



- <https://reference.wolfram.com/language/>
- **The Mathematica Book**; Stephen Wolfram

Mathematica

ist ein Mathematik-Programm zum **numerischen** und **symbolischen** Lösen von

- Gleichungen
- Gleichungssystemen
- Differentialgleichungen
- Integralen
- Matrizen
- etc.

Darüber hinaus können Ergebnisse auch als Plot ausgegeben werden.

Mathematica ist ein kommerzielles, closed-source Programm von Wolfram Research.

- Version im Computer-Pool: 7.0 (25.02.2009), zu erfragen mittels

```
mathematica -version
```

- aktuelle Version: 12.2 (Dezember 2020) – Mac, Linux, Windows
- Preis der Vollversion (pers.): 4218 € / 341 € (Home)
- Preis der Studentenversion: ab 80 €/ Jahr

Viele der Mathematica-Funktionen stellt Wolfram Research über seine Website

```
http://www.wolframalpha.com
```

kostenlos zur Verfügung¹.

¹Diese Website nutzt auch Apples Sprachassistent *Siri* für Antworten, insbesondere auf mathematische Anfragen

Mathematica verfügt über eine grafische Oberfläche (GUI) zur einfachen Bedienung.

```
mathematica &
```

startet Mathematica von der Shell im Hintergrund.

Es öffnen sich mehrere Fenster:

- Welcome-Fenster
- Programmfenster mit Eingabe-/Arbeitsbereich, sog.

Notebook (Dateiendung: .nb)

- Paletten für die Eingabe spezieller Symbole (z.B. f) und Formatierungen (z.B. \square)

Eingabe in die Notebook-Oberfläche

In die Notebook-Oberfläche werden die zu berechnenden Ausdrücke eingegeben, z.B.

```
In[1]:= 3 + 2^5 * Cos[ $\frac{\text{Pi}}{10}$ ]
```

Syntax:

- Die Nummerierung der Eingabe erfolgt automatisch (hier: In[1]).
- Es wird Groß-/Kleinschreibung unterschieden:
eingebaute Funktionen und Konstanten beginnen mit einem **Großbuchstaben** (Cos, Pi)
- Funktionsargumente stehen in eckigen Klammern: []
- Die Eingabe wird mit **SHIFT** + **ENTER** abgeschlossen
- Spezielle Symbole und Formatierungen (z.B. Brüche) mittels Paletten

Ausgabe auf der Notebook-Oberfläche

Nach Abschluss der Eingabe (`SHIFT` + `ENTER`) wird i.d.R. eine *exakte* Ausgabe auf der Notebook-Oberfläche generiert:

```
Out[1] := 3 + 32√ $\frac{5}{8}$  +  $\frac{\sqrt{5}}{8}$ 
```

Möchte man den *numerisch* genäherten Wert wissen:

```
In[2] := N[%]  
Out[2] := 33.4338
```

- Die Funktion `N[]` gibt die numerische Näherung einer Rechnung aus.
- Das Prozentzeichen `%` steht für das *zuletzt berechnete* Ergebnis (`Out[1]`), man hätte auch `In[2] := N[Out[1]]` schreiben können.

- Die Anzahl der mit `N[]` auszugebenen **Ziffern** kann als zweites Argument angegeben werden:

```
In[3] := N[% , 4]
Out[3] := 33.43
```

Aufgabe 3.1 Mathematica als Taschenrechner

- 1 Starten Sie Mathematica.
- 2 Finden Sie mithilfe von Mathematica die exakten und numerisch genäherten Ergebnisse folgender Ausdrücke:
 - 1 $1 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
 - 2 $\cos(3/2\pi) + \frac{1}{5} \sin(1/2)$
- 3 Wie lautet die 321. Nachkommastelle von π ? (Runden beachten!)

Mathematica kann sowohl numerisch als auch symbolisch rechnen, d.h. mit Variablen wie mit Zahlen rechnen:

```
In[1]:= (x + y)^2  
In[2]:= Expand[%]  
In[3]:= Simplify[%]
```

Der Befehl `Expand[]` löst Klammern auf, während `Simplify[]` eine Vereinfachung, z.B. Klammerung, des Ausdrucks versucht.

Aufgabe 3.2 Expand und Simplify

Expandieren und vereinfachen Sie den Ausdruck $(x + y)^7$.

Durch `=` kann Variablen ein Wert zugewiesen werden:

```
In[1]:= x = 13 - 2 * 4
```

Der Wert und Status der Variablen lässt sich mittels `?` erfragen:

```
In[2] := ?x
```

Man kann den Wert der Variablen mit `Clear[]` löschen

```
In[3] := Clear[x]
```

```
In[4] := ?x
```

Man kann auch alle Zuweisungen löschen:

```
In[5] := Clear["Global`*"]
```

Ein weiteres wichtiges Element in Mathematica sind `Listen { }`, diese lassen sich teilweise auch automatisch erzeugen:

```
In[6] := Table[y^n, {n, 3}]
```

```
Out[7] := {y, y^2, y^3}
```

Notebooks

Mathematica-Notebooks lassen sich speichern und wieder laden → Menü **File**. Desweiteren können verschiedene Stile gewählt werden und formatierter Text → Menü **Format** eingegeben werden.

Aufgabe 3.3 Notebook speichern

Speichern Sie Ihr Notebook aus der vorigen Aufgabe 3.1.

Beenden Sie Mathematica.

Starten Sie Mathematica neu und laden Sie Ihr Notebook.

Sie können Ihr Notebook auch in einem anderen Format, z.B. als PDF- oder T_EX-Datei speichern.

Evaluation-Menü

Ändert man in einem bestehenden Notebook einen Eintrag, z.B. eine Zuweisung, so wird durch `SHIFT` + `ENTER` i.d.R. nur die nächste Ausgabe-Zelle geändert.

Möchte man das gesamte Notebook aktualisieren, so hilft

Evaluation → Evaluate Notebook

Die eigentlichen Berechnungen werden vom sog. *Kernel* vorgenommen, der die Eingaben des *Frontends* auswertet. Bei Problemen mit dem Kernel hilft häufig

- 1 Evaluation → Quit Kernel
- 2 Evaluation → Start Kernel
- 3 Evaluation → Evaluate Notebook

Funktionsdefinition

Eigene Funktionen lassen sich wie folgt definieren

```
In[1] := h[x_] := 3*x^2 + 2*x - 4
```

Syntax

- `:=` Eine Definition (Zuordnung) folgt – kein Output.
- `x_` Die unabhängige Variable ist `x`, man beachte den **Unterstrich**.

Anschließend kann die Funktion genauso wie eine Mathematica-Funktion gerufen werden:

```
In[2] := N[h[0.5]]
```

Funktion plotten

Durch den Befehl `Plot[]` gelingt eine grafische Darstellung der Funktion

```
In[3] := Plot[h[x], {x, -2, 2}, Frame -> True,  
          PlotRange -> {{-2, 2}, {-5, 5}}]
```

Syntax:

- `Plot[]` hat mehrere Argumente, die ersten beiden sind Pflicht.
Die Reihenfolge der dann folgenden *Optionen* ist egal, da die Zuordnung anhand des Schlüsselwortes erfolgt.
- `{x, ..., ...}` gibt den Definitionsbereich an.
`Listen` werden in Mathematica mittels geschweifter Klammern `{ }` zusammengehalten.

Funktionen mehrerer Variablen

... können analog so definiert werden:

```
In[1] := g[x_,y_] :=  $\frac{\text{Sin}[x] * \text{Cos}[y]}{x}$ 
```

und so grafisch dargestellt werden:

```
In[2] := Plot3D[g[x,y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10},  
  PlotPoints -> 30,  
  PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}, {-.5, 1}}]
```

Aufgabe 3.4 Funktionen selbst definieren

Definieren und plotten Sie die folgende Funktion^a in Mathematica

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (1)$$

auf dem Intervall $[-25; 25]$.

Plotten Sie auch die Funktion

$$g(x, y) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(y)}{x} \quad (2)$$

in den o.g. Bereichen.

^asphärische Besselfunktion $j_0(x)$, auch bekannt als Sinc-Funktion (sinus cardinalis)

Das Hilfesystem von Mathematica ist ziemlich ausführlich, mit vielen Beispielen. Am einfachsten ist es, in der GUI das *Documentation Center* aus dem Help-Menü zu starten.

Alternativ kann auch direkte Hilfe zu einem Befehl angefordert werden:

Kurze Hilfe zu einem Befehl, z.B. Plot

```
In[1] := ? Plot
```

Ausführliche Hilfe zu einem Befehl

```
In[2] := ?? Plot
```

Wir wollen die Nullstellen unserer selbstdefinierten Funktion ermitteln, d.h. wir wollen die Gleichung

$$h(x) = 0 \quad (3)$$

lösen.

Gleichungen lösen

```
In[1] := h[x_] := 3*x^2 + 2*x - 4
```

```
In[2] := Solve[h[x] == 0, x]
```

Man beachte das doppelte Gleichheitszeichen `==`.
Die Lösung wird als eine Liste `{ }` ausgegeben.

Man kann Mathematica aber auch Gleichungen mit unbekanntem Koeffizienten lösen lassen, dann erhält man sog. Lösungsregeln:

```
In[1] := quadratgl := a*x^2 + b*x - c == 0
```

```
In[2] := Solve[quadratgl, x]
```

```
Out[2] := {{ x ->  $\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$  }, { x ->  $\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$  } }
```

Die Lösungen lassen sich aus der Liste mittels des Ersetzungsoperators /. extrahieren:

```
In[3] := x01 = x /. Out[2][[1]]
```

```
In[4] := x02 = x /. Out[2][[2]]
```

Aufgabe 3.5 Gleichungen lösen

Lösen Sie mithilfe von Mathematica die folgende Gleichung

$$15.5 - 17.4x + 7.1x^2 - x^3 = 0 \quad (4)$$

nach x auf. Wieviele reelle Lösungen gibt es?

Welche Lösungen hat die Gleichung

$$ax^4 + bx^2 = c \quad ? \quad (5)$$

Mathematica kann verschiedene Arten von Gleichungssystemen lösen: bestimmte, unterbestimmte, parametrisierte usw.

```
In[1]:= glsystem := { a*x - 5y == 27, 18x + 2y == -22 }
```

```
In[2]:= Reduce[glsystem, {x, y}]
```

Der Befehl `Reduce[]` liefert die Lösungsbedingung und die Lösung (verkettet).
`Solve[]` gibt direkt die Lösungen für x und y aus:

```
In[3]:= Solve[glsystem, {x, y}]
```

Aufgabe 3.6 Gleichungssystem lösen

Lösen Sie mittels Mathematica das o.g. Gleichungssystem.

Mathematica beherrscht das symbolische Ableiten und Integrieren, d.h. man kann für eine gegebene Funktion $f(x)$ (aus Aufgabe 3.4) die Ableitung $f'(x)$ oder die Stammfunktion $F(x)$ ermitteln.

Beispiel

```
In[1] := f[x_] :=  $\frac{\text{Sin}[x]}{x}$ 
```

```
In[2] := D[f[x],x]
```

Integration der so erhaltenen Funktion $f'(x)$

```
In[3] := Integrate[%,x]
```

Alternativ kann man auch einfach die Symbole der Eingabepalette (*Advanced*) nutzen:

$$\text{In}[4] := \partial_x f[x]$$

$$\text{In}[5] := \int \% dx$$

Es kann auch partiell differenziert und integriert werden:

$$\text{In}[6] := \partial_y g[x, y]$$

$$\text{In}[7] := \int \% dy$$

Aufgabe 3.7 Ableitung und Stammfunktion mit Mathematica

Gegeben seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ aus Aufgabe 3.4:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (6)$$

$$g(x, y) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(y)}{x} \quad (7)$$

- 1 Finden Sie $f'(x)$, $\partial_x g(x, y)$, $\partial_y g(x, y)$.
- 2 Stellen Sie $f'(x)$ und $G_y(x, y) = \int g(x, y) dy$ grafisch dar.
- 3 Was ist der Wert von $f'(2\pi)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f' dx$?

Versucht man den Wert von $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ an der Stelle $x = 0$ mittels

```
In[1] := x = 0 ;  $\frac{\text{Sin}[x]}{x}$ 
```

zu bestimmen, erhält man eine Fehlermeldung.

Wir löschen den Wert von x ([Wie?](#)) und berechnen den Grenzwert mittels

```
In[2] := Limit[ $\frac{\text{Sin}[x]}{x}$ , x -> 0]
```

Dasselbe Ergebnis erhält man auch mittels der Regel von l'Hospital:

```
In[3] :=  $\frac{D[\text{Sin}[x], x]}{D[x, x]}$ 
```

Aufgabe 3.8 Grenzwertberechnung

Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)'$$

Überprüfen sie das Ergebnis mittels der Regel von l'Hospital und auch grafisch (s. vorige Aufgaben).

Mit Hilfe des Befehls `Series[]` kann die Potenzreihenentwicklung einer Funktion ausgegeben werden:

```
In[1]:= Series[E^x, {x, 0, 7}]
```

Bzw. ohne das Restglied:

```
In[2]:= Normal[Series[E^x, {x, 0, 7}]]
```

Aufgabe 3.9 Taylorreihenentwicklung des Logarithmus

Wie lauten die ersten fünf Terme der Taylorreihenentwicklung des natürlichen Logarithmus in der Nähe von $x = 1$?

Gegeben sei das sog. Anfangswertproblem der Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (8)$$

Wir können diese Differentialgleichung mittels Mathematica lösen:

```
In[1] := dgl={x''[t]==- $\frac{k}{m}$ x[t], x[0]==x0, x'[0]==0}
```

Hinweis: ' = einfaches Anführungszeichen

Lösen der Differentialgleichung:

```
In[2] := lsg=DSolve[dgl, x[t], t]
```

Wir wollen die Lösung für konkrete Werte von k , m und x_0 plotten:

```
In[3] := x1[t_]:= x[t] /. lsg
```

```
In[4] := Plot[x1[t] /. {k->10, m->0.4, x0->0.2}, {t, 0, 5}]
```

Aufgabe 3.10 Differentialgleichungen lösen

- 1 Lösen Sie mithilfe von Mathematica die Dgl. (8).
Plotten Sie die Lösung für die genannten Werte von k , m und x_0 .
- 2 Versuchen Sie auch $y(x)$ für die Differentialgleichung

$$y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y} \quad (9)$$

zu finden, vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.

Mithilfe von Listen `{ }` können Matrizen und Vektoren konstruiert werden. Es gibt aber auch Befehle, die spezielle Matrizen (z.B. die Einheitsmatrix) erzeugen können.

```
In[1]:= M = {{1, 3}, {5, 7}}
```

```
In[2]:= v = {2, 9}
```

```
In[3]:= E2 = IdentityMatrix[2]
```

```
In[4]:= A = DiagonalMatrix[{a1,a2,a3}]
```

Darüberhinaus kann natürlich auch die Eingabe-Palette genutzt werden.

Mithilfe des Befehls `Import[]` ist es auch möglich (2D)-Matrix-Daten aus einer Datei einzulesen:

```
In[5]:= B = Import["data.dat", "Table"]
```

Man kann dann diverse Operationen mit Matrizen durchführen, z.B. die Inverse finden oder zwei Matrizen multiplizieren:

```
In[5] := Inverse[A]
```

```
In[6] := Inverse[M] . M
```

Das Ergebnis kann auch wieder in eine Datei exportiert werden:

```
In[7] := Export["dateiout.dat", %, "Table"]
```

Das Schlüsselwort "Table" weist Mathematica an, zweidimensionale Daten, also eine Tabelle, auszugeben oder einzulesen. Eine eindimensionale Liste (Vektor) kann analog mit "List" gelesen/geschrieben werden.

Aufgabe 3.11 Algebra

- 1 Wie lautet die Inverse der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ? \quad (10)$$

- 2 Bestimmen Sie den Wert der Determinanten der Matrix, die in der Datei `~/htodt/matrix1.dat` gespeichert ist. Lesen Sie dazu die Datei mithilfe von `Import[]` ein.

Bsp.: Mathematica & Numerische Relativitätstheorie

- Einsteinsche Feldgleichungen mit Raumzeitkoordinaten μ, ν

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (11)$$

mit Tensoren $G_{\mu\nu}$ (Einsteintensor), $g_{\mu\nu}$ (Metrik) und $T_{\mu\nu}$ (Energieimpulstensor), wobei

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} \quad (12)$$

und $R_{\mu\nu}$ ist der Ricci-Tensor, der sich aus dem Riemannschen Krümmungstensor durch **Verjüngung** $R_{\mu\lambda} = R^{\nu}_{\mu\nu\lambda}$ ergibt. Und der Krümmungsskalar R aus $R = g^{\mu\rho}R_{\mu\rho}$

- Einsteinsche Summenkonvention: über doppelt schräg gestellte Indizes wird summiert:

$$c_{\mu}x^{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 c_{\mu}x^{\mu} = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (13)$$

spart viel Schreibarbeit. Griechische Indizes für Zeit (0) und Raum (1,2,3)

- Die Feldgleichungen sind partielle Differentialgleichungen, da z.B. der Krümmungstensor mittels Christoffelsymbolen Γ

$$R^{\nu}_{\mu\lambda\rho} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\nu}_{\alpha\rho} \quad (14)$$

usw.

- Die Feldgleichungen können nur für bestimmte symmetrische Probleme analytisch gelöst werden (z.B. Schwarzschild-Metrik für "Punktmasse"). Im Allgemeinen müssen sie numerisch integriert werden.

Dazu müssen sie erst einmal komponentenweise aufgestellt werden. Dies kann ein symbolisches Lösungsprogramm wie Mathematica leisten, siehe z.B.

<https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0404023.pdf> → *Kranc* um tensorielle Gleichungen mittels Mathematica in C- oder Fortran-Code zu verwandeln.

- aktuelle Anwendungen: Signalsynthese für Detektion von Gravitationswellenereignissen von verschmelzenden kompakten Objekten (Schwarzes Loch + Schwarzes Loch, Schwarzes Loch + Neutronenstern, Neutronestern + Neutronenstern)
→ eigentliche Berechnung des von Mathematica erzeugten Codes erfolgt auf Supercomputern

Bezüglich der Syntax von Mathematica gilt es folgendes zu beachten:

- Die Namen von Mathematica-Funktionen beginnen immer mit einem **Großbuchstaben**, z.B. `Plot[]`, `Sin[]`.
- Argumente von Funktionen werden in **eckigen Klammern []** eingeschlossen.
- Jede Anweisung wird mit **SHIFT + ENTER** abgeschlossen.
- Besteht ein Argument aus mehreren Einträgen, so werden diese mit **geschweiften Klammern { }** als Liste zusammengehalten.
- Definitionen von Funktionen erfolgen mittels `:=`, z.B. `f[x_] := x^2`, Variablenzuweisungen nur mit `=`, z.B.: `x = 4 - 5/2`.