Erscheinungen der Sonnenaktivität liefert die **Magnetohydrodynamik** (MHD), die physikalische Theorie elektrisch leitender Flüssigkeiten.

Die turbulente Bewegung einer Flüssigkeit, ob elektrisch leitend oder nicht, ist ein herausragendes Beispiel komplexen Verhaltens in einem räumlich kontinuierlichen, also unendlich-dimensionalen System und stellt eines der fundamentalen Probleme der Physik dar. Es ist üblich geworden, Turbulenz als Synonym für einen hochangeregten Zustand in einem System mit vielen Freiheitsgraden, zumeist ein kontinuierliches Medium, zu gebrauchen. Voll entwik-

54 J. Kurths, N. Seehafer und F. Spahn

kelte Turbulenz kann im allgemeinen nur statistisch, ohne explizite Lösung der maßgeblichen Gleichungen, behandelt werden.

Im Gegensatz zu endlich-dimensionalen Systemen werden räumlich kontinuierliche Systeme durch partielle Differentialgleichungen (PDE) beschrieben, und ihr Phasenraum ist ein Funktionenraum. Bislang gibt es nur wenige allgemeine mathematische Aussagen über das qualitative Verhalten dynamischer Systeme, die auf Funktionenräumen definiert sind. Theoretische Untersuchungen beschränken sich zumeist auf lineare Stabilitätsuntersuchungen stationärer Zustände bzw. auf numerische Simulationen einzelner System-Trajektorien. Letztere können sehr nützlich sein und z.B. auch die Charakterisierung von Attraktoren erlauben. Damit bezeichnet man Zustände des Systems, die nach langer Zeit (zeitasymptotisch) realisiert werden. Dennoch können Simulationen stets nur partielle Einblicke in die Gesamtstruktur der Lösungsmenge liefern. Ein übergeordnetes Ziel bei der Untersuchung räumlich kontinuierlicher Systeme ist die qualitative Analyse. Mit ihr werden alle möglichen Attraktoren des Systems bestimmt, ihre Einzugsbereiche im Phasenraum ermittelt und die bei Variation charakteristischer, extern vorgegebener Systemparameter auftretenden Bifurkationen berechnet. Als Bifurkationen bezeichnet man die qualitativen Veränderungen der Attraktoren, einschließlich ihres Entstehens oder Verschwindens.

Während voll entwickelte Turbulenz bisher noch eine statistische Beschreibung erfordert, können Methoden der Bifurkationsanalyse benutzt werden, den **Übergang** von laminaren zu turbulenten Zuständen zu erforschen. Eine realistische Modellierung etwa der Vorgänge auf der Sonne erfordert die Untersuchung des vollen nichtlinearen Systems der partiellen Differentialgleichungen der MHD, die zudem noch nichtlinear mit thermodynamischen Gleichungen verkoppelt sind. An die Lösung eines derartig komplexen Problems kann man sich nur schrittweise heranarbeiten. In den folgenden Abschnitten wird auf Untersuchungen stärker abgegrenzter und daher einfacherer, aber immer noch sehr komplizierte Probleme eingegangen.

2.1 Extern getriebene Wirbelströmungen

Wir beginnen mit der Beschreibung von Untersuchungen, die durch Laborexperimente motiviert sind, welche großskalige Strukturbildung zeigen [39] [7]. Im Experiment wird in einer dünnen Schicht einer Elektrolytlösung mittels externer Permanentmagnete in Kombination mit einem durch die Lösung geleiteten elektrischen Strom ein Feld von Strömungswirbeln angetrieben. Es werden die qualitativen Veränderungen der Strömung bei Veränderung der elektrischen Stromstärke, d.h. Veränderung der Reynoldszahl (der Stärke des externen Antriebes der Strömung), untersucht. Die beobachteten Erscheinungen können mittels der zweidimensionalen (2D) Navier-Stokes-Gleichung mit äußerer Kraft modelliert werden [4]. Die Navier-Stokes-Gleichung ist die Bewegungsgleichung für Flüssigkeiten. In ersten Untersuchungen beschränkten wir uns auf die Betrachtung periodischer horizontaler Randbedingungen und analysierten das dynamische Langzeitverhalten in Abhängigkeit von der Reynoldszahl. Es zeigt sich, daß die Symmetrie des Systems, die durch die äußere Kraft (das sogenannte Forcing)

Nichtlineare Dynamik in der Physik 55

und die periodischen Randbedingungen bestimmt wird, einen wesentlichen Einfluß auf das Bifurkationsverhalten hat. In einer ersten Bifurkation spaltet eine zeitunabhängige stabile Lösung, bestehend aus 8×8 Wirbeln, in sechzehn koexistierende instabile Zustände auf, die in einem heteroklinen Zyklus verbunden sind. Letzteres bedeutet, daß diese Lösungen im Verlaufe der Zeit nacheinander zyklisch vom System "besucht" werden. Dieser Zyklus wiederum weicht für höhere Reynoldszahlen chaotischen Zuständen. Für ein starke Anregung wurde eine **inverse Energiekaskade**, die großskalige Strukturen bildet, beobachtet (Abb. 2). Bei direkten Kaskaden wird Energie von großen zu kleinen räumlichen Skalen transferiert, bei inversen Kaskaden in umgekehrter Richtung.



Abb. 2. Inverse Energiekaskade von kleinen zu großen Skalen in der 2D Navier-Stokes-Gleichung. Bei kleinen Reynoldszahlen entsteht ein Gitter entgegengesetzt rotierender kleiner Wirbel, die exakt das externe Forcing widerspiegeln (*links*). Bei höheren Reynoldszahlen erzeugt dasselbe kleinskalige Forcing großskalige Wirbel (*rechts*)

Die Gesamtdynamik in diesem Bereich wird durch mehrere parallel existierende Lösungszweige mit stationären, periodischen, quasi-periodischen und chaotischen Lösungen bestimmt (und nur einer der Zweige zeigt die inverse Energiekaskade).

Für den Parameterbereich, in dem die großskaligen Strukturen auftreten, wurden auch die Bahnen von Flüssigkeitsteilchen (Lagrangesche Dynamik) studiert. Ziel war es, Kriterien und quantitative Maße zu finden, die die Lagrangesche Dynamik mit der des Geschwindigkeitsfeldes im Phasenraum in Verbindung setzten. Das heißt, wir wollten verschiedene Regimes des Geschwindigkeitsfeldes, wie z.B. periodische Lösungen im Gegensatz zu Chaos, mittels der Lagrangeschen Bewegung von Testteilchen unterscheiden. In den numerischen Experimenten wurden Linienelemente, bestehend aus passiven Testteilchen, in die Flüssigkeit injiziert und deren Entwicklung verfolgt. Der Mischungsprozeß ist eine sukzessive Folge von Streckungen und Faltungen, die durch einen Streckungskoeffizienten und eine Hausdorff-Dimension quantifiziert werden können. Diese Maße zeigen für verschiedene Lösungszweige signifikante Unterschiede der Lagrangeschen Turbulenz [4].

56 J. Kurths, N. Seehafer und F. Spahn

Abbildung 3 zeigt eine schon nach kurzer Zeit erfolgte Durchmischung von verschieden Flüssigkeitsbereichen im Ortsraum für eine Flüssigkeit mit sogenannter Kolmogorov-Anregung.



Abb. 3. Mischung farbiger Tracerteilchen (rot und blau) durch das Strömungsfeld, erzeugt durch Simulation der Navier-Stokes-Gleichung mit Kolmogorov-Anregung

Für diesen Fall haben wir das Lösungsverhalten mit ähnlicher Methodik wie im Beispiel der Wirbelanregung untersucht [12] [13]. Die durch dieses Forcing angetriebene Scherströmung ist nur bei hinreichend schwachem Antrieb stabil [31] [46].

Das wesentliche Ergebnis unserer Untersuchungen ist ein Bifurkationsdiagramm, welches den Übergang ins Chaos detailliert erklärt. Dieser führt über mehrere Zweige von Gleichgewichtslösungen, laufenden Wellen, modulierten laufenden Wellen, quasi-periodischen Lösungen (sogenannte Tori mit mehreren (in diesem Falle zwei) inkommensurablen Frequenzen) und periodischen Bewegungen. Die Entstehung der fortschreitenden Wellen ist auf eine Translationssymmetrie des Systems zurückzuführen.

2.2 3D Magnetohydrodynamik und Dynamo-Effekt

Von besonderem Interesse im Hinblick auf solare und andere kosmische Aktivitätserscheinungen sind die dreidimensionalen inkompressiblen MHD-Gleichungen. Eines der Ziele bei ihrer Untersuchung ist die Lösung des Dynamo-Problems [26] der kosmischen Magnetfelder. Wichtig für das Leben auf der Erde ist die abschirmende Wirkung des Erdmagnetfeldes. Auch die durch Magnetfelder verursachte Aktivität der Sonne beeinflußt unseren Lebensraum unmittelbar. Somit ist die Kenntnis der Entstehung und Dynamik von Magnetfeldern von großer Bedeutung.

Die sogenannten **ABC-Strömungen** (benannt nach Arnold, Beltrami und Childress) erzeugen ein wachsendes Magnetfeld im Rahmen der kinematischen Dynamo-Theorie, in der das Geschwindigkeitsfeld vorgegeben wird und die Bewegungsgleichung der Flüssigkeit unberücksichtigt bleibt [19]. Die ABC-Strömungen, Überlagerungen dreier zueinander orthogonaler schraubenförmiger Bewegungen, sind exakte Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung, wenn eine spezielle Anregung, das ABC-Forcing, wirkt, das die Reibungsverluste gerade kompensiert. Für diesen Fall haben wir das vollständige System der MHD-Gleichungen, mit der Reynoldszahl (bzw. der Stärke der Anregung) als Bifurkationsparameter, untersucht [14] [16] [37].

Es wurde ein isotropes Abschneiden im Wellenzahlraum angewandt, wobei die wahre Lösung durch eine Summe von Wellen verschiedener Wellenlänge approximiert wird. Das "Abschneiden" entspricht dann physikalisch der Vernachlässigung von Fluktuationen auf sehr kleinen räumlichen Skalen.

In den meisten Berechnungen wurde dabei ein System von 712 gewöhnlichen Differentialgleichungen untersucht, wobei diese Zahl sich aus der Anzahl der Wellen ergibt, die die Lösung repräsentieren sollen. Um nun den Einfluß des Abschneidens auf das Lösungsverhalten festzustellen, wurden auch Testrechnungen mit bis zu 14776 Gleichungen durchgeführt, die belegen, daß das 712-dimensionale System das Lösungsverhalten qualitativ richtig wiedergibt.

Zudem wurden nichtlineare Galerkin-Verfahren benutzt. Das sind numerische Verfahren, die zum Studium des Langzeitverhaltens bestimmter dissipativer partieller Differentialgleichungen im Zusammenhang mit der Theorie der Inertialmannigfaltigkeiten und approximierenden Mannigfaltigkeiten eingeführt wurden [30]. Das wesentliche Ziel bei der Anwendung dieser Verfahren ist es, sehr komplizierte nichtlineare Gleichungen hoher (unendlicher) Dimension durch niedrigdimensionale Gleichungen zu charakterisieren, ohne daß dabei die qualitativen Eigenschaften des hochdimensionalen Systems verlorengehen. Die aktiven Moden des nichtlinearen Galerkin-Verfahrens wurden als Lösung eines endlichen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems berechnet, während der Einfluß der restlichen Moden durch eine Versklavungsfunktion (approximierende Mannigfaltigkeit) berücksichtigt wurde [36]. Das ist ein Fortschritt gegenüber dem einfachen "Abschneiden".

Die Bifurkationsanalyse verschiedener Näherungen ergab, daß die primäre nichtmagnetische Gleichgewichtslösung (die ABC-Strömung) in einer Hopf-Bifurkation instabil wird und in eine periodische Lösung mit Magnetfeld übergeht, was einem **generischen Dynamo-Effekt** entspricht. In den nachfolgenden Bifurkationen wird die ursprüngliche Symmetrie, die mit der ABC-Anregung zusammenhängt, sukzessive gebrochen und über Toruslösungen ein chaotischer Zustand erreicht, der weiterhin ein Magnetfeld trägt (Abb. 4).

Eine große Rolle bei der Strukturbildung raum-zeitlicher Prozesse spielt die Symmetrie eines Problems. Es zeigen sich Ähnlichkeiten in der Entwicklung verschiedenster Systeme, selbst wenn die zugrundeliegenden Prozesse unterschiedlichen Evolutionsgleichungen genügen.



Abb. 4. Schematisches Bifurkationsdiagramm für die MHD-Gleichungen mit ABC-Anregung. "3 branches" bzw. "4 branches" bedeutet, daß 3 bzw. 4 koexistierende Lösungen durch gewisse Symmetrietransformationen ineinander überführt werden können

Die Analyse der Symmetrien führt zu qualitativen Aussagen über die auftretenden Lösungen. Die MHD-Gleichungen mit ABC-Forcing besitzen die Symmetrie eines Würfels [1]. Dies ist auch die Symmetriegruppe der ursprünglichen nichtmagnetischen Lösung. Zudem konnten wir auch für die periodischen magnetischen Lösungen die Symmetriegruppen bestimmen (das sind Untergruppen der Würfelgruppe) und die zugehörigen generischen Bifurkationen untersuchen.

Es ist eines der wesentlichen Resultate der traditionellen kinematischen Dynamo-Theorie [26], daß **Helizität** des Geschwindigkeitsfeldes den Dynamo-Effekt zumindest begünstigt. Ein Vektorfeld hat Helizität, wenn seine Feldlinien einen bevorzugten Schraubensinn (Linksschraube oder Rechtsschraube) aufweisen.

Deshalb haben wir den Einfluß der Helizität auf den Dynamo-Effekt genauer untersucht. Um den Grad der Helizität variieren zu können, haben wir eine modifizierte, verallgemeinerte Anregung verwandt, welche das ursprüngliche ABC-Forcing als Spezialfall maximaler Helizität enthält [15]. Nur wenn die (mittlere) Helizität einen bestimmten Schwellwert überschreitet, führt eine Hopf-Bifurkation zu magnetischen Lösungen. Wenn dagegen die Helizität unter diesem Schwellwert liegt, sind alle neuen Lösungen, darunter auch chaotische, nicht-magnetisch. Dieses Bifurkationsverhalten bestätigt das Ergebnis der traditionellen kinematischen Dynamo-Theorie, daß Helizität eine wesentliche Rolle für die Entstehung von kosmischen Magnetfeldern spielt. Durch die Rotation der Himmelskörper entsteht sie auf natürliche Weise.

Der Grundmechanismus bei der Umwandlung kinetischer in magnetische Energie im Dynamo-Effekt ist die Streckung von Flüssigkeits-Linienelementen. Darauf aufbauend kann z.B. mittels numerischer Simulation und Berechnung geeigneter Entropien und Lyapunov-Exponenten (im dreidimensionalen Ortsraum) die Dynamo-Effektivität vorgegebener turbulenter Strömungen abgeschätzt werden [3]. Wie die dabei gefundenen Maße mit der Helizität der Strömung zusammenhängen, bleibt noch zu klären.

In einer kürzlich durchgeführten weiteren Bifurkationsuntersuchung der MHD-Gleichungen verwenden wir an Stelle des ABC-Forcings eine Anregung (die sogenannte Roberts-Anregung), welche ein Feld konvektionsartiger Rollen antreibt [34]. Eine derartige Strömung kann als Modell der Konvektion im äußeren Erdkern angesehen werden, und es wird zur Zeit an Experimenten gearbeitet, die solche Strömungen nachbilden und darauf abzielen, einen Dynamo-Effekt im Labor nachzuweisen [44].

Direkte Bifurkationsanalysen der MHD-Gleichungen, wie die soeben beschriebene, erfordern noch zahlreiche Idealisierungen, und die erreichbaren Reynoldszahlen sind um Größenordungen geringer als etwa die auf der Sonne vorherrschenden. Deshalb sind zur Erklärung der beobachteten langfristigen Variation der Sonnenaktivität wie auch des Erdmagnetismus Modellbildungen im Rahmen der Dynamo-Theorie gemittelter Felder [26] geeigneter. In dieser Theorie wird das mittlere Magnetfeld durch differentielle Rotation und turbulente Konvektion erzeugt, wobei letztere eine mittlere kinetische Helizität aufweisen muß. Wir untersuchten ein speziell zur Beschreibung des aperiodischen langfristigen Verhaltens der Sonnenaktivität entwickeltes niedrigdimensionales Modell, das aus den maßgeblichen partiellen Differentialgleichungen mittels eines Modenansatzes, der nur die ersten sieben Moden enthält, abgeleitet wurde. Das qualitative Verhalten dieses Modellsystems wurde numerisch mit Hilfe des Programmsystems CANDYS/QA [17] untersucht. In Abhängigkeit von charakteristischen Parametern zeigt das Modell periodisches, quasi-periodisches (auf Tori T^2 und T^3 , die Hochindizes stehen für zwei bzw. drei inkommensurable Frequenzen) und chaotisches Verhalten [18]. Zum Vergleich des Modells mit Beobachtungen der Sonnenaktivität siehe Abschn. 2.3.

2.3 Langzeitvariabilität der Sonne

Die Sonnenaktivität zeichnet sich durch ausgeprägte zeitliche Variationen in einem breiten Bereich von Zeitskalen aus. Wir wissen heute, daß dieser Bereich zumindest Mikrosekunden bis einige hundert Jahre umfaßt. Für die säkularen Variationen gibt es keine direkten systematischen Beobachtungen. Vielmehr werden sie aus historischen Quellen —insbesondere aus dem ostasiatischen Raum mühevoll erschlossen. Dort wurde sporadisch das Auftreten großer Sonnenflecken dokumentiert. Ein Meilenstein war dabei der Nachweis von 5 sogenannten **großen Minima**. Das sind Epochen mehrerer Jahrzehnte, in denen die Sonnenaktivität drastisch reduziert war (Abb. 5, [10]). Derartige Variationen sind für uns von großer Bedeutung, da sie eine markante Veränderung des Klimas bewirken.

Ein vertiefter Einblick in diese langskalige Dynamik der Sonnenaktivität ist nur aus indirekten Messungen zu erwarten. Dazu gehören insbesondere die Beobachtungen von Polarlichtern und — mehr noch — Isotopenmessungen. Die den



Abb. 5. Beobachtungen zur Sonnenaktivität seit dem Jahre 1000 n. Chr. Der Graph oben links spiegelt die Anzahl historischer Quellen aus dem asiatischen Raum wider, die von Sonnenfleckenbeobachtungen mit bloßem Auge berichten. Die Darstellung rechts daneben zeigt die Jahresmittelwerte für die Sonnenfleckenrelativzahlen. Die Rechteckkurve darunter deutet die Zeiträume der großen Minima an. In der vorletzten Kurve sind die Resultate der Radiokohlenstoff-Messungen (Δ^{14} C) dargestellt, die an den Jahresringen alter Bäume vorgenommen worden sind. Ganz unten ist die Häufigkeit der Erwähnung von Polarlichtern in zeitgenössischen Schriften des europäischen Raumes wiedergegeben. Auffallend ist die Antikorrelation zwischen der Anzahl der beobachteten Sonnenflecken bzw. Polarlichter einerseits und den Meßwerten für den ¹⁴C-Überschuß andererseits

Zeitraum von 7199 v. Chr. bis 1891 n. Chr. umfassende Radiokohlenstoffreihe Δ^{14} C ist für die Ermittlung der Variationen der Sonnenaktivität auf einer Zeitskala von einigen hundert Jahren von besonderer Bedeutung. Untersucht man diese Reihe mit linearen Methoden (Spektralanalyse), läßt sich eine Periode von etwas über 200 Jahren nachweisen [40] [45]. Da die Radiokarbonreihe aber eher aperiodisch fluktuiert, bieten sich nichtlineare Verfahren zur Analyse an. Man findet schnell, daß die klassischen Charakteristika der Nichtlinearen Dynamik, wie Dimensionen oder Lyapunov-Exponenten, aus dieser Reihe nicht schätzbar sind.

Wir haben festgestellt, daß die Rekurrenz-Rate sehr nützlich ist, solche Langzeit-Variationen zu erfassen. Sie gibt an, wie häufig das System einen bestimmten Bereich im Zustandsraum besucht – oder kurz, wie oft sich ein Zustand wiederholt. Sie gestattet insbesondere, verschiedene **große Minima** der Sonnenaktivität in der Vergangenheit aufzufinden [29]. Wenn man die Rekurrenz-Rate des gesamten Datensatzes betrachtet, zeigt sich, daß das Auftreten großer Minima ein typisches Phänomen der Sonnenaktivität ist. Die großen Minima der solaren Aktivität sind in ihrer Wiederkehr sehr verschieden. Auffällig ist auch, daß die jüngste Epoche eine große Ähnlichkeit zu jener der mittelalterlichen Warmzeit hat. Um die Frage zu klären, ob der der Δ^{14} C-Reihe zugrundeliegende Prozeß ein durch Rauschen getriebener linearer – oder nichtlinearer Vorgang ist, haben wir die Methode der Ersatzdaten benutzt. Ersatzdaten sind Zeitreihen, die den Originaldatensatz im Hinblick auf bestimmte Eigenschaften repräsentieren. Mit ihrer Hilfe werden statistische Tests aufgebaut, um die Eigenschaften der Originalzeitreihe zu bestimmen. Man erzeugt Zeitreihenersatzdaten durch gezielte Modifikation aus den Originalzeitreihen oder durch Simulation physikalisch motivierter Modelle.

Das führte zu dem Ergebnis, daß der zugrundeliegende Prozeß auf kurzen Zeitskalen **nichtlinear** sein muß. Nach einer Filterung der Δ^{14} C-Reihe zur Entfernung der langzeitlichen Störungen kann man die Positionen der historisch bekannten großen Minima gut lokalisieren. Durch Einbeziehung aller historischen Beobachtungen [50] [28] und Extrapolation in die fernere Vergangenheit konnten wir insgesamt **34 große Minima** bestimmen [48].

Dieses indirekt aus Messungen gefundene Verhalten kann als Prüfstein zur Evaluierung theoretischer Modelle (vgl. Abschn. 2.2) benutzt werden. Dabei geht es zunächst darum zu testen, ob ein Modell ein qualitativ ähnliches Verhalten zeigt. Beispielsweise werden die großen Minima, die sich aus der Meßreihe bzw. aus vereinfachten nichtlinearen Dynamomodellen ergeben, mit analoger Analysetechnik bestimmt und dann verglichen. Das Histogramm der beobachteten zeitlichen Abstände zwischen den großen Minima ähnelt einer Normalverteilung, wohingegen die Verteilung der Zyklenlängen für Dynamomodelle in Richtung sehr kurzer Abstände zwischen den Minima verschoben ist und zudem einen exponentiellen Abfall zeigt [48] – d.h. die Modellverteilungen weichen sehr deutlich von den beobachteten ab.

Aus diesen qualitativen Unterschieden folgt, daß die vereinfachten Dynamomodelle noch weit davon entfernt sind, die Langzeitdynamik der Sonnenaktivität angemessen wiederzugeben. Als wichtige Aufgabe sind also realistische Modelle zu entwickeln, die man zugleich langzeitig simulieren kann. Derartige Modelle sind von besonderer Bedeutung um zu unterscheiden, welche Klimavariationen a) anthropogene Ursachen haben, b) im internen dynamischen System Erde entstehen, c) primär durch Variationen der Sonne bewirkt werden.

2.4 Polaritätswechsel des Erdmagnetfeldes

Das Magnetfeld der Erde ist ebenfalls durch vielfältige Variationen gekennzeichnet. Besonders auffällig sind die Wechsel in der Polarität des Erdmagnetfeldes (Abb. 6). Ihre Abfolge wird oft als ein außerordentliches Beispiel komplexer Prozesse diskutiert. Es ist allgemein anerkannt, daß die unregelmäßige Aufeinanderfolge der Umpolungen eine inhärente Signatur des im flüssigen, elektrisch leitenden äußeren Erdkerns arbeitenden **Geodynamos** darstellt. Ähnlich wie im Fall der Sonne ist es bisher nicht gelungen, umfassende dreidimensionale Dynamomodelle zur Beschreibung dieser Polaritätswechsel langzeitig numerisch zu simulieren. Mit Hilfe der leistungsfähigsten Supercomputer konnten Glatzmaier und Roberts [21] [22] *eine* derartige Umpolung numerisch nachvollziehen. Deshalb wurden verschiedene vereinfachte nichtlineare Modelle zur Beschreibung des Langzeitverhaltens des geomagnetischen Feldes entwickelt.



Abb. 6. *Oben*: Zeitliche Abfolge von Perioden konstanter Polarität des Erdmagnetfeldes; die schwarzen und weißen Abschnitte geben die beiden Polarisationsrichtungen an. *Unten*: Verteilung der Längen der Umkehrperioden

Krause und Schmidt [27] haben ein stark vereinfachtes nichtlineares Modell vorgeschlagen, das die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Bewegung durch einen kubischen Term beschreibt.

Wir haben dieses Modell mit **geologischen Daten verglichen** (vgl. Abb. 6, [49]). Die Daten umfassen 150 derartiger Umkehrungen. Deshalb ist die Berechnung **nichtlinearer Charakteristika**, wie Lyapunov-Exponenten oder Korrelationsdimension, ausgeschlossen. Verschiedene datenanalytische Standardmethoden, wie Korrelationsfunktion oder Wahrscheinlichkeitsdichte zeigen eine überraschend gute Übereinstimmung von Modell und Daten.

Jedoch konnten wir mit Methoden der symbolischen Dynamik nachweisen [49], daß das betrachtete Modell nicht in der Lage ist, die dynamischen Eigenschaften des beobachteten Prozesses wiederzugeben. Genauer gesagt, die Aufeinanderfolge kurzer und langer Zeiten konstanter Polarität unterscheidet sich in Modell und Daten. Bei der symbolischen Dynamik werden statt einer kontinuierlichen Zustandsvariable einige wenige markante Symbole eingeführt, die einen bestimmten Zustandsbereich kennzeichnen, aber trotzdem das Wesen des Prozesses qualitativ gut erfassen. Es handelt sich also hier um Vereinfachungen, die das Wesentliche hervorheben und unwichtigere Details vernachlässigen. Die signifikanten Unterschiede werden durch Algorithmische Komplexität bzw. Renyi-Information der dynamisch transformierten Symbolfolgen zum Ausdruck gebracht.

Folglich ergibt sich die Aufgabe, Modelle zu entwickeln, die auch die komplexe Dynamik der Polaritätswechsel wiederzugeben vermögen. Das ist von großer Aktualität, weil kleinerskalige Fluktuationen des Erdmagnetfeldes auf einen nahe bevorstehenden weiteren Polaritätswechsel hindeuten.

3 Planetare Ringe: Granulare Gase im All

Die Experimente der Raumsonden Pioneer und Voyager offenbarten eine ungeahnte Strukturvielfalt der Ringsysteme der vier Riesenplaneten *Jupiter, Saturn, Uranus* und *Neptun.* Die wohl überraschendsten Resultate der Voyager-Missionen bezüglich planetarer Ringe waren:

- der Nachweis von Ringsystemen bei *allen* Riesenplaneten
- ihre extrem geringe vertikale Ausdehnung (Dicke) von weniger als 100 m
- die Beobachtung von Feinstrukturen bis hinunter zu den Auflösungsgrenzen der Raumsondenexperimente von ca. 100 m

Die Ursache für diese Strukturen ist eine komplexe Dynamik der Ringteilchen, die durch äußere Kraftfelder und nichtlineare Wechselwirkungen der Teilchen untereinander bestimmt ist.



Abb. 7. Saturn und seine Ringe: Eine Aufnahme von Voyager 1 (aus ca. 1.5 Millionen Kilometer Entfernung) als die Sonde das Saturn-System verläßt. Zu den Größenverhältnissen: Der Durchmesser Saturns beträgt 120 000 km, die radiale Ausdehnung der Ringe ca. 70 000 km.

In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick über einige Typen von Ringstrukturen sowie deren physikalische Ursachen. Dabei gilt unser Interesse den Hauptringen (im Gegensatz zu den diffusen Staubringen, wie z.B. dem Jupiterring) der Planeten *Saturn*, *Uranus* und *Neptun*, die eine sehr geringe Ringdicke $H \ll 100$ m haben und deren Dynamik im wesentlichen durch gravitative Wechselwirkungen und durch dissipative Stöße zwischen den Teilchen bestimmt wird.

Zudem wird das Teilchenensemble durch die Gravitation zahlreicher Monde – inmitten und außerhalb der Ringe – stetig gestört. Die Herausbildung der reichen Strukturwelt ist eine Reaktion des Ringmaterials auf diese Einflüsse.

3.1 Kinetische Beschreibung – Dicke der Ringe

Die Ringsysteme der Riesenplaneten bestehen, vergleichbar mit einem Mol eines Gases oder einer Flüssigkeit, aus einer unvorstellbar großen Zahl von einzelnen Teilchen, deren Größen von mikrometergroßem Staub bis hin zu kilometergroßen Brocken (sogenannte Moonlets) reichen. Trotz der offensichtlichen Unterschiede zwischen Gasmolekülen und granularen Teilchen – in Größe, Form, Art der Wechselwirkung mit anderen Mitgliedern des Ensembles – finden die Methoden der klassischen, kinetischen Theorie der Gase erfolgreich Anwendung bei der Erklärung der in den Ringen beobachteten Strukturen.

Den größten Einfluß auf alle Teilchen des Ensembles hat die Gravitation des Planeten. Vernachlässigt man alle Störungen bis auf die Schwerkraft des Zentralkörpers, bewegen sich alle Ringpartikel auf Kepler-Ellipsen. Das ist tatsächlich in erster Näherung der Fall, aber es bleiben Fragen offen: Warum sind die beobachteten Bahnen fast exakt kreisförmig und warum bewegen sich auch nahezu alle Teilchen – mit sehr geringen Abweichungen – in einer Ebene? Zur Illustration sei als Vergleich das Verhältnis Dicke zu Länge einer Rasierklinge erwähnt, welches 1000 – 10000 mal größer ist als das entsprechende Verhältnis bei den Ringen. Antwort auf die oben genannten Fragen gibt die kinetische Theorie granularer Gase, deren Kernstück die dissipativen Stöße zwischen den Teilchen sind.

Deshalb haben wir die Dynamik des Stoßes zwischen zwei kugelförmigen (der Einfachheit wegen) Eis- oder Gesteinskörnern eingehend untersucht. Im Rahmen einer visko-elastischen Kontinuumstheorie gelang es [6] [41], die Ergebnisse von Laborexperimenten zum Stoß von zwei Eiskugeln [5] recht gut zu reproduzieren.

Es zeigte sich, daß die beim Stoß dissipierte Bewegungsenergie in nichtlinearer Weise von der Geschwindigkeit abhängt, mit der die Teilchen stoßen. Die Kenntnis dieses Zusammenhangs ist einerseits wichtig für die kinetische Beschreibung eines Systems vieler Teilchen, andererseits macht der komplizierte, nichtlineare Charakter der Wechselwirkung eine analytische Beschreibung unmöglich.

Dennoch ist die gewonnene Einsicht in die Dynamik des Stoßes granularer Teilchen ein Fortschritt gegenüber der oft verwendeten Vernachlässigung der Abhängigkeit der Dissipation von der Stoßgeschwindigkeit. Genauer genommen hängt die Dissipation von der Impulsänderung beim Stoß – und damit von den Massen der an der Kollision beteiligten Teilchen – ab. Aber der Einfachheit halber behandeln wir hier nur den Fall identischer Teilchen. Um die Bedeutung dieses Zusammenhangs für die Dynamik der planetaren Ringe zu illustrieren, sei die Folge o.g. Vernachlässigung für die Beschreibung der Stabilität planetarer Ringe kurz erwähnt. Goldreich und Tremaine [23] zeigten, daß diese Abhängigkeit in den Ringen für die Einstellung eines Quasi-Gleichgewichtes sorgt. Wird sie vernachlässigt und statt dessen angenommen, daß bei jedem Stoß gleichviel Energie dissipiert wird, dann würde, je nachdem wie groß der Anteil an dissipierter Energie pro Stoß angenommen wird, der Ring entweder in eine Monolage kollabieren (alle Teilchen liegen in einer Ebene – "kalter" Ring), oder die thermischen Bewegungen würden ohne Grenze wachsen – die Ringe würden "verdampfen" ("heißer" Ring).

Hängt jedoch die Dissipation von der Geschwindigkeit der stoßenden Teilchen ab, dann sorgt eine Balance zwischen durch Reibung verursachter Heizung und der stoßbedingten Kühlung für die Einstellung einer Gleichgewichts-,,Temperatur" und eine endliche Dicke der Ringe. Die Reibung wiederum wird durch die Abnahme der Kepler-Bahngeschwindigkeit der granularen Materie mit dem Abstand vom Planeten verursacht.



Abb. 8. Links: Vertikale Verteilung der Teilchen in einem Modellring für weniger dissipative (breitere Verteilung) und sehr dissipativ stoßende Granulen, gewonnen mit numerischen Teilchensimulationen. *Mitte:* Teilchenkonfiguration zu Beginn der Simulation. Die vertikale Achse stellt die z-Richtung (senkrecht zur Ringebene) dar. *Rechts:* Teilchenkonfiguration im stationären Gleichgewicht. Es hat sich eine vertikale Stratifikation herausgebildet, die von der thermischen Bewegung des Ringteilchenensembles ("Temperatur") bestimmt wird

Die Einstellung dieser Balance wurde numerisch simuliert [35] und die Ergebnisse sind in Abb. 8 dargestellt. Dieses Gleichgewicht – ermöglicht durch die variable Stoßdynamik – verhindert, daß alle Teilchen in eine Ebene herabsinken und daß die thermischen Bewegungen ganz ausgedämpft werden. Heikki Salo, ein führender Theoretiker auf diesem Gebiet, faßt diesen Sachverhalt mit folgenden Worten zusammen: "Planetary rings are extremely flat - but (!) not two-dimensional", wie wir es auch mit unseren Simulationen – siehe Abb. 8 – reproduzieren.

Eine andere Folge der inelastischen Stöße ist die Eigenschaft granularer Stoffe, Klumpen ("Cluster") zu bilden. Diese sogenannte "Cluster"-Instabilität haben wir in einer weiteren Arbeit untersucht [42], wobei uns die Unterschiede dieses Strukturbildungsprozesses im kräftefreien Fall (ein granulares Gas weit ab von jeder Störung – z.B. intergalaktische Staubwolken) zu dem in einem Zentralkraftfeld vorrangig interessiert haben.

Einige Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Abb. 9 dargestellt. Man sieht deutlich die Unterschiede. Während sich die "Cluster" im kräftefreien Fall nahezu in allen Richtungen herausbilden, führt die Scherung der Geschwindigkeit in den Ringen zu der Herausbildung einer Vorzugsrichtung der Strukturen.

Der interessanteste Unterschied liegt allerdings in der Stabilität der gebildeten "Cluster". Die Strukturen sind im kräftefreien Fall quasi-stabil und die Größe der Klumpen hängt von der Dissipation (also von der Stoßdynamik) ab.

66 J. Kurths, N. Seehafer und F. Spahn

Im Gegensatz dazu sind die "Cluster" in einem Kraftfeld *nicht stabil*, wenn beim Teilchenstoß keine attraktiven Wechselwirkungen eine Rolle spielen (z.B. Adhäsion, siehe [42]).



Abb. 9. Links: Schnappschuß einer Simulation mit 20 000 inelastisch stoßenden Teilchen (Radius = 1 cm). Man sieht deutlich die Formierung von "Clustern". Rechts: Schnappschuß einer Simulation mit 20 000 Teilchen (Radius = 1 cm) im Kraftfeld eines Planeten. Der Mittelpunkt der Simulationsbox (Koordinaten: 0, 0) bewegt sich auf einer Kepler-Kreisbahn, die negative x-Achse zeigt in die Richtung der mittleren Bahnbewegung, der Planet befindet sich in der negativen y-Richtung. Die Situation entspricht den Verhältnissen im B Ring von Saturn (s. Abb. 1: das hellste = dichteste Gebiet inmitten der Ringe)

Wenn also dissipative Stöße allein nicht für die beobachtete Strukturvielfalt in planetaren Ringen verantwortlich sein können, müssen noch andere Prozesse wirken, die das Dichtefeld beeinflussen.

3.2 Einfluß von Satelliten

Neben der Vielzahl interessanter, meist noch ungeklärter, Phänomene werden in diesem Unterabschnitt Strukturen beschrieben, die durch kleine, inmitten der Ringe befindliche Satelliten (sogenannte Moonlets) verursacht werden.

Wichtig sind auch hier die inelastischen Stöße in dem von einem Mond gestörten Ring. Sie bewirken, daß die sich die entwickelnden Strukturen einen stationären Zustand anstreben, den sie ohne Dissipation nie erreichen würden. Ähnlich wie bei der physikalischen Beschreibung der Ringdicke ermöglichen die dissipativen Stöße wieder die Einstellung eines Quasi-Gleichgewichts zwischen dem Energieeintrag durch die vom Mond verursachte Störung und dem "Verlust" an mechanischer Energie infolge der inelastischen Stöße. Es ist natürlich auch hier kein echter Energieverlust, sondern mechanische Energie wird in Deformations- bzw. Wärmeenergie in den Teilchen selbst umgewandelt, die letztlich abgestrahlt wird.

Wichtig ist aber, daß ohne die Stöße die Strukturen nicht beobachtbar wären, da die stetige Energiezufuhr durch den störenden Satelliten den Ring aufheizen



Abb. 10. Die farbkodierte Teilchendichte eines Ringes, der aus $2^{19} = 524288$ granularen Partikeln besteht und der von einem kleinem Mond (Position: (1, 0)) gravitativ beeinflußt wird. Beide Bildteile muß man sich als aufgeschnittenen geschlossenen Ring vorstellen. Mit dem *radialen Abstand* ist die Entfernung vom Planeten bezeichnet und die *azimutale Länge* mißt die Position eines Teilchens in Bezug auf die des Mondes. *Links:* Simulation bei Vernachlässigung der Teilchenstöße; *Rechts:* Simulation, bei der teilweise inelastische Stöße berücksichtigt worden sind

und er samt seiner Strukturen dispergieren würde. Diese Effekte wurden ebenfalls mit numerischen Methoden untersucht [25]. Einige Resultate sind in Abb. 10 dargestellt, wo eine halbe Million Teilchen in einem Modellring der Störung eines Satelliten ausgesetzt waren, der sich inmitten des Ringes bewegte. In beiden Bildteilen ist die farbkodierte Teilchendichte eines kompletten Ringes dargestellt. Schwarz bedeutet niedrige Dichte; Gelb bis Orange markieren die Maxima des Dichtefeldes.

Der linke Teil der Abbildung gehört zu einer Simulation ohne Stöße. Es ist nur ein Schnappschuß zu einer bestimmten Zeit. Die Strukturen ändern sich noch unablässig und werden, wie die Theorie zeigt, zeitlich asymptotisch verschwinden.

Der rechte Bildabschnitt zeigt eine Simulation mit Teilchenstößen, bei der die Strukturen sich kaum noch ändern. Die hierbei gefunden Merkmale des Dichtefeldes – im wesentlichen eine Lücke um die Bahn des Mondes sowie die markanten Wellenerscheinungen – sind später tatsächlich in einem einzigen Fall in den Ringen des Saturn beobachtet worden, was dann zur Entdeckung des Satelliten Pan führte [38] [43].

Fazit: Die Einstellung eines Gleichgewichts zwischen der Dissipation von Bewegungsenergie durch teilweise inelastische Stöße zwischen den Ringteilchen und dem "Forcing" durch die Gravitationsfelder des Planeten und einer Vielzahl von Satelliten bzw. Moonlets sichert die Stationarität und damit die Beobachtbarkeit vieler Strukturen. Dazu gehören sowohl die extrem geringe Dicke aller Ringe



Abb. 11. Folgen eines Erdbebens der Magnitude 5.6

als auch viele Lücken und Wellenerscheinungen, die von Monden hervorgerufen werden.

Allerdings limitiert die stetige Dissipation von Bewegungsenergie auch das Alter der Ringe, so daß heute klar zu sein scheint, daß planetare Ringe nicht zeitgleich mit den Planeten entstanden sein können [11] [9] [8]. Die Entstehung dieser kosmischen Strukturexoten ist bis heute noch nicht endgültig geklärt.

4 Nichtlineare Analyse von Erdbebendaten

Seismische Aktivität ist ein typisches Beispiel komplexer Raum-Zeit-Dynamik. Besondere Beachtung findet dabei das Auftreten starker Erdbeben, führen sie doch meist zu katastrophalen Schäden (Abb. 11). Seismische Aktivität schließt aber auch vielfältige Mikroereignisse ein. Die Summe aller Ereignisse ist im Gutenberg-Richter-Gesetz zusammengefaßt [24]

$$\log_{10} N = a - bM \tag{1}$$

wobei N die Anzahl der Erdbeben in einer Region mit einer Stärke von mindestens M und a, b regional abhängige Parameter sind (Abb. 12).

Wegen dieses Potenzgesetzes werden Erdbeben oft als Ausdruck selbstorganisierter Kritizität (SOC) angesehen [47]. Darunter wird das Verhalten eines hochdimensionalen dissipativen Systems verstanden, einen kritischen Zustand zu entwickeln, der weder durch charakteristische Längen noch Zeiten ausgezeichnet ist. Am einfachsten läßt sich das am Beispiel des Sandhaufen-Modells erklären: Schüttet man stetig Sand auf die Spitze eines Sandhaufens, dann erhöht sich der Neigungswinkel seiner Oberfläche solange, bis ein kritischer Wert erreicht wird, bei dem eine Kaskade von Lawinen einsetzt. Diese sorgt dafür, daß sich der Winkel wieder verringert und das System für eine Weile – solange der Schüttwinkel kleiner als der kritische Winkel ist – zur Ruhe kommt. Die räumliche und



Abb. 12. Die Verteilung der Magnituden für (**a**) den NCSN-Erdbebenkatalog von Nordkalifornien und für (**b**) eine Simulation des SOC-Modells von Olami, Feder und Christensen [32], wobei N die Anzahl und P die Wahrscheinlichkeit beschreibt. Die Geraden entsprechen jeweils dem Gutenberg-Richter-Gesetz mit b = 0.88 bzw. b = 0.9

zeitliche Abfolge der Lawinen zeichnet sich dann durch keine charakteristischen Skalen aus – es gibt Lawinen jeder Größe (der Systemgröße entsprechend) und zu allen Zeitpunkten, solange der Winkel im kritischen Bereich ist [2].

Ähnliche kritische Zustände scheinen die Spannungen in unserer Erdkruste anzunehmen, die sich, wenn kritische Werte überschritten werden, in Beben unterschiedlicher Stärke entladen. Diese wichtige Eigenschaft ermöglicht jedoch leider keine quantitativen Aussagen zur Dynamik von Erdbeben, insbesondere zu deren Vorhersagbarkeit.

Die bisher bekannten Verfahren zur Analyse von Erdbebenkatalogen verwenden zumeist Standardtechniken der linearen und nichtlinearen Zeitreihenanalyse, wobei die mehrdimensionalen Daten (Zeit, räumliche Koordinaten und Magnitude) zunächst zu eindimensionalen Zeitreihen vereinfacht werden.

In unserer Arbeit bildet die Charakterisierung der Raum-Zeit-Dynamik den Schwerpunkt. Als erster Zugang wurde die Suche nach *charakteristischen räumlichen Skalen* gewählt. Ausgangspunkt ist dabei eine Idee, die Rand und Wilson [33] für Systeme vorgeschlagen haben, deren Dynamik auf großen Skalen stationär wird. Da diese Voraussetzung für Erdbebendaten nicht erfüllt ist, muß das Konzept von Rand geeignet modifiziert werden. Da auf kleinen Raumskalen stochastische Effekte die Dynamik dominieren und auf großen Skalen starke räumliche Mittelung erforderlich ist, suchen wir nach mittleren Skalen, auf denen einerseits ein deterministisches Signal erkennbar ist und andererseits möglichst wenig dynamische Information durch Mittelung verloren geht.

Zur Bestimmung von mittleren Skalen wurde ein Verfahren entwickelt, das auch für andere räumlich ausgedehnte Systeme vielversprechend erscheint. Es basiert auf der Annahme der Existenz instabiler periodischer Orbits als Maß für niedrigdimensionale und deterministische Dynamik [51].

Durch Vergleich mit Ersatzdaten ergibt sich als Resultat ein Satz von Raumbereichen, der sich durch sehr hohe Signifikanzen für niedrigdimensionalen und

70 J. Kurths, N. Seehafer und F. Spahn

nichtlinearen Determinismus auszeichnet. Diese charakteristischen Raumbereiche eignen sich somit für weitere Untersuchungen des dynamischen Verhaltens.

Von besonderem Interesse ist die Frage nach der Vorhersagbarkeit von großen Erdbeben. Wichtiger Ausgangspunkt ist hierbei das Auftreten von Vorläuferphänomenen. So treten in den letzten Tagen vor dem Hauptbeben häufig einige Vorbeben auf. Die Rate R der Vorbeben wie der Nachbeben läßt sich im Mittel mit derselben Gesetzmäßigkeit

$$R \sim (c + |\Delta t|)^{-p}, \quad p \approx 1 , \qquad (2)$$

beschreiben, wobei Δt die Zeitdifferenz zum Hauptbeben und *c* eine kleine Konstante angibt. Lediglich in der Proportionalitätskonstanten unterscheiden sich Vor- und Nachbeben, wobei die Anzahl der Nachbeben die Zahl der Vorbeben um ein Vielfaches überschreitet. Außerdem wurde in vielen Einzelfällen eine seismische Ruhe, d.h. eine über Monate und Jahre anhaltende Periode niedrigerer Seismizität, als weiteres Vorläuferphänomen beobachtet.

Trotz dieser bekannten Vorläuferphänomene ist es bis jetzt nur in Einzelfällen gelungen, ein Hauptbeben erfolgreich vorherzusagen. Dies liegt daran, daß sich Vorbeben im Moment ihres Auftretens nicht signifikant von anderen Erdbeben unterscheiden und daß Schwankungen in der Seismizität auch ohne folgendes Hauptbeben auftreten. Aufgrund der vielen fehlgeschlagenen Versuche wird in letzter Zeit diskutiert, ob Erdbeben inhärent unvorhersagbar sind, weil sich die Erdkruste wahrscheinlich in einem Zustand der selbstorganisierten Kritizität (SOC) befindet [20].

Wir haben uns dieser Diskussion mit zwei Fragestellungen genähert: (i) Kann ein einfaches SOC-Modell gefunden werden, welches neben der Magnitudenverteilung (Gutenberg-Richter-Gesetz) auch die Vor- und Nachbeben richtig beschreibt? (ii) Falls ein entsprechendes SOC-Modell existiert, was kann über die Vorhersagbarkeit großer Ereignisse in diesem Modell ausgesagt werden?

Die erste Frage kann positiv beantwortet werden: Durch eine zusätzliche Berücksichtigung eines Relaxationsprozesses in der Kruste konnten wir ein bestehendes SOC-Modell für Erdbeben [32] so modifizieren, daß Vor- und Nachbebensequenzen mit der beobachteten Charakteristik (2) auftreten (Abb. 13).

Ebenso beobachtet man in denselben Modellsimulationen auch eine seismische Ruhephase vor vielen großen Ereignisse.

In ersten Untersuchungen bezüglich der Vorhersagbarkeit in diesem SOC-Modell zeigt sich, daß mit Hilfe der seismischen Ruhe und der Vorbeben zwar keine direkte Vorhersage des nächsten Hauptbebens möglich ist, daß aber die Analyse seismischer Schwankungen zu einer verbesserten Gefahrenabschätzung führen kann. Zu dem gleichen Ergebnis führen auch entsprechende Analysen von realen Erdbebenkatalogen, die aber für sich genommen wegen des beschränkten Umfangs und der Qualität der Daten nur eine schwache statistische Aussage ermöglichen.



Abb. 13. Raumzeitliche Anhäufung von Erdbeben vor und nach Hauptbeben in dem modifizierten SOC-Modell. *Oben*: Die Rate in Abhängigkeit vom Abstand r zum Epizentrum des Hauptbebens. *Unten*: Die über viele Hauptbeben gemittelten Kurven der Vorbeben (*links*) und Nachbeben (*rechts*) mit angepaßten Potenzgesetzen entsprechend Gleichung (2)

Literatur

- Arnold, V. I. (1984) On the evolution of a magnetic field under the influence of advection and diffusion (in Russian). In: Tikhomirov, V. M. (ed.) Some Problems of Modern Analysis. Moscow State University, Moscow, pp. 8–21
- Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K. (1987) Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise. prl 59, 381–384
- Brandenburg, A., Klapper, I., Kurths, J. (1995) Generalized entropies in a turbulent dynamo simulation. Phys. Rev. E 52, R4602–R4605
- Braun, R., Feudel, F., Seehafer, N. (1997) Bifurcations and chaos in an array of forced vortices. Phys. Rev. E 55, 6979–6984
- 5. Bridges, F.G., Hatzes, A.P., Lin, D.N.C. (1984) Structure, stability and evolution of Saturn's rings. Nature **309**, 333–338
- Brilliantov, N., Pöschel, T., Spahn, F., Hertzsch, J.-M. (1996) Model for collisions in granular gases. Phys. Rev. E 53, 5382–5392
- Cardoso, O., Marteau, D., Tabeling, P. (1994) Quantitative experimental study of free decay of quasi-two-dimensional turbulence. Phys. Rev. E 49, 454–461
- 8. Colwell, J. E. (1994) The disruption of planetary satellites and the creation of planetary rings. Planetary and Space Science **42**, 1139–114

- 72 J. Kurths, N. Seehafer und F. Spahn
- Colwell, Joshua E., Esposito, Larry W. (1992) Origins of the rings of Uranus and Neptune. I - Statistics of satellite disruptions. Journal of Geophys. Research 97, 110227-+
- 10. Eddy, J. A. (1977) The case of missing sunspots. Sci. American 236, 80–92
- Esposito, Larry W. (1993) Understanding planetary rings. Annual Review of Earth and Planetary Sciences 21, 487–523
- Feudel, F, Seehafer, N. (1995) Bifurcations and pattern formation in a twodimensional Navier-Stokes fluid. Phys. Rev. E 52, 3506–3511
- Feudel, F., Seehafer, N. (1995) On the bifurcation phenomena in truncations of the 2D Navier-Stokes equations. Chaos, Solitons & Fractals 5, 1805–1816
- Feudel, F., Seehafer, N., Galanti, B., Rüdiger, S. (1996) Symmetry-breaking bifurcations for the magnetohydrodynamic equations with helical forcing. Phys. Rev. E54(3), 2589–2596
- Feudel, F., Seehafer, N., Schmidtmann, O. (1995) Fluid helicity and dynamo bifurcations. Phys. Lett. A202, 73–78
- Feudel, F., Seehafer, N., Schmidtmann, O. (1996) Bifurcation phenomena of the magnetofluid equations. Math. Comput. Simula. 40(3), 235–246
- Feudel, F., Jansen, W. (1992) CANDYS/QA a software system for the qualitative analysis of nonlinear dynamical systems. Int. J. Bifurcation and Chaos 2, 773–794
- Feudel, U., Jansen, W., Kurths, J. (1993) Tori and chaos in a nonlinear dynamo model for solar activity. Int. J. Bifurcation and Chaos 3, 131–138
- Galloway, D., Frisch, U. (1986) Dynamo action in a family of flows with chaotic streamlines. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 36, 53–83
- Geller, R. J., Jackson, D. D., Kagan, Y. Y., Mulargia, F. (1997) Earthquake cannot be predicted. Science 275, 1616–1617
- Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. Phys. Earth. Planet. Int. 91, 63–75
- Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. Nature 377, 203–209
- Goldreich, P., Tremaine, S. (1978) Velocity dispersion in Saturn's rings. Icarus 34, 227–239
- Gutenberg, B., Richter, C. F. (1954) Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration. Bull. Seismol. Soc. Am. 46, 105–145
- Hertzsch, J. M., Scholl, H., Spahn, F., Katzorke, I. (1997) Simulation of collisions in planetary rings. Astronomy and Astrophysics **320**, 319–324
- Krause, F., R\u00e4dler, K.-H. (1980) Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Akademie-Verlag, Berlin
- Krause, F., Schmidt, H.-J. (1988) A low-dimensional attractor for modelling the reversals of the Earth's magnetic field. Phys. Earth. Planet. Int. 52, 23–29
- Křivcký, L. (1984) Long-term fluctuations of solar activity during the last thousand years. Solar Phys. 93, 189–194
- Kurths, J., Schwarz, U., Sonett, C.P., Parlitz, U. (1994) Testing for nonlinearity in radiocarbon data. Nonlin. Processes Geophys. 1, 72–75
- Marion, M., Temam, R. (1989) Nonlinear Galerkin methods. SIAM J. Num. Anal. 26, 1139–1157
- Meshalkin, L. D. Sinai, Y. G. (1961) Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous liquid. J. Appl. Math. Mech. 25, 1700–1705
- Olami, Z., Feder, H. S., Christensen, K. (1992) Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. Phys. Rev. Lett. 68, 1244–1247

73

- Rand, D.A., Wilson, H.B. (1995) Using spatio-temporal chaos and intermediatescale determinism to quantify spatially extended ecosystems. Proc. R. Soc. Lond. B259, 111–117
- Rüdiger, S., Feudel, F., Seehafer, N. (1998) Dynamo bifurcations in an array of driven convectionlike rolls. Phys. Rev. E 57, 5533–5538
- 35. Schmidt, J., Spahn, F., Petzschmann, O. (1998) Vertical distribution of temperature and density in a planetary ring. Icarus (submitted)
- Schmidtmann, O., Feudel, F., Seehafer, N. (1997) Nonlinear Galerkin methods for the 3D magnetohydrodynamic equations. Int. J. Bifurcation and Chaos 7, 1497– 1507
- Seehafer, N., Feudel, F., Schmidtmann, O. (1996) Nonlinear dynamo with ABC forcing. Astron. Astrophys. **314**, 693–699
- Showalter, Mark R. (1991) Visual detection of 1981S13, Saturn's eighteenth satellite, and its role in the Encke gap. Nature 351, 709–713
- Sommeria, J. (1986) Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. J. Fluid Mech. 170, 139–168
- Sonett, C. P. (1984) Very long solar periods and the radiocarbon record. Rev. Geophys. Space Phys. 22, 239–254
- 41. Spahn, F., Hertzsch, J.-M., Brilliantov, N.V. (1995) The role of particle collisions for the dynamics in planetary rings. Chaos, Solitons and Fractals 5, 1945
- Spahn, F., Schwarz, U., Kurths, J. (1997) Clustering of granular assemblies with temperatur dependent restitution and under differential rotation. Phys. Rev. Lett. 78, 1596–1601
- Spahn, F., Greiner, J., Schwarz, U. (1992) Moonlets in Saturn's rings. Advances in Space Research 12, 141–147
- 44. Stieglitz, R., Müller, U. (1996) GEODYNAMO Eine Versuchsanlage zum Nachweis des homogenen Dynamoeffektes. Research Report FZKA-5716, Forschungszentrum Karlsruhe
- Stuiver, M., Braziunas, T. F. (1989) Atmospheric ¹⁴C and century-scale solar oscillations. Nature **338**, 405–408
- Thess, A. (1992) Instabilities in two-dimensional spatially periodic flows. Part I: Kolmogorov flow. Phys. Fluids A 4, 1385–1395
- 47. Turcotte, D. L. (1997) Fractals and Chaos in Geology and Geophysics. Cambridge University Press, Cambridge
- Voss, H., Kurths, J., Schwarz, U. (1996) Reconstruction of grand minima of solar activity from Δ¹⁴C data: Linear and nonlinear signal analysis. J. Geophys. Res. A (Space Physics) 101, 15637–15643
- Witt, A., Kurths, J., Krause, F., Fischer, K. (1994) On the validity of a model for the reversals of the Earth's magnetic field. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 77, 79–91
- Wittmann, A. (1978) The sunspot cycle before the Maunder minimum. Astron. Astrophys. 66, 93–97
- Zöller, G., Engbert, R., Hainzl, S., Kurths, J. (1998) Testing for unstable periodic orbits to characterize spatiotemporal dynamics. Chaos, Solitons & Fractals 9(8), 1–20