Strahlungskopplung in nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldern der Winde massereicher Sterne

Diplomarbeit

vorgelegt von

Robert Nikutta

an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Potsdam

am

17. Juni 2003

Betreut von

Priv.-Doz. Dr. Achim Feldmeier

2. Gutachter:

Prof. Dr. Wolf-Rainer Hamann

Twinkle, twinkle little star
I don't wonder what you are,
For by spectroscopic ken
I know that you are hydrogen.

Ian D. Bush

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Winde von OBA- und Wolf-Rayet-Sternen

Alle heißen, massereichen Sterne strömen Materie in ihre Umgebung ab, sie besitzen einen Wind. Die dafür verantwortlichen Mechanismen können vielfältig sein. Unter anderem werden koronale Heizung, magnetische Flüsse und Strahlungsdruck diskutiert. Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich ausschließlich mit den zuletzt genannten, den sogenannten *liniengetriebenen Winden*. Durch Absorption und anschließende Reemission von photosphärischen Photonen erfahren die Gasatome einen Impulsübertag, woraus ihre Beschleunigung resultiert (Pauldrach et al. 1994, 2001; Hamann & Koesterke 1998, 2000; Hillier & Miller 1998).

Mindestens ebenso vielfältig wie die möglichen Ursachen der Materieabströmungen sind auch die Objekte, in welchen jene Winde ihren Ursprung haben. Auf allen Größen- und Zeitskalen sind Winde in beobachtet worden, in den meisten Fällen durch Signaturen in den Spektren dieser Objekte. Sowohl uralte rote Riesen als auch extrem junge, blaue Riesensterne weisen Zeichen von Winden auf, ebenso wie unsere Sonne als eine relativ kleine Windquelle und ganze Quasare am anderen Ende der Größenskala.

Man unterscheidet die Materieströme außerdem aufgrund ihrer Geometrie. Die grundlegendsten Modelle nehmen sphärische Symmetrie des Windes und einen zentralen Körper an, es sind jedoch auch Abweichungen von dieser Symmetrie vorstellbar, ebenso wie azimutalsymmetrische Winde von Akkretionsscheiben, kollimierte Materieströme (Jets) oder stark inhomogene, geklumpte Winde, wie sie beispielsweise bei den Wolf-Rayet-Sternen favorisiert werden. Die folgenden Kapitel werden sich mit stationären, also zeitlich unveränderlichen, sphärisch symmetrischen Winden von heißen und massereichen Sternen vom Spektraltyp O, B und A befassen. Auf extremere Erscheinungen, wie beispielsweise Winde von Wolf-Rayet-Sternen kann im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden.

Wegen ihrer großen Massen von typischerweise 10 bis 50 Sonnenmassen und der damit einhergehenden hohen Effektivtemperaturen von mehreren Zehntausend Kelvin verbrennen O-, B- und A-Sterne ihren thermonuklearen Brennstoff auf relativ kurzen Zeitskalen von nur wenigen Millionen Jahren. Jeder dieser Sterne muss daher im Augenblick der Beobachtung höchstens einige Millionen Jahre alt sein. OBA-Sterne werden deshalb auch junge Sterne genannt. Zusammen mit den enormen Temperaturen in ihren Photosphären geht ein teilweise extrem ultraviolettes Strahlungsspektrum einher. Die Photonen des enormen UV-Strahlungsfeldes sind in der Lage, erheblichen Impuls auf die den Stern umgebenden Gasmassen zu übertragen.

Es gibt im Wesentlichen zwei globale Parameter, welche einen heißen Sternwind charakterisieren. Zum einen ist es seine Endgeschwindigkeit v_∞, zum anderen die Massenverlustrate $\dot{M}$ des den Wind produzierenden Sterns. Die Existenz einer Endgeschwindigkeit erklärt sich leicht dadurch, dass sich das den Wind beschleunigende photosphärische Strahlungsfeld des Sterns mit zunehmender Entfernung vom Stern geometrisch verdünnt und die relative Strahlungsbeschleunigung schließlich an einem bestimmten Ort verschwindet. Die Geschwindigkeit der Gasmassen an diesem Ort ist die Endgeschwindigkeit v_∞ des Windes, eine weitere Beschleunigung ist nicht möglich. Blauverschiebungen in den Spektren besagter Sterne weisen auf Endgeschwindigkeiten bis zu 3000 km/s hin, also ein Prozent der Lichtgeschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit wird innerhalb von nur Minuten bis Stunden erreicht.

Die Massenverlustraten der hier diskutierten Sterne erreichen Werte bis zu einigen 10^{-6} Sonnenmassen pro Jahr für O-Überriesen und einigen 10^{-5} Sonnenmassen pro Jahr für Wolf-Rayet-Sterne. Dies hat Einfluss auf die atmosphärische Dichteschichtung, die chemische Zusammensetzung und damit sogar auf die gesamte Entwicklung dieser Gestirne (Langer et al. 1994; Maeder & Meynet 1991, 2000). Fernerhin trägt der Sternwind zur Verdichtung und Metallanreicherung des interstellaren Mediums (ISM) bei (Oey 1996). Durch Spektroskopie der Wind-Spektrallinien (Kudritzki & Hummer 1990) kann die stellare Leuchtkraft aus dem Massenverlust $\dot{M}$ und der Windendgeschwindigkeit v_∞ bestimmt werden (sogenannte Windimpuls-Leuchtkraft-Relation; Kudritzki et al. 1994), womit massereiche Sterne zu primären extragalaktischen Entfernungsindikatoren werden (Kudritzki et al. 1999; Bresolin et al. 2002). Das Strahlungsfeld der massereichen Sterne wird durch den stellaren Wind mitgeprägt (Kudritzki & Puls 2000). Dies betrifft vor allem die ionisierenden Flüsse, welche wesentlich in Starburst-Modelle (Leitherer et al. 2001) und Rechnungen zur Reionisierung des Universums bei $z > 5.8$ durch prägalaktische Sterne eingehen (Bromm et al. 2001). Es ist bisher unklar, ob diese Reionisierung durch Quasare oder massereiche Sterne geschah (Lamb & Reichart 2000).

1.2 Abbremsung im Wind

Wegen ihrer Bedeutung für die Sternentwicklung, Dynamik und Chemie des interstellaren Mediums und selbst für die Entwicklung des Universums gibt es zahlreiche Arbeiten zur Dynamik der Winde heißer, massereicher Sterne. In den letzten Jahren wurde immer deutlicher, dass der in erster Näherung als sphärisch symmetrisch angenommene Wind kein monoton anwachsendes radiales Geschwindigkeitsfeld $v(r)$ haben muss, sondern dass es zu Abbremsungen des Windes kommen kann. Wir wollen hier nicht auf den großen Themenkreis von hydrodynamischen Stoßfronten im Wind (eine Stoßfront sei – wie in der Hydrodynamik üblich – als lokalisierte Unstetigkeit gedacht) und die damit verbundene Röntgenemission eingehen (Owocki et al. 1988; Feldmeier et al. 1995), sondern auf *ausgedehnte* Abbremsungen.

Das Thema dieser Diplomarbeit ist die Strahlungskopplung in nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldern der Winde massereicher Sterne, und wie der Titel schon verdeutlicht spielen ausgedehnte Gebiete abbremsenden Windes hierbei eine zentrale Rolle dieser Arbeit. Aufgrund dieser Bedeutung stellen wir nachfolgend eine kurze Liste der bislang bekannten astrophysikalischen Hinweise auf das tatsächliche Vorkommen von Windabbremsungen zusammen:

(1) *Rotverschobene Linienabsorption*
Nicht nur Windabbremsung $dv/dr < 0$, sondern deren letzte Konsequenz $v < 0$, also Reakkretion von Windgas wird aus beobachteten *rot*verschobenen Absorptionskomponenten geschlossen. So beispielsweise in P Cygni (Kuan & Kuhi 1975), τ Sco (Lamers & Rogerson 1978) und Rigel (Israelian et al. 1997). Mögliche Gründe für einwärts fallende Wolken und Reakkretion sind Massenüberladung des Windes oder Magnetfelder. Fernerhin scheint bei Be-Sternen Reakkretion mit photosphärischen Ejektionsprozessen und Scheibenentstehung einherzugehen (μ Cen: Peters 1998; FS CMa: Israelian & Musaev 1997).

(2) *Sehr heißes Röntgenplasma*
Eine harte Röntgenkomponente im Spektrum des B0-Sterns τ Sco (z.B. Cohen et al. 1997) sowie mit dem Chandra-Röntgensatelliten entdeckte Emissionslinien hochionisierten Eisens (Fe XXIV und Fe XXV) im Spektrum von θ Ori C (Schulz et al. 2000) deuten auf extrem hohe Windtemperaturen hin. Howk et al. (2000) schlagen vor, dass hier dichte Gaswolken zurück zur Photosphäre fallen. Die Grenzschicht zwischen aufwärts strömendem Windgas und fallenden Wolken weist hohe Temperaturen und harte Röntgenstrahlung auf.

(3) *Discrete Absorption Components*
Sogenannte *Discrete Absorption Components* (DACs) (siehe Abbildung 1.1; Henrichs et al. 1983; Prinja & Howarth 1986; Massa et al. 2000) propagieren bei fast allen bekannten O-Sternen durch die nichtgesättigten P Cygni-Linienprofile. Die DACs entstehen bei etwa einem Viertel der Windendgeschwindigkeit und laufen blauwärts durch das Linienprofil zur Endgeschwindigkeit. Kaper et al. (1996) veröffentlichten einen Katalog solcher DACs.

Die DACs dienen beispielsweise zur Bestimmung der Windendgeschwindigkeit (Prinja & Howarth 1986). Ihre volle Bedeutung zeigt sich bei der Bestimmung der Massenverlustrate aus der Hα-Linie. Die Massenverlustrate als zentraler Parameter der OBA-Sternwinde geht – wie oben erwähnt – in Entwicklungssrechnungen, Rechnungen zur Anreicherung des interstellaren Mediums und in die Windimpuls-Leuchtkraft-Relation ein. Besonders bei A-Überriesen, den optisch hellsten Sternen mit liniengetriebenen Winden und somit

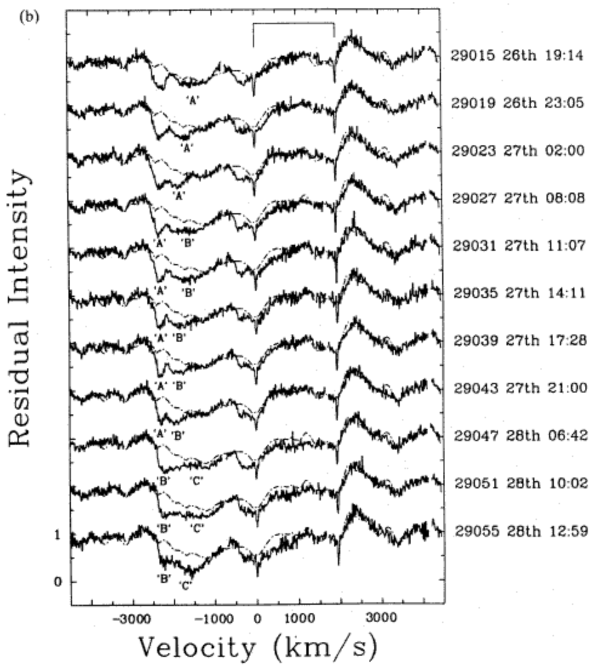

Abbildung 1.1: Propagierende Discrete Absorption Components, markiert mit A, B und C im Si IV P Cygni-Linienprofil des Sterns 68 Cyg. Am rechten Bildrand die Universal Time. Aus Prinja & Howarth (1988).

Idealkandidaten für die extragalaktische Entfernungsbestimmung, zeigt die Hα-Linie eine komplexe Morphologie und Entwicklung (Kaufer et al. 1996).

Als Ursache der DACs werden photosphärische Flecken angenommen, die mit dem Stern mitrotieren (*Corotating Interaction Regions*, CIRs: Mullan 1984). Sie sollten eine langsamere radiale Windabströmung als die fleckenfreie Umgebung bewirken. Die langsamen Windstrahlen wickeln sich stärker auf als benachbarte schnelle Strahlen und es entsteht eine spiralförmige Wechselwirkungszone mit Gasverdichtung in einer Stoßfront (Abbildung 1.2, links). Diese spiralförmige Verdichtung sendet eine strahlungsakustische Welle sternwärts, d.h. *upstream* gegen die Strömungsrichtung. Da der Wind für diesen Wellentyp bereits Machzahlen > 1 erreicht hat, werden die Wellen langsam nach außen advektiert und erscheinen als DACs im Linienprofil. Diese Welle erscheint als Extraabsorption, weil sie als breites Plateau langsam abbremsenden Windes propagiert (siehe Abbildung 1.2, rechts) und die optische Tiefe umgekehrt proportional zum Geschwindigkeitsgradienten ist. Solche Geschwindigkeitsplateaus waren der erste *empirische* Ansatz, um DACs in beobachteten P Cygni-Linienprofilen zu fitten (Hamann 1980).

(4) *Plasmarunaway*
Vollständig ionisierter Wasserstoff und Helium stellen den größten Massenanteil der OB-Sternwinde, können aber natürlich nicht durch Linienstreuprozesse beschleunigt werden. Dieses passive Hintergrundplasma wird mittels Coulombstößen von den aktiv beschleu-

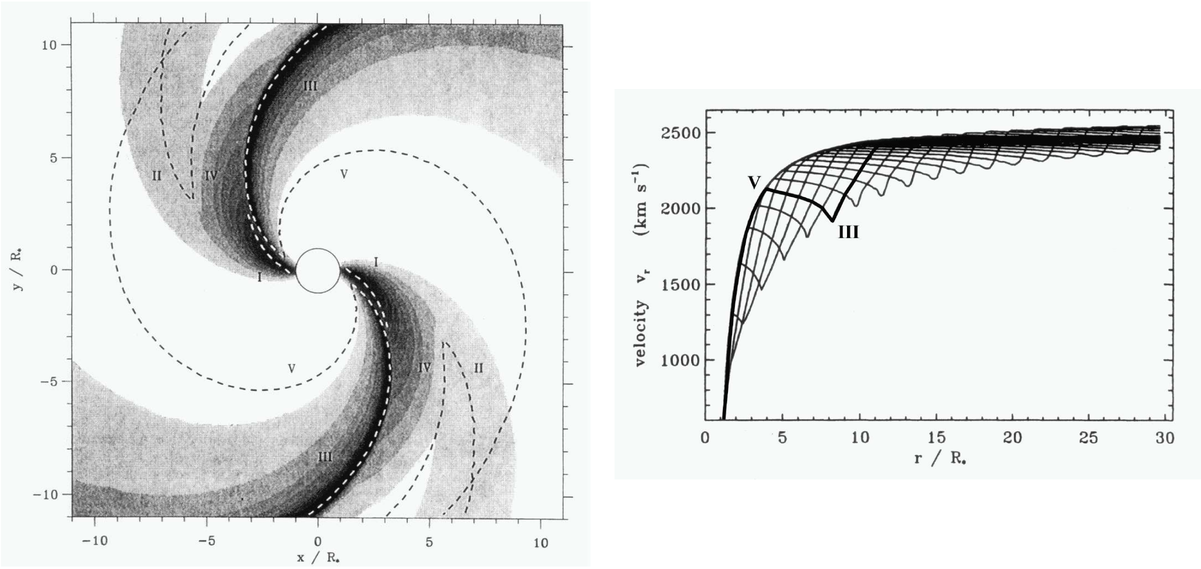

Abbildung 1.2: *Links:* Blick auf eine *Corotating Interaction Region*. Der Logarithmus der Dichte ist über 2 Dekaden als Graustufenwert gezeigt (schwarz: dicht, weiß: dünn). III markiert die primäre CIR-Verdichtung durch Wechselwirkung verschieden schneller Windstrahlen, V markiert den *radiative-acoustic Kink*, mit dem das *Plateau* im Geschwindigkeitsfeld an den inneren, beschleunigten Wind anschließt. *Rechts:* Verlauf der radialen Windgeschwindigkeit bei verschiedenen Azimutwinkeln. Der Ort tiefster Einsenkung bezeichnet wegen stationärem Massenfluss die CIR-Verdichtung. Aus Cranmer & Owocki (1996).

nigten Metallionen mitgerissen. Castor et al. (1976) untersuchen die Frage der möglichen *Abkopplung* der Metalle vom Hintergrundplasma. In einer vielbeachteten Arbeit wurde diese Idee von Springmann & Pauldrach (1992) anhand des Plasma*runaways* aufgenommen, der durch das Maximum der Chandrasekharschen „Reibungs"funktion verursacht wird: für hinreichend große Driftgeschwindigkeiten zwischen H-He-Kernen und Metallionen *fällt* die effektive Coulombreibung mit wachsender Geschwindigkeit, die Driftgeschwindigkeit wächst also weiter und es kommt zum *Runaway* (Dreicer 1959). Springmann & Pauldrach (1992) zeigen, dass dieser bei dünnen B-Hauptreihenwinden auftreten kann. Die Ionenentkopplung wurde zur Erklärung von Häufigkeitsanomalien bei Ap-Sternen (Babel 1995) und Bp-Sternen (Hunger & Groote 1999) herangezogen. Außerdem schlagen Porter & Skouza (1999) vor, dass Ionenentkopplung zu periodischer Schalenakkretion in B-Sternwinden führt, falls die Ionen entkoppeln bevor der Wind die lokale Entweichgeschwindigkeit erreicht hat.

Es war daher eine große Überraschung, als erste stationäre hydrodynamische Rechnungen zum Plasmarunaway ein ganz anderes Ergebnis zeigten (Krticka & Kubat 2000): Die Ionen entkoppeln nicht von den Protonen, sondern beide Komponenten wechseln abrupt und gemeinsam auf einen neuen Lösungszweig mit sehr flachem oder negativem Geschwindigkeitsgradienten. Owocki & Puls (2002) zeigen, dass es im Zweikomponentenplasma einen neuen Mode der strahlungsakustischen Wellen gibt, den sogenannten *ion separation mode*. Der Wind hat bezüglich dieses Wellenmodes Machzahlen kleiner eins. Dies entspricht beim Parkerschen Sonnenwind (1958) der Klasse der Brisenwinde

(Chamberlain 1960), die ebenfalls den hydrodynamischen Grenzfall eines gaskinetischen Prozesses darstellen, der Verdampfung der Sonnenkorona (Brandt & Cassinelli 1966).

(5) *Globale Windentwicklung*
Eine grundsätzliche Frage für alle Sternwinde ist, wie eine statische Atmosphäre sich zur eindeutigen, transsonischen Windlösung hin entwickelt und warum dieser der Vorzug vor einer subsonischen Brisenlösung gegeben wird. Diese Entwicklung oder Transformation des Windes kann als ein langsames Durchlaufen verschiedener zeitunabhängiger, stationärer Lösungen idealisiert werden (ähnlich der reversiblen Prozessführung in der Thermodynamik). Als Beispiele für solche Gleichgewichtssequenzen von Windlösungen möge der Leser z.B. Velli (1994) konsultieren. Für den Sonnenwind liegt die Annahme der transsonischen Parkerlösung (in teilweiser Entsprechung zur Lavaldüse) an den äußeren Randbedingungen "im Unendlichen", konkret am nahezu verschwindenden Gasdruck im interstellaren Medium, der supersonische Strömung erforderlich macht. Ein davon geringfügig abweichender Prozess wurde für die Transformation von liniengetriebenen Winden zur kritischen CAK-Lösung vorgeschlagen (Feldmeier & Shlosman 2000, 2002). Hier führt eine neuartige Dispersion der strahlungsakustischen Wellen zur systematischen Umsetzung von Wellenenergie in kinetische Windenergie. Unter bestimmten Bedingungen kann es zur Ausbildung von *überladenen* Lösungen kommen: Diese entsprechen den *choked solutions* der Lavaldüse oder des Sonnenwinds (Chapman 2000; Cannon & Thomas 1977). Sie bremsen über einen breiten Radiusbereich ab und können gegebenenfalls wie im Howkschen Wolkenmodell (s.o.) negative Geschwindigkeiten annehmen.

(6) *Überladene Winde*
Es hat sich vor einigen Jahren gezeigt (und ist auch anschaulich einleuchtend), dass Winde mit breiten Abbremsbereichen praktisch (einige theoretische Details fehlen hier noch) identisch mit überladenen Winden sind. Bei den letzteren wird in der Photosphäre ein Massenverlust initiiert, der an bestimmten Orten im Wind (dann im wahrsten Sinne *kritischen* Punkten) nicht beibehalten werden kann (vgl. die Engstelle bei einer Lavaldüse). Wir geben uns hier mit einer kurzen Aufstellung von Situationen zufrieden, bei denen Überladung gefunden (wenngleich nicht immer explizit so genannt) wurde: (a) schnelle Rotation (Abbott & Friend 1986); (b) liniengetriebene Winde von Akkretionsscheiben (Proga et al. 1998); (c) Einfluss von non-LTE Effekten auf die Linienverteilungsfunktion (Petrenz & Puls 2000); (d) CIRs und DACs, s.o.; (e) harte Röntgenemission (Howk et al. 2000, siehe oben).

1.3 Sobolevnäherung

Eine elegante, in stark beschleunigten Medien anwendbare Methode sich den Sternwinden zu nähern, stellt die nach V.V. Sobolev benannte Sobolevnäherung dar, von vielen auch als Sobolevtheorie geschätzt.

Sind die für die Strahlungsbeschleunigung maßgeblichen Spektrallinien im Mittel viel

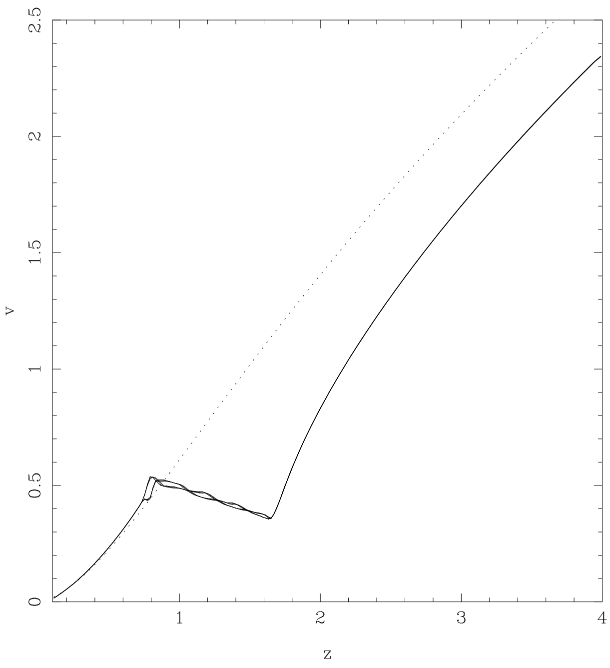

Abbildung 1.3: Stationäres Geschwindigkeitsfeld eines überladenen Windes (durchgezogene Kurve) und des monotonen CAKschen Windes (gestrichelte Kurve). Die Oszillation im Abbremsbereich ist eine auswärts laufende strahlungsakustische Welle, die durch explizite Störung des Windes bei $z = 0.8$ angeregt wird. Aus Feldmeier & Shlosman (2002).

weiter getrennt als ihre Linienbreite, dann steht das Linienensemble wie ein „Kamm“ im kontinuierlichen Sternspektrum. Die Linien absorbieren das Sternlicht, die Materie wird beschleunigt und der Linienkamm wird als ganzes blauverschoben, in ein bislang unabsorbiertes Sternkontinuum hinein. Damit setzt erneute Beschleunigung ein, die nicht hinter der ursprünglichen zurücksteht. Liniengetriebene Winde erreichen – sehr im Gegensatz zu kontinuumsgetriebenen Winden – große Endgeschwindigkeiten. Der Wind ist ein selbstregulierender Prozess, der seine Massenverlustrate und damit Dichte so einstellt, dass der mittlere Abstand zwischen marginal optisch dicken ($\tau \approx 1$), windtreibenden Linien einer Dopplerverschiebung um die Endgeschwindigkeit v_∞ entspricht. Somit kann jede dieser marginal optisch dicken Linien gerade einen Anteil v_∞/c des Spektrums in Materieimpuls umsetzen. Die CAK-Theorie zeigt, dass $v_\infty \approx v_{\mathrm{esc}}$ ist, die Entweichgeschwindigkeit vom Stern. Typischerweise liegt aber v_{esc} zwei Größenordnungen über der thermischen Geschwindigkeit und folglich auch über den thermischen Linienbreiten von dopplerverbreiterten Spektrallinien. V. Sobolev hat dies Faktum für eine grundlegende Näherungslösung der Integrodifferentialgleichung des Strahlungstransports genutzt. Mit thermischer Geschwindigkeit $v_{\mathrm{th}} \ll v_\infty$ kann $L \ll H$ gesetzt werden. Dabei ist L die Längenskala des Strahlungstransports, nämlich die Zonenbreite $L = v_{\mathrm{th}} \,/\, (dv/dr)$, über die hinweg eine bestimmte Spektrallinie Photonen einer Frequenz absorbieren kann, und $H = -\rho \,/\, (d\rho/dr)$ die hydrodynamische Längenskala. Sobolev setzte an, dass man den Strahlungstransport völlig lokal beschreiben kann: die Dopplerprofilfunktion wird durch eine Dirac'sche Delta-Funktion ersetzt und alle („nichtlokalen“) Integrale werden damit

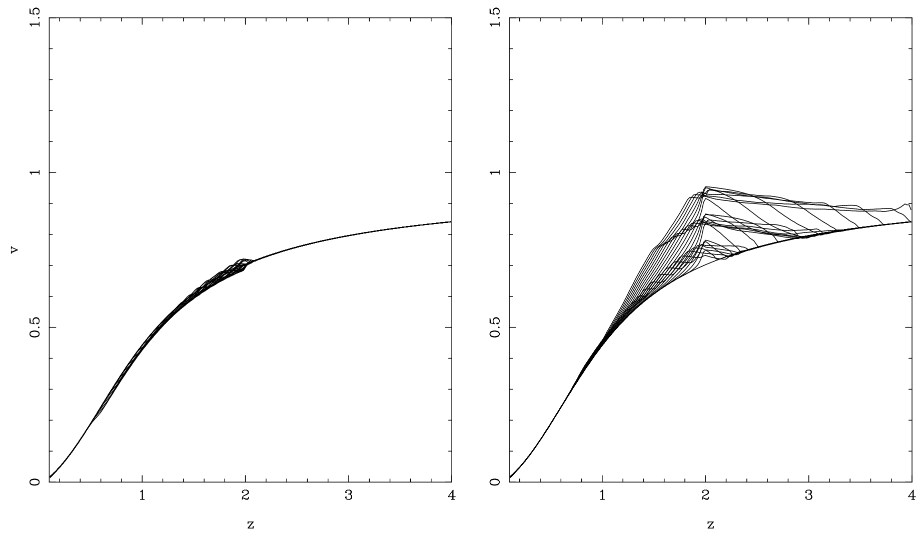

Abbildung 1.4: *Links: Upstream*-Ausbreitung von strahlungsakustischen Wellen im Geschwindigkeitsfeld eines liniengetriebenen Windes. Die Wellen werden durch eine Störquelle mit 4% Dichteamplitude bei $z = 2$ erzeugt. *Rechts:* Wird bei sonst gleichen Modellparametern die Störamplitude verdoppelt, entstehen *negative* Geschwindigkeitsgradienten und es kommt zum Wellen*runaway*. Aus Feldmeier & Shlosman (2002).

rein lokal und analytisch lösbar.

1.3.1 Einpunkt-Sobolevnäherung

In einem beschleunigenden, radial abströmenden Wind erscheinen von jedem beliebigen Punkt r aus gesehen *alle* anderen Punkte rotverschoben. Dies ist analog zur Aussage, dass in einem expandierenden Universum jeder Ort alle anderen Orte rotverschoben sieht. Die weitreichende Schlussfolgerung ist, dass in der Sobolevnäherung unendlich scharfer Linien jedes Photon *höchstens* einmal im Wind absorbiert werden kann. (Präziser: das Photon wird innerhalb der Sobolevzone der Dicke $L = v_{\mathrm{th}} \,/\, (dv/dr)$ vielfach gestreut. Es gibt im Wind keine zwei disjunkten Sobolevzonen für ein Photon.)

1.3.2 Nichtlokale Kopplung in nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldern

Wir haben oben Beispiele für Windabbremsung und damit notwendigerweise einhergehend negative Gradienten der radialen Windgeschwindigkeit aufgezählt. In nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldern kommt es zu nichtlokalen Strahlungskopplungen. Ein Photon kann in derselben Spektrallinie an verschiedenen Orten gestreut werden, die dieselbe auf seine Laufrichtung projizierte Geschwindigkeit haben (Grachev & Grinin 1975; Rybicki & Hummer 1978). Die gegenseitige Bestrahlung dieser *Resonanzzonen* oder *Resonanzflächen* führt zu nichtlokalen Strahlungskopplungen. Die Sobolevnäherung macht zwar einen strikt lokalen Ansatz, kann aber auf ingeniöse Weise verallgemeinert werden, um solchen nichtlokalen Kopplungen Rechnung zu tragen (Rybicki & Hummer 1978).

1.3.3 Bisherige Windrechnungen lediglich in 1-Punkt Sobolevnäherung

Es ist ein erstaunliches Faktum, dass alle bisherigen numerischen hydrodynamischen Simulationen liniengetriebener Winde in strenger Einpunkt-Sobolevnäherung durchgeführt wurden.

Erstens: alle Arbeiten, die sich nicht explizit mit der Lucy-Owocki-Instabilität (LO-Instabilität) beschäftigen, verwenden die Sobolevnäherung zur Berechnung der Strahlungskraft. Im einfachsten Fall ($\alpha = 1/2$) geht die Sobolevkraft nach einer Integration über die Linienverteilungsfunktion mit $\sqrt{dv/dr}$. Treten dabei in der zeitlichen Entwicklung momentan negative Geschwindigkeitsgradienten auf, wird die Kraft entweder mittels abs(dv/dr) oder max(0, dv/dr) berechnet. Im ersten Fall erhält man die maximal mögliche Kraft. Photonen spüren jedoch in diesem Fall nicht, ob der Wind beschleunigt oder bremst. Im zweiten Fall wird die minimale Kraft ausgewählt, entsprechend der Vorstellung, dass alle Photonen an einer vorherigen Resonanzzone bereits absorbiert und thermalisiert wurden. A priori ist deutlich, dass bereits vor der Region mit negativem Geschwindigkeitsgradienten eine Resonanz liegt.

Obgleich die wahre Kraft zwischen diesen beiden Extremen liegen muss, können obige Näherungen langfristig kein befriedigender Zustand sein, denn:

(i) In Gegenwart instantaner Strahlungskopplung (die bisherige Windtheorie bei Geschwindigkeiten von 1 Prozent Lichtgeschwindigkeit ist in nichtrelativistischer Näherung formuliert) stellt sich die Frage, ob strahlungsakustische Wellen, die sonst zur Einstellung der kritischen, trans„sonischen“ Windlösung führen, ihre zentrale Rolle behalten: kann nichtlokale Strahlungskopplung die inhärent kritische Natur der CAKschen Windlösung qualitativ verändern?

(ii) max(0, dv/dr) verhält sich manchmal qualitativ anders als abs(dv/dr) und kann bei Rechnungen zur globalen Windentwicklung wie oben in (5) besprochen überhaupt zu Akkretion anstatt zu einem Wind führen .

Zweitens: in Arbeiten, die die instabile Windstruktur aufgrund der L-O-Instabilität behandeln, wird die optische Tiefe in Spektrallinien jenseits der Sobolevnäherung zwar exakt auf extrem feinen numerischen Gittern berechnet. Es wird jedoch sowohl in der *smooth source function*-Näherung von Owocki (1991) als auch in der recht komplexen *escape integral source function*-Näherung von Owocki & Puls (1996) keine mit der mehrfachresonanten Windstruktur konsistente Quellfunktion benutzt, sondern eine nichtiterierte sobolevsche.

1.3.4 Iteration der Quellfunktion nach Rybicki und Hummer

Das Ziel vorliegender Arbeit ist es, in nichtmonotonen, über breite Bereiche abbremsenden Winden die von Rybicki & Hummer (1978) entwickelte Iteration der Quellfunktion in verallgemeinerter Sobolevnäherung anzuwenden und damit eine Linienkraft bereitzustellen, die mit dem Windgeschwindigkeitsfeld konsistent ist.

In der RH-Methode wird die Strahlungskopplung von makroskopisch separierten Resonanzzonen (d.h. Abstand der Zonen größer als Zonendicke) mittels klassischer Lambda-Iteration behandelt. Dies mag überraschen, weil die Lambda-Iteration üblicherweise zur schleichenden Konvergenz führt, d.h. auch nach sehr vielen, numerisch kaum zu bewältigenden Iterationen (z.B. 10^4) die finale Lösung noch nicht erreicht ist. Rybicki und Hummer konnten zeigen, dass in ihrem verallgemeinerten Sobolevformalismus die Lambda-Iteration schnell konvergiert. In ihrem Artikel wird hierzu eine abstrakte mathematische Begründung über Integralkernnormen gegeben; physikalisch scheint uns der Grund in der Disjunktheit der Kopplungsorte zu liegen.

1.3.5 Geometriefreier Zweipunkt-Algorithmus

Bei der Berechnung der lokalen Quellfunktion an einem beliebigen Ort r im Wind sind wegen der nichtlokalen Kopplungen Beiträge aus verschiedenen Richtungen zu berücksichtigen, denn neben dem intrinsischen Sternlicht beleuchten auch die oben erwähnten Resonanzflächen jenen betrachteten Ort mit Photonen entsprechender Frequenz. Dieses Problem wirft große Schwierigkeiten auf, denn abhängig vom konkreten Verlauf des Windgeschwindigkeitsgesetzes und der Lage des Ortes im Wind verändert sich die Geometrie der Beiträge liefernden Resonanzflächen erheblich. Kapitel 5 dieser Arbeit wird ausführlich davon handeln.

Auf den ersten Blick scheint diese starke Abhängigkeit der Quellfunktion von der Geometrie der Resonanzflächen lediglich – wenn überhaupt zufriedenstellend – durch numerische Rechnungen beherrschbar, indem vom untersuchten Ort im Wind Sichtstrahlen in alle Himmelsrichtungen geschossen werden, entlang derer das zur Quellfunktion am Ort r beitragende Licht aufsummiert wird. Für jeden Sichtstrahl und in jeder Entfernung von r muss bei diesem Verfahren die Resonanzbedingung überprüft werden.

Rybicki & Hummer (1978) diskutieren eine Substitution der bei der Berechnung der Quellfunktion S auftretenden Winkelintegrale $\int d\mu$ durch Wegintegrale $\int dr$. Anhand eines angenommenen hyperbolischen Windgeschwindigkeitsgesetzes $v(r) = 1/r$ zeigen die Autoren wie die Schwierigkeit der Geometriebehaftung bewältigt und in ein rein analytisches Problem überführt werden kann. Anschließend wird die Quellfunktion $S(r)$ kraft schnell konvergierender Lambda-Iteration berechnet.

Unter Annahme sphärischer Symmetrie und strikter Zweipunktkopplung (das wird in R&H durch die Wahl des Test-Geschwindigkeitsgesetzes erreicht), sowie bei Beachtung der Resonanzbedingungen am Ort r und einem anderen, beliebigen Resonanzort r' kann durch Drehung des aus dem Windgeschwindigkeitsgesetz resultierenden Resonanzflächensystems eine Gleichung hergeleitet werden, welche sich hervorragend zur numerischen Lambda-Iteration der gesuchten Quellfunktion am Ort r verwenden lässt. Diese Beziehung ist absolut unabhängig von der Geometrie der Resonanzflächen und strikt analytisch.

1.3.6 Geometriefreier Dreipunkt-Algorithmus

Folgendes Problem erwächst bei tiefergehender Betrachtung: Der Formalismus von Rybicki & Hummer funktioniert zunächst nur bei reiner Zweipunktkopplung, wenn also die Resonanzflächen vollständig konvex sind und jeder durch den Ort r verlaufende Sichtstrahl somit höchstens ein weiteres Mal eine Resonanzfläche schneidet. Wie aus Abbildung 1.3 unmittelbar ersichtlich ist, kann es in nichtmonotonen Winden mit Abbremsbereichen nicht nur zu Zweipunkt- sondern auch zu Dreipunktkopplung kommen – es gibt Gebiete im Wind, in welchen drei Punkte miteinander in resonanter Kopplung stehen.

Rybicki & Hummer geben zu diesem Problem am Ende ihres Artikels ein allgemeines Kochrezept an, in welchem jedoch der geometriefreie Zugang verloren geht. Ziel dieser Diplomarbeit ist es, die Methode von Rybicki & Hummer für den Fall der Dreipunktkopplung zu generalisieren, sodass eine analytische Bestimmung der Quellfunktion auch bei Winden mit beschleunigten *und* abbremsenden Bereichen möglich wird, ohne die Geometrie der relevanten Resonanzflächen kennen zu müssen.

Hiermit sind wir hinreichend weit in technische Fragestellungen gelangt, um mit dem Hauptteil der Arbeit zu beginnen.

Kapitel 2

Hydrodynamik

Zur Förderung des Verständnisses der gesamten vorliegenden Arbeit sollen im Folgenden exemplarisch einige klassische Probleme der Hydro- und Strahlungshydrodynamik von Gasen studiert werden. Zunächst widmen wir uns dem Problem des Sonnenwindes und seiner richtigen Deutung durch Parker. Anschließend befassen wir uns mit durch eine Lavaldüse strömendem Gas und kommen schließlich zu den liniengetriebenen Winden, welche die Grundlage der weiteren Arbeit bilden.

2.1 Parkerscher Sonnenwind

2.1.1 Analytische Lösung

Zunächst soll die hydrodynamische Natur des Sonnenwindes betrachtet und eine Lösung, wie sie von Parker (1963) hergeleitet wurde, vorgestellt werden. Hierbei werden folgende Annahmen gemacht:

(i). Sphärische Symmetrie
Diese bedeutet vor allem $\vec{v}(\vec{r}) = v(r)$. Die Geschwindigkeit ist rein radial und hängt nur noch von der Entfernung zum Zentralstern ab.

(ii). Isothermer Wind
Der Wind sei isotherm, also $T(r) = const.$ Wie beispielsweise aus der Chapmanschen Wärmeleitungstheorie aus dem Jahr 1957 folgt, geht der Temperaturabfall mit $T \sim r^{-2/9}$, was Parker in seiner Näherung als isotherm approximierte.

(iii). Stationarität
Die gesuchte Lösung des Sonnenwindes soll (zumindest nach endlicher Zeit t) nicht mehr von der Zeit abhängen.

Nun betrachten wir die Kontinuitäts- sowie die Eulergleichung für dieses Problem und leiten Parkers Lösung her.

Kontinuitätsgleichung:

$$\rho\, v\, r^2 = const. \tag{2.1}$$

Die logarithmische Ableitung davon ist

$$\frac{(\rho\, v\, r^2)'}{\rho\, v\, r^2} = 0,$$

$$\frac{\rho'\, v\, r^2}{\rho\, v\, r^2} + \frac{\rho\, v'\, r^2}{\rho\, v\, r^2} + \frac{\rho\, v\, (r^2)'}{\rho\, v\, r^2} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{v'}{v} + \frac{(r^2)'}{r^2} = 0, \tag{2.2}$$

wobei alle gestrichenen Größen die Ortsableitung d/dr bezeichnen. Dadurch folgt

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{v'}{v} + \frac{2r}{r^2} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{v'}{v} + \frac{2}{r} = 0. \tag{2.3}$$

Eulergleichung:

$$vv' = -\frac{1}{\rho}\, p' - \frac{GM}{r^2}. \tag{2.4}$$

Aus der isothermen Bedingung $p = a^2 \rho$ folgt $p' = a^2 \rho'$ und damit

$$vv' = -a^2\, \frac{\rho'}{\rho} - \frac{GM}{r^2}. \tag{2.5}$$

Benutzen wir jetzt noch (2.3), so erhalten wir sofort

$$vv' = -a^2 \left(-\frac{v'}{v} - \frac{2}{r} \right) - \frac{GM}{r^2} = a^2 \left(\frac{v'}{v} + \frac{2}{r} \right) - \frac{GM}{r^2}. \tag{2.6}$$

Nach Umstellung zu

$$\left(v - \frac{a^2}{v} \right) v' = \frac{2a^2}{r} - \frac{GM}{r^2} \tag{2.7}$$

und mit $v' = dv/dr$ lässt sich die Gleichung durch Separation der Variablen leicht integrieren, wobei alle durch einen Stern gekennzeichneten Größen jeweils am Ort der Sternoberfläche definiert sein sollen:

$$\int_{v_*}^{v(r)} \left(v - \frac{a^2}{v} \right) dv = \int_{r_*}^{r} \left(\frac{2a^2}{r} - \frac{GM}{r^2} \right) dr. \tag{2.8}$$

Nach Ausführung der Integration folgt

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_*^2}{2} - a^2\, \ln\, v - a^2\, \ln\, v_* = 2\, a^2\, \ln\, r - 2\, a^2\, \ln\, r_* - \left(-\frac{GM}{r} + \frac{GM}{r_*} \right)$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_*^2}{2} - a^2\, \ln \frac{v}{v_*} = 2\, a^2\, \ln \frac{r}{r_*} - \frac{GM}{r_*} \left(1 - \frac{r_*}{r} \right). \tag{2.9}$$

Die Entweichgeschwindigkeit v_e an der Sternoberfläche beträgt $v_e = \sqrt{2GM/r_*}$. Das liefert nach wenigen Umstellungen

$$\frac{v^2}{a^2} - \frac{v_*^2}{a^2} - 2\, \ln \frac{v/a}{v_*/a} = 4\, \ln \frac{r}{r_*} - \frac{v_e^2}{a^2} \left(1 - \frac{r_*}{r} \right) \tag{2.10}$$

und zusammen mit einer auf die Schallgeschwindigkeit a normierten Geschwindigkeit $V = v/a$ sowie auf r_* normierten Entfernungskoordinate $R = r/r_*$

$$V^2 - V_*^2 - \ln \frac{V^2}{V_*^2} = 4 \ln R - V_e^2 \left(1 - \frac{1}{R}\right). \tag{2.11}$$

Für große Radien kann diese Gleichung guten Gewissens um einige Terme verkürzt werden, da sowohl V_*, V_e als auch der logarithmische Term auf der linken Seite klein sind gegenüber V. Wir erhalten dann

$$V^2 = 4 \ln R \qquad\qquad V = 2\sqrt{\ln R}. \tag{2.12}$$

Wir interessieren uns ebenfalls für das Verhalten der Lösung (2.11) am Schallpunkt, also bei $V = 1$. Dieser Punkt ist beim subsonisch startendem Sonnenwind natürlich auch ein kritischer Punkt. Mit $V = 1$ wird (2.11) dann zu

$$1 - V_*^2 + 2 \ln V_* = 4 \ln R_1 - V_e^2 \left(1 - \frac{1}{R_1}\right), \tag{2.13}$$

mit $R_1 = R\,(V{=}1)$. An dieser Stelle sind die Gleichungen für den Sonnenwind vollständig gelöst, sowohl die Eulergleichung (2.4) als auch die Kontinuitätsgleichung (2.1). Es zeigt sich, dass die Frage nach der Massenverlustrate am kritischen Punkt nicht beantwortet werden kann, da jeder Wert von $\dot{M}$ möglich ist. Er wird durch die Dichte ρ_* an der Windbasis bestimmt.

Gleichung (2.11) ist die Parkersche Lösung des Sonnenwindproblems. Als nichtlineare algebraische Gleichung kann sie mittels eines einfachen Wurzelsuchprogramms (z.B. nach Newton-Raphson) für jeden Wert von R beliebig genau gelöst werden. Auf diese Weise ist das gesamte Windgeschwindigkeitsprofil zu gewinnen. Wir wollen zunächst jedoch den Ort des sonischen Punktes R_a finden. Dazu betrachten wir die hydrodynamische Skalenhöhe H_* für eine statische Atmosphäre

$$H_* = \frac{a^2}{g_*}, \tag{2.14}$$

wobei g_* die Gravitationsbeschleunigung an der Sonnenoberfläche bezeichnet. Mit $g_* = GM/R_*^2$ und der Entweichgeschwindigkeit $v_e = \sqrt{2\,GM/R_*}$ folgt

$$H_* = \frac{a^2 R_*^2}{GM} = \frac{2\,a^2 R_*}{v_e^2}. \tag{2.15}$$

Definiert man jetzt noch die auf R_* normierte Skalenhöhe

$$\mathcal{H} = \frac{H_*}{R_*} = \frac{2\,a^2}{v_e^2} = \frac{2}{V_e^2} \tag{2.16}$$

mit $V_e = v_e/a$ als in Einheiten der Schallgeschwindigkeit gemessenen Entweichgeschwindigkeit, so folgt schließlich eine Beziehung zwischen dem sonischen Punkt R_a und V_e,

$$R_a = \frac{1}{2\mathcal{H}} = \frac{1}{4}\,V_e^2. \tag{2.17}$$

Um $V_e = v_e/a$ zu bestimmen, lauten die beiden benötigten Beziehungen

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,GM}{R_*}} \tag{2.18}$$

und

$$a = \sqrt{\frac{\gamma\,kT}{\mu}}. \tag{2.19}$$

Dabei ist a die adiabatische Schallgeschwindigkeit, k die Boltzmann-Konstante und μ die mittlere Teilchenmasse des Plasmas. Einsetzen von (2.18) und (2.19) in den Ausdruck für V_e liefert

$$V_e = \frac{v_e}{a} = \frac{\sqrt{2\,GM/R_*}}{\sqrt{\gamma\,kT/\mu}} = \sqrt{\frac{2\,GM\mu}{R_*\gamma\,kT}}\,. \tag{2.20}$$

Beim Sonnenwind handelt es sich in erster Linie um Wasserstoff-Plasma, also um monoatomares, ionisiertes Gas. (Wir vernachlässigen hierbei den ca. zehnprozentigen Anteil von Helium). Daher ist $\gamma = 5/3$ und $\mu = m_H/2$ (m_H Masse des Wasserstoffatoms). Zusammen mit den Naturkonstanten und den anderen Zahlenwerten für die Sonne sowie einer Koronatemperatur von $T = 1.5 \cdot 10^6\,K$) ergibt die Evaluation von (2.20) ungefähr die Zahl 3.

Dieser Wert eingesetzt in (2.17) ergibt den Ort des sonischen Punktes zu $R_a = 9/4$ (in Einheiten des Sonnenradius und gemessen vom Sonnenmittelpunkt aus – bei einer Höhe von ca. 1.25 Sonnenradien über der Atmosphäre erreicht der Wind Schallgeschwindigkeit).

Die verwendete koronale Plasmatemperatur von $1.5 \cdot 10^6\,K$ entspricht in etwa dem mittleren von verschiedenen Quellen angegebenen Wert. Diese Quellen sprechen – je nach der beobachteten Radiolinie, die bekanntermaßen in unterschiedlichen Regionen entstehen – von einer Koronatemperatur zwischen $1 \cdot 10^6\,K$ und $3 \cdot 10^6\,K$. Es zeigt sich, dass mit steigender Temperatur R_a kleiner wird, der Schallpunkt sich also immer weiter in Richtung zur Sonne hin verschiebt. Ab einer Temperatur von $3.464 \cdot 10^6\,K$ scheint der Wind bereits an seiner Basis supersonisch zu sein. Es wäre interessant dieser Frage weiter nachzugehen, um festzustellen, ob das ein physikalisch sinnvoller und möglicher Mechanismus ist oder ob es sich möglicherweise um einen Bereich handelt, in welchem unserer Ansatz eines isothermen Windes seine Gültigkeit verliert. Diese Fragestellung wird im Rahmen der vorliegenden Diplomarbeit nicht weiter verfolgt.

Um die analytische Lösung tatsächlich zu erhalten, setzen wir in Gleichung (2.11) $V_* = 1$, normieren diese also auf die Verhältnisse an der Sonnenoberfläche. Zusammen mit der Definition $R = r/r_* \rightarrow R = r/r_a$ wird diese abgewandelte Eulergleichung des Parkerschen Sonnenwindes zu

$$V^2 - \ln V^2 - 4\frac{R_a}{R} - 4\ln\frac{R}{R_a} + 3 = F\,(V,R)\;. \tag{2.21}$$

Da V sowohl allein stehend als auch im logarithmischen Term von (2.21) vorkommt, lässt sich diese Gleichung nicht ohne Weiteres nach V umstellen. Es ist dennoch möglich eine exakte Lösung zu erhalten, indem man für jeden interessierenden Wert von R die entsprechende Geschwindigkeit numerisch findet. Dazu habe ich ein kleines FORTRAN 90-Programm (*parkerana.f90*, Quelltext siehe Abschnitt C.1) geschrieben, welches mittels Intervallbisektion für jedes gegebene R die Nullstelle von (2.21) – also die normierte Windgeschwindigkeit V – bestimmte.

Wichtig ist zunächst eine gelungene Wahl der Intervallgrenzen, denn für alle Verfahren zur Nullstellensuche, auch für die hier verwendete Bisektionsmethode, wird ein Intervall benötigt, das die gesuchte Nullstelle enthält. Im vorliegenden Fall des Parkerschen Sonnenwindproblems ist es dazu ferner nötig, die Intervallgrenzen abhängig vom Ort r im Wind zu wählen, denn unterhalb des sonischen Punktes R_a herrschen per definitionem subsonische Windgeschwindigkeiten, was eine maximale v-Intervallgrenze von 1 erlaubt, während jenseits von R_a der Sonnenwind supersonisch wird und somit die minimale v-Intervallgrenze mindestens 1 sein muss. Die adäquate Wahl der Intervallgrenzen geschieht im Quellcode in den Zeilen 45 bis 55.

Die anschließende Bisektion engt die gesuchte Nullstelle immer weiter ein, indem das vorgegebene Intervall wiederholt halbiert wird. Nach jeder Teilung überprüft der Solver durch Vorzeichenvergleich, in welcher Intervallhälfte sich die Nullstelle befindet und halbiert diese Hälfte sogleich erneut. Diese Vorschrift wird so lange durchgeführt, bis die spezifizierte Genauigkeit *eps* erreicht ist (Zeile 59).

Innerhalb der umschließenden Loop über r (Zeilen 41 bis 73) wird dieses Verfahren für viele Werte von r durchgeführt, sodass fortlaufend eine r, v-Tabelle als Datenfile geschrieben werden kann.

Das Verfahren der Bisektion ist nicht so effizient wie beispielsweise die Newton-Raphson-Methode, allerdings liegt die Rechenzeit hier im Bereich von weit unter einer Sekunde, sodass dieses Manko vernachlässigt werden kann. Man gewinnt jedoch den Vorteil der sicheren Konvergenz des Algorithmus selbst bei „ungünstigen“ Funktionen. Abbildung (2.1) zeigt die grafische Darstellung des auf die eben beschriebene Weise erhaltenen Ergebnisses im Bereich $1 \leq R \leq 10$.

2.1.2 Numerische Lösung

Abbildung (2.2) zeigt die numerische Lösung des Parkerschen Sonnenwindproblems. Als Ausgangspunkt vorgegeben wurde ein lineares Geschwindigkeitsprofil $v(r)$, welches innerhalb von wenigen Tausend Iterationen die Parkersche Form angenommen hat. Dargestellt sind das Initialgeschwindigkeitsprofil (1) sowie mehrere Stufen, über die sich das Programm der finalen Lösung (5) genähert hat. Das Ergebnis wurde mit dem in der Arbeitsgruppe vorliegenden zeitabhängigen Hydrodynamikcode gewonnen, welcher in FORTRAN 90 programmiert ist und variable Probleme der Hydrodynamik beherrscht. Dieser Solver eignet sich somit hervorragend als Grundlage der weiteren Arbeit.

Selbstverständlich gelten für die numerische Behandlung des Sonnenwindes dieselben An-

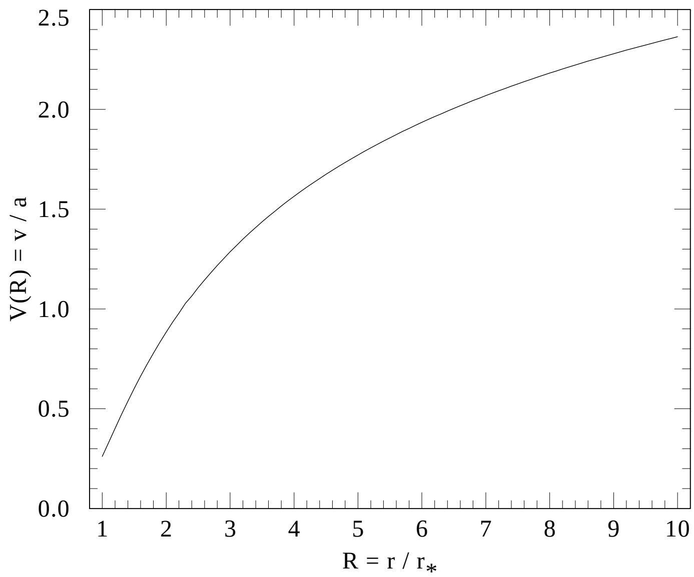

Abbildung 2.1: Parkerscher Sonnenwind: analytische Lösung von (2.21)

nahmen, wie bereits bei der Herleitung der analytischen Lösungen im Abschnitt (2.1.1), also sphärische Symmetrie, Isothermie und Stationarität des Windes.

2.1.3 Analytik vs. Numerik

Interessant ist die Frage, ob und in welchem Maße die numerisch gewonnene Lösung von der analytisch bestimmten abweicht. Dazu wurde in Abbildung (2.3) die numerische Kurve (Abbildung 2.2, Bild 6) von der analytischen (Abbildung 2.1) subtrahiert. Generell zeigt sich, dass die dargestellten Residuen sehr klein sind und ihr Betrag innen maximal 0,2% und außen maximal 0,4% der jeweiligen Windgeschwindigkeit erreicht. Zu bemerken ist, dass der Fehler von negativen Werten innen an der Windbasis zu positiven weiter außen im Wind anwächst. Die Abweichungen sind allerdings minimal und für praktische Zwecke vernachlässigbar.

2.2 Lavaldüse

Als nächstes Beispiel für einen interessanten hydrodynamischen Prozess betrachten wir aus einem Behälter ins Vakuum strömendes Gas. Das Ausströmen soll durch eine sich zunächst verjüngende und anschließend wieder weitende Düse erfolgen. Abbildung (2.4) zeigt einen Querschnitt durch eine derartige Anordnung. Solche Ausströmrohre mit variablem Querschnitt und vor allem mit einer Engstelle (Querschnittsfläche $A = A_{min}$) werden zu Ehren ihres Erfinders, des schwedischen Ingenieurs Carl Gustaf Patrik de Laval (1845-1913) als Laval-Düsen bezeichnet. Laval – nebenbei bemerkt auch Erfinder der Milchzentrifuge – verwendete diese Düsenform erstmals 1883 bei Dampfturbinen.

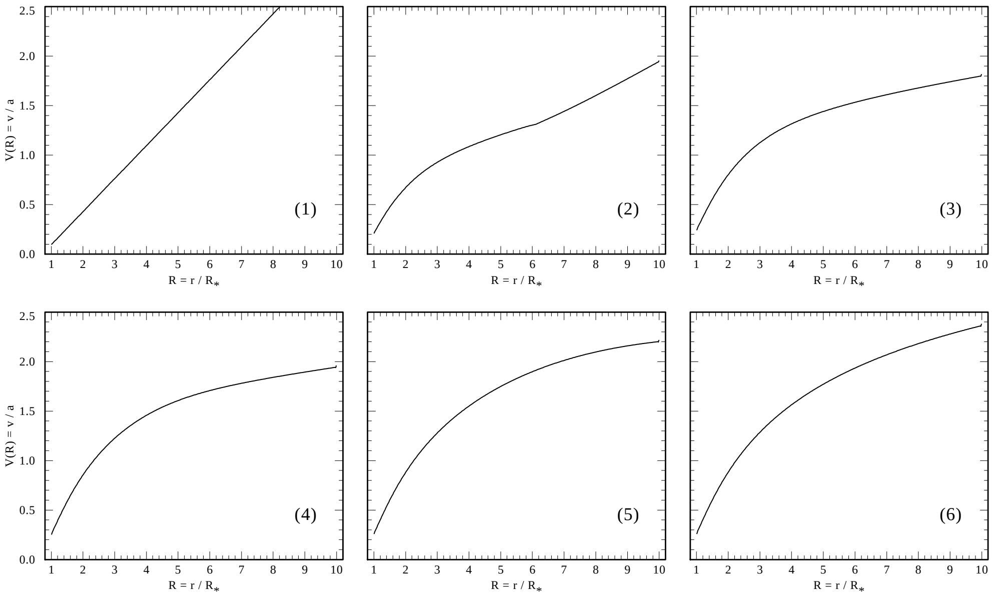

Abbildung 2.2: Parkerscher Sonnenwind: numerische Lösung (von links oben nach rechts unten). Ausgehend vom linearen Geschwindigkeitsgesetz (1) erreichte das Programm die stationäre Lösung (6). Die Kurven (2) bis (5) sind Zwischenschritte der Simulation.

Wie schon im Abschnitt (2.1) müssen einige vereinfachende Annahmen gemacht werden.

(i). 1-d
Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Verengung der Düse sehr langsam mit r fortschreitet. Es kann daher näherungsweise davon ausgegangen werden, dass das durchströmende Gas lediglich eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung von r besitzt. Die dazu vertikalen Anteile werden vernachlässigt.

(ii). Isothermie
Analog zum Sonnenwind soll eine isotherme Expansion des Gases erfolgen. Diese Annahme ist für praktische Zwecke und für alltägliche Größen der Düse sehr gut zu halten.

(iii). Stationarität
Die Strömung durch die Lavaldüse soll stationär, also zu allen Zeiten gleich sein. Dazu wird ein stets gleichbleibender Druck p_0 im Gasbehälter vorausgesetzt.

Die aus Abschnitt (2.1.1) bekannte Kontinuitätsbedingung $\rho\, v\, r^2 = const.$ wird entsprechend der jetzt relevanten Querschnittsfläche A der Düse zu

$$\rho\, v\, A(r) = const. \tag{2.22}$$

mit $A(r)$ als sogenannter Flächenfunktion (im englischen *nozzle function*, *area function* oder *nozzle area*). Diese Funktion hängt von der r-Koordinate ab, beschreibt somit

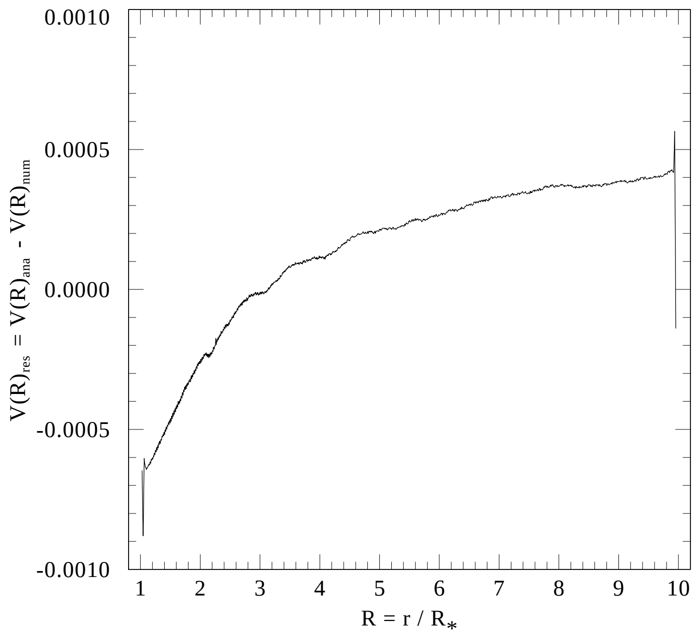

Abbildung 2.3: Parkerscher Sonnenwind: Residuen nach Subtraktion der numerischen von der analytischen Lösung. Die Ausschläge an den Rändern sind Überbleibsel der numerischen Schwierigkeiten bei der Behandlung von Gittergrenzen.

schlicht die Querschnittsfläche der Lavaldüse bei unterschiedlichen Werten von r.

Wenn gestrichene Größen weiterhin die räumliche Ableitung d/dr bezeichnen, so lautet die logarithmische Ableitung von (2.22)

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{v'}{v} + \frac{A'}{A} = 0. \tag{2.23}$$

In der bereits aus (2.5) bekannten Eulergleichung vernachlässigen wir die Gravitation und erhalten unter Beachtung von (2.23)

$$vv' = -a^2 \frac{\rho'}{\rho} = a^2 \left(\frac{v'}{v} + \frac{A'}{A} \right). \tag{2.24}$$

Dies lässt sich umstellen zu

$$\left(v - \frac{a^2}{v} \right) v' = a^2 \frac{A'}{A}. \tag{2.25}$$

Daraus folgt sofort, dass der Fall $v = a$ nur eintreten kann, wenn auf der rechten Seite $A' = 0$ gilt, die Änderung der Querschnittsfläche also aufhört. Schallgeschwindigkeit wird folglich exakt am Ort der stärksten Verengung der Düse erreicht. Soll das Gas sogar supersonisch werden, so muss nach der Engstelle wieder $A' > 0$ gelten. Der Beweis, dass es sich bei $A' = 0$ tatsächlich um ein Minimum der Querschnittsfläche handelt und nicht lediglich um ein nicht weiter bestimmtes Extremum, ist leicht erbracht. Betrachtet man

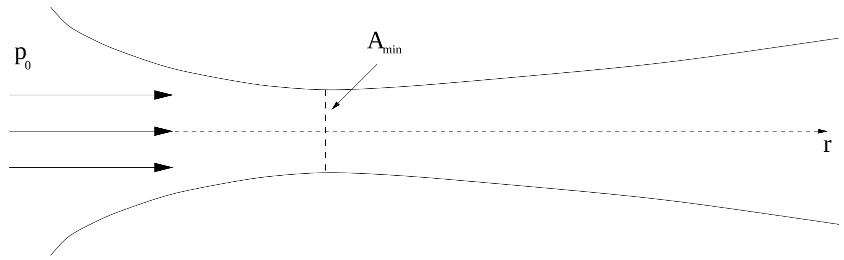

Abbildung 2.4: Querschnitt durch eine Lavaldüse. Das Gas strömt von links subsonisch ein, erreicht bei $A = A_{min}$ Schallgeschwindigkeit und wird anschließend weiter auf supersonische Geschwindigkeiten beschleunigt.

nämlich Geschwindigkeiten v, die etwas kleiner sind als a, so wird die Klammer auf der linken Seite von (2.25) negativ. Das kann nur durch $A' < 0$ auf der rechten Seite der Gleichung kompensiert werden. Umgekehrt, bei $v > a$, ist die linke Gleichungsseite positiv, was $A' > 0$ jenseits des Gleichheitszeichens entspricht. Ergo ist die Änderung der Querschnittsfläche mit steigendem r zunächst negativ, dann Null und schließlich positiv. Genau das spiegelt das Bild einer sich zuerst verjüngenden und anschließend wieder weitenden Düse wider.

2.3 CAK - Winde

2.3.1 Strahlungskraft

Wir betrachten nun den für diese Diplomarbeit zentralen Fall eines liniengetriebenen Windes. Bis auf den heutigen Tag kann dieses Problem nur in Teilaspekten formuliert und gelöst werden. Schon die Berechnung der Lucy-Owocki-Instabilität stellt größte Anforderungen an die Computerkapazität und kann bisher nur in einer räumlichen Dimension durchgeführt werden. Wir verwenden daher in dieser Arbeit die sogenannte Sobolevnäherung für den Strahlungstransport, welche den mathematischen Apparat vereinfacht, die wesentliche Physik aber beibehält. Die Sobolevnäherung wird im Detail in Kapitel 4 dargestellt; hier interessieren uns vor allem die Ähnlichkeiten der liniengetriebenen Winde mit der Strömung durch eine Lavaldüse und mit dem Sonnenwind. Um die Topologie der Windlösungen herzuleiten, nehmen wir als wesentliches Ergebnis aus Kapitel 4 die *Linienstrahlungskraft* in Sobolevnäherung vorweg: für radial abströmende, sphärisch symmetrische Winde ist die Linienstrahlungsbeschleunigung g_L gegeben durch

$$g_L(r,t) = C(r)F(r)\left[\frac{\partial v(r,t)/\partial r}{\rho(r,t)}\right]^{\alpha}. \tag{2.26}$$

Hierin ist $C(r)$ eine ggf. komplizierte Funktion (der *finite disk correction factor* und mehr), kann aber durch eine Konstante C ersetzt werden, wenn man annimmt, dass alle Sternphotonen näherungsweise in radialer Richtung propagieren. $F(r)$ ist der Strahlungsfluss

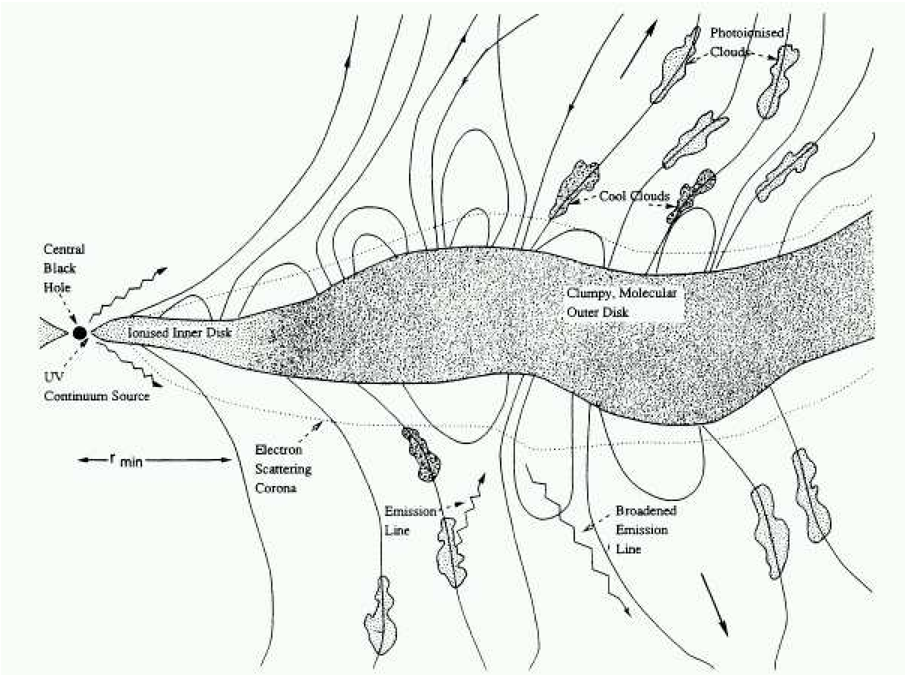

Abbildung 2.5: Quasarwind nach Emmering, Blandford & Shlosman (1992).

und $0 < \alpha < 1$ ein Parameter, der die Verteilung der Spektrallinien als Funktion des Massenabsorptionskoeffizienten beschreibt. Typischerweise liegt α zwischen 0.4 und 0.7 und wir verwenden für das Folgende den analytisch handhabbaren Wert $\alpha = 1/2$. Alle anderen Werte liefern qualitativ ähnliche Ergebnisse.

In ihrer grundlegenden Arbeit über liniengetriebene Winde zeigten Castor, Abbott & Klein (1975; CAK im Folgenden), dass es eine unendliche Vielfalt von Windlösungen zur Strahlungskraft (2.26) gibt. Diese fallen in die zwei Klassen der sogenannten *shallow* und *steep solutions*. CAK argumentieren, dass der Wind die eindeutige kritische Lösung annimmt, die an einem kritischen Punkt stetig von *shallow* (innen) nach *steep* (außen) wechselt.

Abbott (1980) konnte dann einen neuen, strahlungsakustischen Wellenmode herleiten, bezüglich dessen der kritische Punkt von CAK ein Machpunkt (Ma = 1) ist; der Wind ist am kritischen Punkt also trans„sonisch“. Die *shallow solutions* haben überall Ma < 1, die *steep solutions* Ma > 1. All dies ist in Entsprechung zur Lavaldüse, zum Sonnenwind und zu magnetischen Winden von Akkretionsscheiben.

Um die folgende Entwicklung des CAK-Formalismus etwas aufzulockern, zeigen wir parallel dazu einige der bisher vorgeschlagenen Geometrien liniengetriebener Quasarwinde.

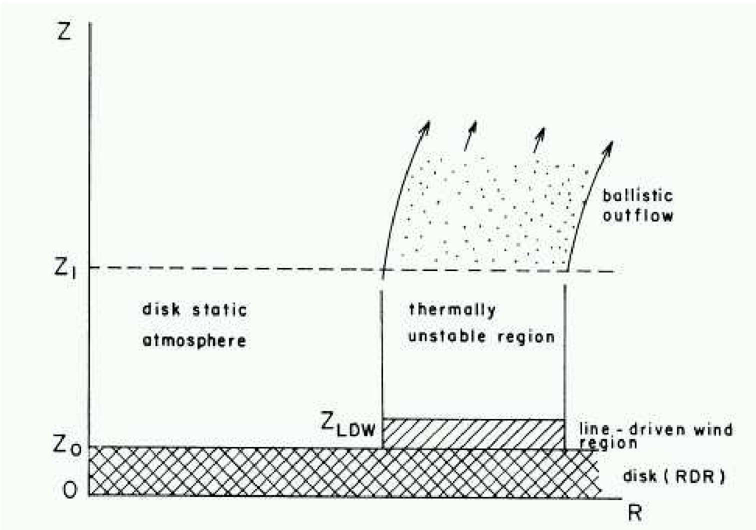

Abbildung 2.6: Quasarwind nach Shlosman, Vitello & Shaviv (1985).

2.3.2 Das CAKsche Windmodell für einen Punktstern

In sphärischer Symmetrie ist $F(r) = F_* \, R_*^2/r^2$, mit Sternradius R_* und photosphärischem Fluss $F_* = F(R_*)$. Wir setzen voraus, dass die Druckkraft verschwindet (entsprechend Schallgeschwindigkeit Null). Dies ist gerechtfertigt angesichts von Machzahlen 100, die liniengetriebene Sternwinde erreichen. Die *stationäre* ($\partial/\partial t \equiv 0$) Kontinuitäts- und Eulergleichung sind dann

$$(\rho v r^2)' = 0\,, \tag{2.27}$$

$$v v' + \frac{GM}{r^2} - \frac{CL}{4\pi r^2}\sqrt{v'/\rho} = 0\,, \tag{2.28}$$

mit Leuchtkraft $L = 4\pi F_* R_*^2$. Striche bedeuten räumliche Differentiation. Die Lösung der Kontinuitätsgleichung ist $\dot{M} = 4\pi\rho(r)v(r)r^2 = const.$, wobei als Integrationskonstante $\dot{M}$, die Massenverlustrate des Sterns eingeführt wird. Erweitern wir den Term unter der Wurzel mit $4\pi v r^2/4\pi v r^2$ und multiplizieren die Gleichung mit r^2, so ergibt sich

$$r^2 v v' + GM - \frac{CL}{\sqrt{4\pi \dot{M}}}\sqrt{r^2 v v'} = 0\,. \tag{2.29}$$

Führen wir als Abkürzung

$$w' = r^2 v v' \tag{2.30}$$

ein, folgt

$$E \equiv w' - \frac{CL}{\sqrt{4\pi\dot{M}}}\sqrt{w'} + GM = 0\,. \tag{2.31}$$

2.3.3 Lösungsvielfalt

Dies ist nun eine erstaunliche Gleichung, denn es ist uns gelungen, die originale Differentialgleichung (2.28) für $v(r)$ in eine *triviale* Differentialgleichung (2.30) für $vv'(r)$ plus eine *algebraische* Gleichung (2.31) für w' umzuformulieren. Letztere bedeutet insbesondere, dass w' unabhängig vom Ort ist: $C, L, \dot{M}, M$ sind *Konstanten* des Ortes und somit auch w'. Gleichung (2.30) wird zu

$$v\,dv = w'\frac{dr}{r^2} \tag{2.32}$$

und wenn wir annehmen, dass $v(R_*) = 0$ ist, lautet die Lösung

$$v(r) = \sqrt{\frac{2w'}{R_*}}\sqrt{1 - \frac{R_*}{r}}\,. \tag{2.33}$$

w' ergibt sich aus der Lösung der quadratischen (für $\alpha = 1/2$) Gleichung (2.31),

$$w' = \frac{C^2L^2}{16\pi\dot{M}}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{16\pi\,GM\dot{M}}{C^2L^2}}\right)^2\,. \tag{2.34}$$

Die Lösungen mit „+" heißen *steep*, die mit „−" heißen *shallow*. Die *shallow solutions* entsprechen *Brisen* beim Sonnenwind. Lösungen, für die die Wurzel imaginär wird, heißen *overloaded* und entsprechen den *choked solutions* der Lavaldüse.

2.3.4 Kritische Lösung

Damit eine *shallow* und *steep* solution (am kritischen Punkt) gleich werden können, muss die Wurzel in (2.34) verschwinden. Dadurch folgen einige Ergebnisse. Erstens ist hiermit die Massenverlustrate bestimmt

$$\dot{M} = \frac{C^2L^2}{16\pi\,GM}\,. \tag{2.35}$$

Die Konstante C ist im Wesentlichen durch den Massenabsorptionskoeffizienten der stärksten Linien, also durch Atomphysik vorgegeben. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen; es genügt zu wissen, dass die Massenverlustrate liniengetriebener Winde als *Eigenwert* eindeutig festgelegt ist. Das ist ein Gegensatz zum Sonnenwind, bei dem die Dichte und damit die Massenverlustrate nicht in die Eulergleichung eingehen und somit unbestimmt bleiben: $\dot{M}$ hängt von der *empirischen* Dichte am Fußpunkt des Windes ab.

Zweitens ist mit dem Verschwinden der Wurzel in (2.34) auch w' festgelegt

$$w' = GM = \frac{1}{2}\,v_e^2\,R_*\,, \tag{2.36}$$

wo wir noch die Entweichgeschwindigkeit v_e eingeführt haben. Somit lautet das Windgeschwindigkeitsgesetz (2.33),

$$v(r) = v_e\sqrt{1 - \frac{R_*}{r}}\,. \tag{2.37}$$

Dies ist das berühmte CAK-Geschwindigkeitsgesetz. Die Endgeschwindigkeit des Windes (für $r \to \infty$) ist die Entweichgeschwindigkeit vom Stern – ein entgegen erstem Anschein nichttriviales Faktum.

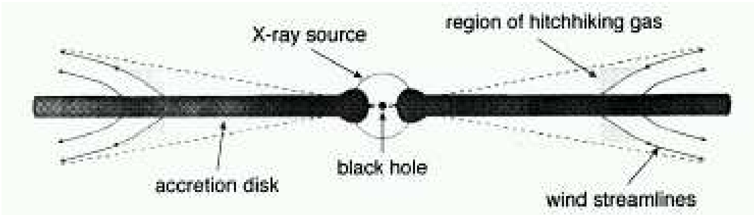

Abbildung 2.7: Quasarwind nach Murray et al. (1995).

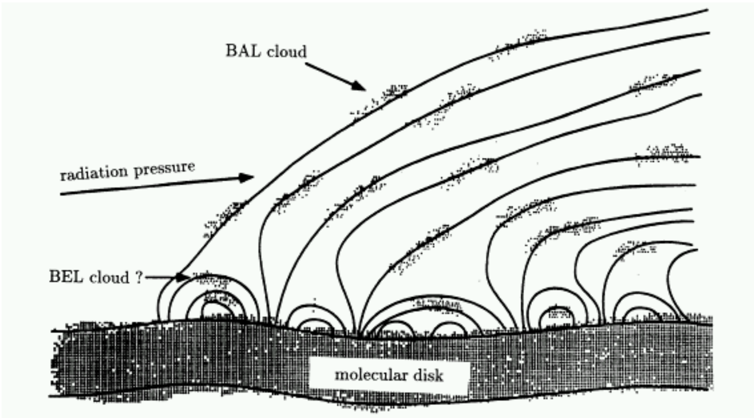

Abbildung 2.8: Quasarwind nach deKool & Begelman (1995).

Kehren wir zu (2.34) zurück, so sehen wir unmittelbar, dass *shallow solutions* mit steigendem Massenverlust immer schneller werden (w' und damit v steigt mit $\dot{M}$), *steep solutions* mit steigendem Massenverlust jedoch immer langsamer (w' fällt mit steigendem $\dot{M}$). Die kritische CAK-Lösung verbindet die schnellste *shallow* mit der langsamsten *steep solution* und hat somit maximalen Massenverlust.

2.3.5 Singularitätsbedingung

Diese Argumente können sehr weitreichend verallgemeinert werden, als sogenannte Singularitäts- und Regularitätsbedingung. Betrachten wir wieder die Eulergleichung (2.31). Für kleine $\dot{M}$ hat diese Gleichung zwei Lösungen w', für große $\dot{M}$ keine reelle Lösung, und für den kritischen CAK-Wert von $\dot{M}$ genau eine. In der $\sqrt{w'}$-E-Ebene ($\sqrt{w'}$ als Abszisse, E als Ordinate) stellt die linke Seite von (2.31) eine Schar nach oben geöffneter Parabeln $E(\sqrt{w'})$ dar

$$E(\sqrt{w'}) = w' - \frac{CL}{\sqrt{4\pi\dot{M}}}\sqrt{w'} + GM\,, \tag{2.38}$$

mit Parameter $\dot{M}$: für große $\dot{M}$ liegen die Parabeln oberhalb der $\sqrt{w'}$-Achse und schneiden diese nicht, für kleine $\dot{M}$ schneiden sie die $\sqrt{w'}$-Achse zweimal, und für den kritsichen Wert von $\dot{M}$ genau einmal. Die Lösungen der Eulergleichung sind durch $E(\sqrt{w'}) = 0$ gegeben, also durch die beiden Schnittpunkte mit der $\sqrt{w'}$-Achse. Für den kritischen Wert von $\dot{M}$ hat die zugehörige E-Parabel die $\sqrt{w'}$-Achse als Tangente im Scheitel, somit gilt $dE/d\sqrt{w'} = 0 = dE/dw'$. Falls wir noch verallgemeinern, dass E nicht wie in unserem Fall nur von w' abhängt, sondern auch von r und/oder w, dann gilt

$$\frac{\partial E}{\partial w'} = 0. \tag{2.39}$$

Dies ist die berühmte Singularitätsbedingung von CAK. Multiplizieren wir diese noch mit w' (w' ist sicherlich ungleich Null), so erhalten wir zusammen mit der Eulergleichung (2.31) folgendes lineare Gleichungssystem,

$$E = w' - \frac{CL}{2\sqrt{\pi \dot{M}}} \sqrt{w'} + GM = 0, \tag{2.40}$$

$$w' \frac{\partial E}{\partial w'} = w' - \frac{CL}{4\sqrt{\pi \dot{M}}} \sqrt{w'} = 0. \tag{2.41}$$

Dessen Lösung ergibt sich am schnellsten, wenn man zuerst die zweite Gleichung von der ersten abzieht, dann das zweifache der zweiten Gleichung von der ersten subtrahiert:

$$w' = GM, \tag{2.42}$$

$$\dot{M} = \frac{C^2 L^2}{16\pi\, GM}\,, \tag{2.43}$$

genau wie in (2.35) und (2.36), wie auch nicht anders zu erwarten: für $\alpha = 1/2$ sind die CAKsche Singularitätsbedingung (2.39) und die Bedingung, dass die Wurzel in der Windlösung (2.34) verschwindet, äquivalent. Jedoch kann eine explizite Windlösung nur für $\alpha = 1/2$ (und einige andere Werte wie $\alpha = 1/3$ oder $2/3$) angegeben werden, während die Singularitätsbedingung für jedes α das gesuchte w' und $\dot{M}$ liefert.

2.3.6 Regularitätsbedingung

Was ist der *Ort* des kritischen Punktes? Er wird durch die Regularitätsbedingung bestimmt. CAK finden diese, indem sie die Eulergleichung *total* nach dem Ort ableiten. Denn wenn $E = 0$ an jedem Ort gilt, muss auch $dE/dr = 0$ gelten. Wir verallgemeinern gleich auf den Fall, dass E nicht nur von w' sondern auch von w, definiert durch $w' = dw/dr$ und auch explizit von r abhängen kann, also

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\partial E}{\partial w}\, w' + \frac{\partial E}{\partial w'}\, w'' + \frac{\partial E}{\partial r} = 0\,. \tag{2.44}$$

Der mittlere Term in der Summe verschwindet aber nach der Singularitätsbedingung am kritischen Punkt (solange w'' endlich ist, was tatsächlich der Fall ist), somit lautet die Regularitätsbedingung am kritischen Punkt

$$\frac{\partial E}{\partial w}\, w' + \frac{\partial E}{\partial r} = 0. \tag{2.45}$$

In unserem konkreten Fall lautet sie jedoch schlicht

$$0 = 0, \tag{2.46}$$

weil E eben nur von w' und nicht von r und w abhängt. Dies ist die gefürchtete Entartung des CAKschen Punktsternmodells bei verschwindender Schallgeschwindigkeit. In sphärischer Symmetrie, für rein radial propagierende Photonen und für verschwindende Schallgeschwindigkeit ist die Regularitätsbedingung identisch (oder trivial) erfüllt: *jeder Punkt im Wind ist ein kritischer Punkt.* Gerade numerische Windrechnungen leiden hierunter stark. Die Tatsache, dass jeder Punkt kritischer Punkt ist, ist wieder Folge der rein algebraischen Gleichung (2.31) für w'.

2.3.7 Aufhebung der Entartung

Um eine realistische d.h. nicht entartete CAK-Topologie zu finden, ist es also wesentlich, statt der Konstanten C eine realistische Funktion $C(r)$ zu betrachten. Wir verwenden einen aus Feldmeier & Shlosman (2000) entlehnten Verlauf von C, mit einem einzigen, breiten Minimum: mehrere Minima führen auf vielfach kritische Punkte und auf die komplexe Lösungstopologie nach Holzer (1977), auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

2.3.8 Lösungstopologie

Wir sind hiermit in der Lage, die Lösungstopologie zur Gleichung (2.31) zu finden. Nach quadratischer Ergänzung wird diese

$$E(\sqrt{w'}, r) = \left(\sqrt{w'} - \frac{C(r)L}{4\sqrt{\pi \dot{M}}}\right)^2 + GM - \frac{C(r)^2\, L^2}{16\pi \dot{M}} = 0. \tag{2.47}$$

Wir geben uns ein hinreichend kleines $\dot{M}$ vor (siehe (2.48) unten) und betrachten die r-$\sqrt{w'}$-Ebene (r als Abszisse, $\sqrt{w'}$ als Ordinate), über die noch E nach oben (als „Gebirge“: wir werden tatsächlich einen Sattel finden) aufgetragen wird. Zu jedem r erhalten wir nach (2.47) eine Parabel $E(\sqrt{w'})$, die die r-$\sqrt{w'}$-Ebene in zwei Punkten schneidet: den beiden Lösungen (*shallow* und *steep*) der Eulergleichung. Beginnend bei $r = R_*$ kommen sich diese beiden Punkte mit wachsendem r immer näher, bis das r erreicht ist, an dem $C(r)$ ihr Minimum hat. Für größere r entfernen sich die Lösungspunkte wieder. Wählt man nun

$$\dot{M} = \min_r \{C^2(r)\} \frac{L^2}{16\pi\, GM}\,, \tag{2.48}$$

so kreuzen sich die beiden Lösungszweige am kritischen Punkt, am Minimum von C. Damit ist auch die physikalische Bedeutung des kritischen Punktes klar geworden: die Strahlungskraft geht proportional zu C. Das minimale C gibt also die minimale beschleunigende Kraft und bestimmt den maximalen Massenverlust, der von der Photosphäre ins Unendliche gebracht werden kann, ohne auf den Stern zurückzufallen. Der Ort, an dem $C(r)$ ihr Minimum annimmt – und nicht etwa die Photosphäre – legt also die Massenverlustrate fest! Der kritische CAK-Punkt entspricht damit der Engstelle der Lavaldüse.

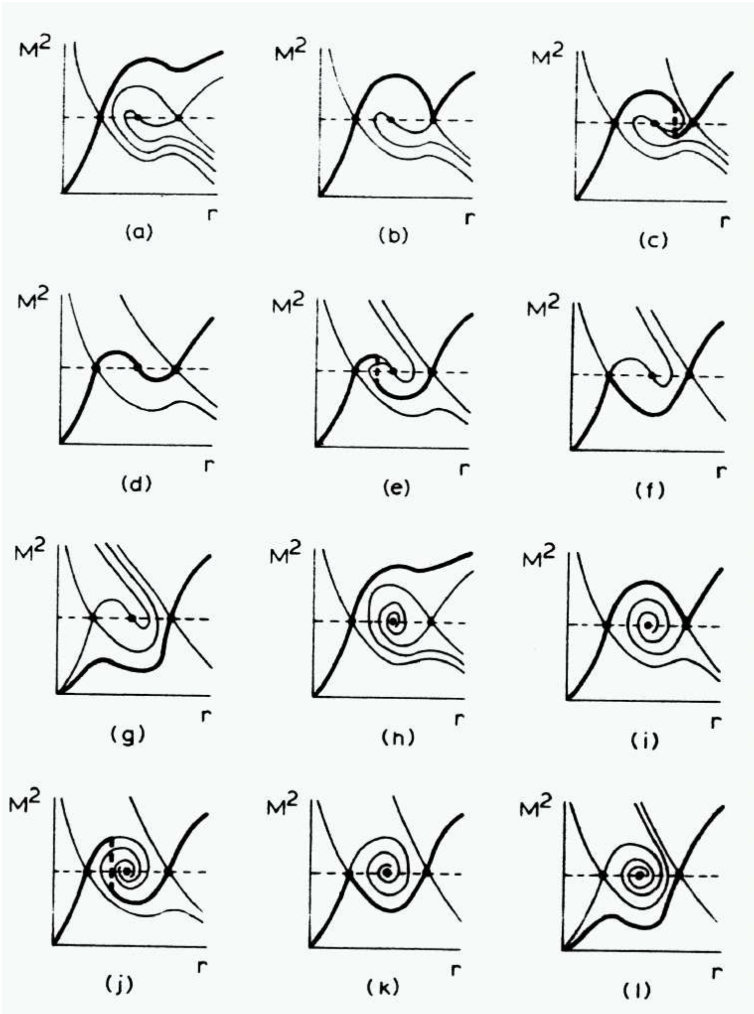

Abbildung 2.9: Lösungstopologien eines Windes mit zwei kritischen Punkten. Aus Holzer (1977).

2.3.9 Regularität: der Sattel

Wir betrachten die formale Regularitätsbedingung für $E = E(w', r)$ am kritischen Punkt,

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\partial E}{\partial r} = 0 = \frac{dC}{dr}, \tag{2.49}$$

weil gemäß (2.38) in E nur C explizit von r abhängt. Die CAKsche Regularitätsbedingung (2.49) drückt also ebenfalls aus, dass der kritische Punkt an einem Extremum (genauer kann man zeigen: einem Minimum) von C liegt, dass C also die „effektive Düsenfläche“ darstellt.

Die Menge aller Lösungspunkte der Eulergleichung in der r-$\sqrt{w'}$-Ebene bildet nach dieser Erklärung ein X. Der kritische Punkt ist also ein Sattelpunkt, ganz entsprechend zur Lavaldüse und zum Sonnenwind, bei welchen der kritische Punkt allerdings ein Sattel in der r-v-Ebene ist. Erstaunlicherweise stammt diese Erkenntnis erst von Bjorkman (1995). Die folgenden Abbildungen zeigen „ältere“, bei weitem nicht so einfache Lösungstopologien liniengetriebener Winde in der r^{-1}-v-Ebene (CAK) und in der r-v-Ebene (Abbott).

2.3.10 Abbottwellen

Es würde hier leider zu weit führen, den Zusammenhang zwischen kritischem Punkt und Machzahl 1 für strahlungsakustische Wellen zu zeigen. Wir begnügen uns mit folgender allgemeiner Feststellung: wie beim Sonnenwind und der Lavaldüse kann die Eulergleichung (2.31) in die Form

$$\left(v - \frac{A^2}{v}\right) v' = \frac{dE/dr}{\partial E/\partial w'} \tag{2.50}$$

gebracht werden (die Abbottwellengeschwindigkeit A hängt jedoch von v' ab). Auf der rechten Seite steht im Nenner der Ausdruck, der am kritischen Punkt aufgrund der Singularitätsbedingung Null wird, im Zähler der Ausdruck, der am kritischen Punkt aufgrund der Regularitätsbedingung null wird. Man kann dann zeigen, dass 0/0 der rechten Seite in (2.50) einer 0 der linken Seite entspricht: Am kritischen Punkt ist also $v = A$.

2.3.11 Überladene Lösungen

Wir kommen nun zum eigentlichen Thema dieser Diplomarbeit. Was bedeuten die überladenen Lösungen (*overloaded solutions*)? Wir hatten oben festgestellt, dass sie einer imaginären Wurzel in (2.34) entsprechen. Für konstantes C sind solche überall komplexen Lösungen natürlich uninteressant. Nicht so jedoch, falls C eine Funktion mit einem Minimum ist, denn dann werden die overloaded solutions nur in einem gewissen radialen Intervall komplex. Wir haben bisher angenommen, dass $dv/dr > 0$ sein soll, der Wind also beschleunigt. Nehmen wir nun an, dass der Wind auch abbremsen kann. Im einfachsten Fall können wir uns vorstellen, dass die Photonen „blind“ dafür sind, ob der Wind beschleunigt oder abbremst: sie spüren nur den absoluten Geschwindigkeitsgradienten. Wir müssen dann in der Linienkraft lediglich $\sqrt{v'}$ durch $\sqrt{|v'|}$ ersetzen.

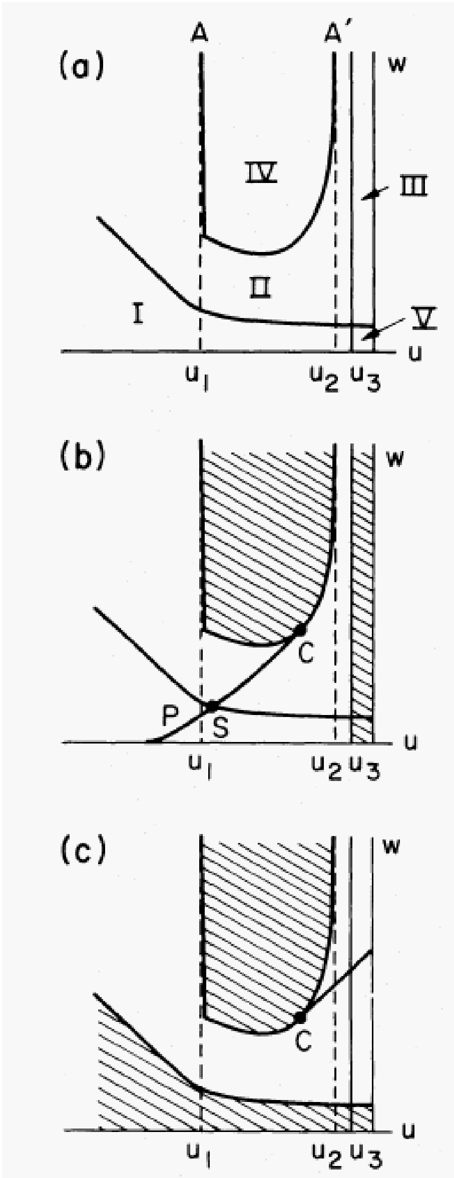

Abbildung 2.10: Topologie der Windlösungen nach Castor, Abbott & Klein (1975)

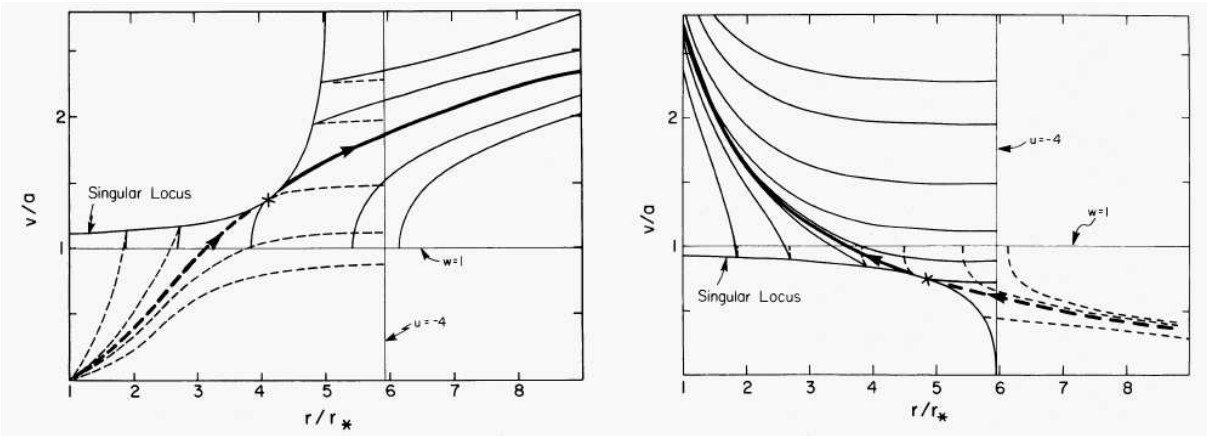

Abbildung 2.11: ... und nach Abbott (1980).

Eine einfache Überlegung zeigt dann, dass es neben den bisher besprochenen Lösungszweigen *shallow* und *steep*, für die $w' > 0$ ist, noch *einen* weiteren Lösungszweig mit $w' < 0$ gibt. Startet der Wind auf einem *shallow* Zweig in der Photosphäre mit zu großem Massenverlust, dann würde die Lösung in gewisser Höhe, *vor* dem kritischen Punkt, komplex. Hier kann der Wind nun auf den Zweig $w' < 0$ springen, nämlich physikalisch: die Strahlungskraft reicht nicht aus, den Wind zu treiben, die Gravitation ist stärker und der Wind bremst ab. Irgendwo oberhalb des kritischen Punktes wird die Wurzel in (2.34) wieder reell. Der Wind kann von $w' < 0$ auf die *steep solution* mit $w' > 0$ springen.

Ist die Massenverlustrate nicht *zu* groß, so wird der Wind auf dem Zweig $w' < 0$ zwar abbremsen, dabei jedoch positive Geschwindigkeiten beibehalten. Nichts spricht theoretisch dagegen, dass eine solche Lösung stationär ist. Tatsächlich wird dies auch in zeitabhängigen numerischen Simulationen gefunden, wie in Abbildung 1.3 der Einleitung gezeigt.

In der hier verwendeten Sobolevnäherung hat die stationäre Lösung tatsächlich abrupt zwischen $w' > 0$ und $w' < 0$ (und zurück) zu springen: Wir haben dann ein stationäres 2-Kink-Geschwindigkeitsfeld, d.h. $v(r)$ hat zwei Abknickpunkte mit Unstetigkeit in dv/dr. Die vorliegende Diplomarbeit handelt nun davon, die konsistente sobolevsche Strahlungskraft bei Vorliegen von Mehrfachresonanzen entlang solcher nichtmonotonen Geschwindigkeitsfelder zu berechnen, also nicht lediglich $\sqrt{v'} \to \sqrt{|v'|}$ zu ersetzen, sondern die Streuung der Photonen zwischen Resonanzorten zu berücksichtigen.

Kapitel 3

Linienkraft bei reiner Absorption

Die einen Stern umgebenden Gasmassen können durch Absorption von Sternphotonen einen Impulsübertrag erfahren und somit radial nach außen beschleunigt werden. Dies ist der favorisierte Mechanismus zum Antrieb von supersonischen Winden, z.B. bei O-, B- und Wolf-Rayet-Sternen. Abgeleitet von ihrer Ursache – der Absorption von Photonen bestimmter Spektrallinien – werden derart beschleunigte Winde hauptsächlich *liniengetriebene Winde* genannt. Es sind vor allem ultraviolette Photonen, welche die genannten Sternwinde beschleunigen, da das UV-Strahlungsfeld in den Atmosphären dieser heißen und massereichen Sterne enorm stark sein kann. Im folgenden Kapitel soll die das Gas beschleunigende Strahlungskraft $\vec{g}$ hergeleitet werden.

3.1 Intensität

Ein gegebenes Strahlungsfeld wird auf makroskopischer Ebene beschrieben durch

$$dE_\nu = d\nu\, dt\, d\omega\, d\sigma\, \vec{m} \cdot \vec{n}\, I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t). \tag{3.1}$$

Dabei fließt die Strahlungsenergie dE_ν im Frequenzintervall $d\nu$ innerhalb der Dauer dt und in einem Raumwinkelelement $d\omega$ durch ein Flächenelement $d\sigma$ (siehe Abbildung 3.1). Das betrachtete Strahlungsbündel zeigt dabei in Richtung $\vec{n}$, sodass das Skalarprodukt $d\sigma\, \vec{m} \cdot \vec{n}$ von $\vec{n}$ mit dem Normalenvektor $\vec{m}$ des Flächenelementes die projizierte Fläche in Richtung $\vec{n}$ darstellt. $I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t)$ ist die spezifische Intensität des Strahlungsfeldes zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ in Richtung $\vec{n}$. Aus Gründen der Vereinfachung und ihrer fehlenden Bedeutung in den weiteren Betrachtungen ist die Polarisation des Strahlungsfeldes nicht miteinbezogen worden.

3.2 Strahlungsfluss

Impuls lässt sich auch als Energie/Geschwindigkeit ausdrücken, wie sich beispielsweise aus der Einsteinrelation $E = pc$ leicht ergibt. Dividiert man Gleichung (3.1) durch c, also durch die Geschwindigkeit der Photonen, und integriert über alle Raumwinkel $d\omega$, so erhält man einen Ausdruck für den Impuls der Strahlung, die durch $d\sigma$ in Richtung $\vec{n}$

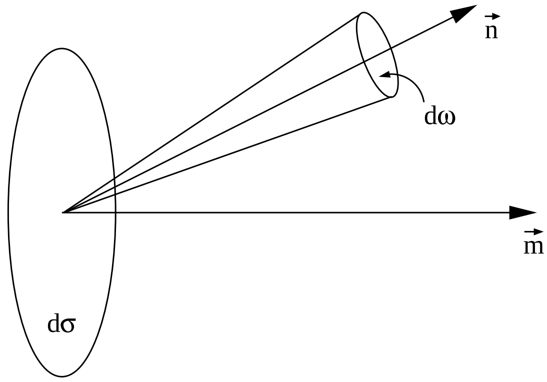

Abbildung 3.1: Zur Definition der Strahlungsintensität.

strömt. Das Flächenelement $d\sigma$ zeigt dabei wieder in Richtung $\vec{m}$.

$$\vec{m} \cdot d\vec{p} = \frac{1}{c}\, d\nu\, dt\, d\sigma \int I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t)\, \vec{m} \cdot \vec{n}\, d\omega \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{c}\, d\nu\, dt\, d\sigma \vec{m} \int I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t)\, \vec{n}\, d\omega \tag{3.3}$$

Das letzte Integral auf der rechten Seite ist der Strahlungsflussvektor

$$\vec{F}_\nu(\vec{x}, t) = \int I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t)\, \vec{n}\, d\omega, \tag{3.4}$$

wobei das Raumwinkelelement $d\omega$ um $\vec{n}$ zentriert ist. Zu bemerken ist, dass der Fluss verschwindet, falls die spezifische Intensität isotrop, also unabhängig vom Richtungsvektor $\vec{n}$ ist. Beim Integrieren über den Raumwinkel $d\omega$ mitteln sich dann alle Richtungen heraus.

3.3 Beschleunigung durch Strahlung

Wir wollen die Beschleunigung ermitteln, welche auf die Gasmassen durch die Absorption von Photonen ausgeübt wird. Dazu betrachten wir nochmals ein Strahlenbündel, dessen Energie definiert wurde als

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{n})\, d\nu\, dt\, d\omega\, d\sigma_\perp\,. \tag{3.5}$$

Dabei ist $d\sigma_\perp = d\sigma\, \vec{m} \cdot \vec{n}$ die Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Bündels. Der absorbierte Teil dieser Strahlung ist

$$dE^a_\nu = dE_\nu\, \chi_\nu dl, \tag{3.6}$$

wobei $dl = c\,dt$ ein von Photonen in der Zeit dt durchquertes Wegelement entlang des Strahls ist. χ_ν ist die sogenannte Opazität. Sie ist eine Eigenschaft der bestrahlten Materie und ihre Einheit ist 1/cm. Wird dt ausreichend klein gewählt, dann gilt $\chi_\nu dl \ll 1$

(dimensionslos!) und die Gleichung beschreibt die lineare Abschwächung von Strahlung beim Durchgang durch Materie. Wir schreiben vereinfacht $dE_\nu^a = dE_a$.

Durch Absorption von Strahlung, die sich in Richtung $\vec{n}$ ausbreitet, erfährt das Gas einen Impulsübertrag von

$$d\vec{p} = \frac{dE_a}{c}\vec{n}. \tag{3.7}$$

Aus Newtons zweitem Gesetz folgt, dass dabei eine Beschleunigung

$$d\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dm\, dt} \tag{3.8}$$

der Materie auftritt. Hierbei ist $dm = \rho\, dV$ mit dem Volumenelement $dV = d\sigma_\perp\, dl$. Man beachte, dass dl in dieselbe Richtung zeigt wie dp. Es sei ρ die Dichte der Materie und konstant. Wir setzen dE_a aus (3.6) in (3.7), dann dp in (3.8) ein, integrieren über alle Frequenzen und Raumwinkel und erhalten einen Ausdruck für die totale Strahlungsbeschleunigung

$$\vec{g} = \int\limits_\nu \int\limits_{4\pi} \frac{I_\nu(\vec{r},\vec{n})\, d\nu\, d\omega\, dt\, d\sigma_\perp\, \chi_\nu\, dl}{c\, \rho\, d\sigma_\perp\, dl\, dt}\,\vec{n} = \frac{1}{c}\int\limits_\nu \int\limits_{4\pi} d\nu\, d\omega\; \kappa_\nu(\vec{r},\vec{n}) I_\nu(\vec{r},\vec{n})\vec{n}\,. \tag{3.9}$$

Der sogenannte Massenabsorptionskoeffizient $\kappa_\nu = \chi_\nu/\rho$ bezeichnet den Absorptionsquerschnitt, welchen ein Gramm Materie der Strahlung entgegenstellt (Einheit cm^2/g). Es stört hierbei nicht, dass die Gesamtbeschleunigung durch Summationen über Beschleunigungsbeiträge verschiedener Massenelemente $\rho\, d\sigma_\perp\, dl$ gewonnen wird, denn die Wegelemente dl kürzen sich dabei heraus. (Siehe Abb. 3.2). Das wird schon an der Dimension von Beschleunigung ($\mathrm{cm/s}^2$) deutlich, denn sie enthält keine Massenreferenz, lediglich Strecken und Zeiten.

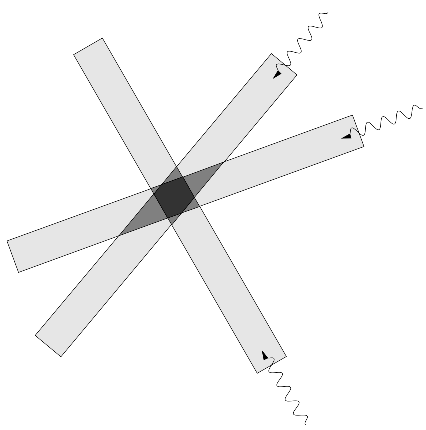

Abbildung 3.2: Ermittlung der Gesamtbeschleunigung durch Summation über Beschleunigungsbeiträge verschiedener Massenelemente. Das Wegelement dl kürzt sich wegen der Integration über 4π im Überlappungsbereich aller betrachteten Massenelemente (dunkel) heraus.

Sowohl χ als auch κ sind im allgemeinen Fall richtungs- und frequenzabhängig. Sollte jedoch κ_ν isotrop sein, so lässt es sich aus dem Winkelintegral herausziehen und es folgt

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d\nu\,\kappa_\nu(\vec{r})\int d\omega\; I_\nu(\vec{r},\vec{n})\vec{n} = \frac{1}{c}\int d\nu\kappa_\nu\vec{F}_\nu, \tag{3.10}$$

mit $\vec{F}_\nu$ als dem aus Gleichung (3.4) bekannten Fluss. Gilt außerdem $\kappa_\nu = \kappa$, also Frequenzunabhängigkeit (graue Näherung), so vereinfacht sich das Integral zu

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\kappa}{c}\int d\nu\vec{F}_\nu = \frac{\kappa\vec{F}}{c}, \tag{3.11}$$

mit dem frequenzintegrierten Fluss $\vec{F} = \int_0^\infty d\nu\vec{F}_\nu$. Der für diese Arbeit wichtige frequenzabhängige Fall wird im folgenden Abschnitt behandelt.

3.4 Linienbeschleunigung

Bisher haben wir die Strahlungskraft im isotropen und frequenzunabhängigen Fall betrachtet. Winde von O-, B-, W-R-Sternen und bestimmten Akkretionsscheiben werden jedoch durch Photonenimpulsübertrag in Spektrallinien getrieben, also durch Strahlung definierter Frequenz beschleunigt. Wir betrachten zunächst eine einzelne Linie der Frequenz ν_l. Der Massenabsorptionskoeffizient κ darf jetzt anisotrop sein. Folgende Tatsachen müssen angenommen werden, einschließlich ihrer Konsequenzen.

(a) κ kann in einer faktorisierten Form geschrieben werden als

$$\kappa_\nu = \kappa_l\,\phi(x), \tag{3.12}$$

wobei κ_l der Massenabsorptionskoeffizient der Materie in einer Linie l ist. Wir nehmen an, dass κ_l isotrop und konstant über die gesamte Breite der Linie ist (sich aber selbstverständlich in anderen Linien unterscheidet). $\phi(x)$ ist die Funktion des Linienprofils und gehorcht im Fall der reinen thermischen Verbreiterung (Dopplerprofil) der Gleichung

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2} \tag{3.13}$$

mit x als Frequenzvariablen. Die Form dieses Profils entspricht einer Gaußglockenkurve. Es ist $x = (\nu - \nu_l)/\Delta\nu_D$ die normierte Frequenzvariable mit der Dopplerbreite $\Delta\nu_D = \nu_l v_{\rm th}/c$, x mißt somit den Frequenzabstand vom Linienkern in Einheiten der Dopplerbreite der Linie. $v_{\rm th}$ ist dabei die thermische Geschwindigkeit der betreffenden Ionen. Mit x statt ν als Integrationsvariablen transformiert sich das Frequenzdifferential aus (3.9) zu

$$d\nu = \Delta\nu_D\,dx. \tag{3.14}$$

(b) Da sich die Gasmassen in liniengetriebenen Winden mit wesentlich höheren Geschwindigkeiten als $v_{\rm th}$ bewegen, muss die Dopplerverschiebung der Photonen, wie sie vom Ort des Gases aus gesehen werden, mit einbezogen werden. Expandiert das Gas, so sieht es die photosphärischen Photonen rotverschoben – diese werden also nicht bei ν_l absorbiert. Stattdessen können blauere Photonen in der ν_l-Linie absorbiert werden, wenn sie genau die richtige Rotverschiebung erfahren, die sie im bewegten System des Gases auf die Übergangsfrequenz ν_l bringt. Demnach gilt $\nu_{\text{abs}} > \nu_l$ im expandierenden Wind.

Ist $\vec{n}\vec{v}$ die Geschwindigkeitskomponente der Ionen in Richtung $\vec{n}$, so ist die Dopplerverschiebung in Einheiten der Dopplerbreite der Linie

$$x_D = \frac{\nu_l\, \vec{n}\, \vec{v}/c}{\Delta\nu_D}. \tag{3.15}$$

Nach Subtraktion des Dopplershifts von der Ruhefrequenz soll die neue Zentralfrequenz $\tilde{x}$ Null sein

$$\tilde{x} = x - \frac{\nu_l\, \vec{n}\, \vec{v}/c}{\Delta\nu_D} = x - \frac{\nu_l\, \vec{n}\, \vec{v}/c}{\nu_l\, v_{\text{th}}/c} = x - \frac{\vec{n}\, \vec{v}}{v_{\text{th}}} = 0. \tag{3.16}$$

Bemerkung: x bezeichnet die Frequenz im Ruhesystem des Sterns, auch *observers frame* genannt. $\tilde{x}$ dagegen steht für den (mitbewegten) dopplerverschobenen Fall und deshalb heißt dieses System auch *comoving frame*.

(c) Die Linienintensität $I_l(\vec{r}, \vec{n}, x)$ soll für den Fall der reinen Absorption bestimmt werden. Die Idee der reinen Absorption ist ein Hilfskonstrukt, der die Mathematik handhabbar macht, in der Realität jedoch nicht der Hauptfall ist. In diesem Konzept absorbieren die Gasatome Photonen und die anschließende Abregung geschieht ausschließlich über Stöße mit den Nachbaratomen. Die Anregungsenergie des absorbierten Photons wird in thermische Energie des Gases umgewandelt. Diesen Prozeß nennt man Thermalisierung. In der Realität der liniengetriebenen Winde sind die beschleunigenden Spektrallinien in der Regel sehr breit. Wegen der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ haben die betreffenden Übergänge sehr kurze Lebensdauern. Innerhalb dieser kurzen Lebensdauer würde in dem dünnen Plasma die Abregung folglich wesentlich wahrscheinlicher über eine Photonenemission stattfinden, als durch Kollisionen des angeregten Atoms mit seinen Nachbarn. Die Abregung über Reemission von Photonen ist jedoch Streuung und mathematisch sehr schwer zu bewältigen, weshalb wir uns hier auf den Fall der reinen Absorption beschränken.

Die Linienintensität im Fall der reinen Absorption ergibt aus der Anfangsintensität und der exponentiellen Abschwächung, verursacht durch den Durchgang der Strahlung durch Materie

$$I_l(\vec{r}, \vec{n}, x) = I_l(\vec{r}_0, \vec{n})\, e^{-\tau_l(\vec{r}, \vec{n}, x)}. \tag{3.17}$$

$\vec{r}_0$ ist der Ursprungsort der Strahlung, während τ_l die optische Tiefe in einer Spektrallinie l beschreibt

$$\tau_l(\vec{r}, \vec{n}, x) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dl'\, \rho(\vec{r}\,')\kappa_l(\vec{r}\,')\phi\left(x - \frac{\vec{n}\vec{v}(\vec{r}\,')}{v_{\text{th}}}\right) \tag{3.18}$$

mit $\vec{r}\,'$ als Integrationsvariablen. Wir vereinbaren, dass $\tau_l(\vec{r}_0, \vec{n}, x) = 0$ ist und dass $I_l(\vec{r}_0, \vec{n}) > 0$, falls der Strahl $\vec{n}$ die Photosphäre trifft, $I_l(\vec{r}_0, \vec{n}) = 0$ sonst. Setzen wir κ_ν

aus (3.12) und $d\nu$ aus (3.14) in die Formel für die Strahlungsbeschleunigung (3.9) ein, so folgt

$$\vec{g} = \frac{1}{c} \int_{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \Delta\nu_D \, d\tilde{x} \, \kappa_l \, \phi(\tilde{x}) \, I_l(\vec{r}, \vec{n}) \vec{n} = \frac{\Delta\nu_D \, \kappa_l}{c} \int_{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, d\tilde{x} \, \phi(\tilde{x}) \, I_l(\vec{r}, \tilde{\vec{x}}) \vec{n} \,, \tag{3.19}$$

wobei wir $I_\nu(\vec{r}, \vec{n})$ durch die Linienintensität $I_l(\vec{r}, \vec{n}, \tilde{x})$ ersetzten. Da wir ausschließlich die Beschleunigungsbeiträge der absorbierten Photonen betrachten, steht $\tilde{x}$ in der Gleichung - also ihre Frequenz im comoving frame - und nicht x aus dem observers frame, denn diese Photonen werden nicht absorbiert und übertragen keinen Impuls auf das Gas. Beachten wir ferner die Dopplerverschiebung $\tilde{x}$ der Frequenz aus (3.16) und setzen die Linienintensität aus (3.17) ein

$$\vec{g} = \frac{\Delta\nu_D \, \kappa_l}{c} \int_{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, dx \, \phi\left(x - \frac{\vec{n}\vec{v}}{v_{\text{th}}}\right) I_l(\vec{r}_0, \vec{n}) \vec{n} \, e^{-\tau_l(\vec{r}, \vec{n}, x)}. \tag{3.20}$$

Mit τ_l aus (3.18) und der Annahme gleichbleibender Kontinuumsintensität innerhalb einer Linie ($I_l(\vec{r}_0, \vec{n})$ kann dann aus dem Frequenzintegral herausgezogen werden) folgt die durch eine Absorptionslinie verursachte Beschleunigung

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{r}) = \frac{\Delta\nu_D \kappa_l}{c} & \int_{4\pi} d\omega I_l(\vec{r}_0, \vec{n}) \vec{n} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \phi\left(x - \frac{\vec{n}\vec{v}(\vec{r})}{v_{\text{th}}}\right) \times \\ & \times \exp\left[- \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dl' \, \rho(\vec{r}\,') \, \kappa_l(\vec{r}\,') \, \phi\left(x - \frac{\vec{n}\vec{v}(\vec{r}\,')}{v_{\text{th}}}\right) \right]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Die Linienprofilfunktion $\phi(x - \vec{n}\vec{v}(\vec{r})/v_{\text{th}})$ kommt hierin zweimal vor. Im ersten Term beschreibt sie, wieviel Strahlung am Ort $\vec{r}$ absorbiert wird und im zweiten, wieviel der von $\vec{r}_0$ stammenden Strahlung überhaupt bei $\vec{r}$ ankommt, bevor sie dort absorbiert werden kann.

Man beachte, dass dl' und $d\omega$ (und letztlich auch $\vec{r}\,'(l')$) an die Richtung $\vec{n}$ gebunden sind, ebenso $\vec{r}_0$, der Anfangspunkt der Integration, der abhängig von $\vec{n}$ entweder in der Sternphotosphäre oder im Unendlichen liegt.

Die Linienkraft lässt sich demnach prinzipiell durch ein dreifaches Integral über die Raumwinkel, Frequenzen und Linienelemente bestimmen. Diese Integrale können mit einigem numerischen Aufwand berechnet werden, was jedoch allein das physikalische Verständnis noch nicht fördert. Im folgenden Kapitel betrachten wir daher die Sobolev-Näherung (Sobolev 1957), in der alle obigen Integrale analytisch genähert werden und welche für stark beschleunigende Medien wesentlich einfacher zu Resultaten für die optische Tiefe, die Linienkraft und die Quellfunktion führt.

Kapitel 4

Linienkraft in der Sobolevnäherung

4.1 Sobolevlänge

Die nach V. V. Sobolev benannte Näherung bezeichnet ein bestimmtes Regime, in welchem vor allem die folgende Beziehung gilt

$$H \gg L \equiv \frac{v_{\text{th}}}{dv/dr}\,. \tag{4.1}$$

Die sogenannte Sobolevlänge L soll also viel kleiner sein als die hydrodynamische Längenskala H. Diese ist definiert als

$$H = \min\left(\left|\frac{v}{v'}\right|, \left|\frac{\rho}{\rho'}\right|, \left|\frac{p}{p'}\right|\right). \tag{4.2}$$

Im Folgenden soll geklärt werden, wie es zu dem Ausdruck auf der rechten Seite von (4.1) kommt. Ein typisches Geschwindigkeitsgesetz $v = v(r)$ eines Windes könnte beispielsweise wie in Abb. 4.1(a) aussehen. Die makroskopische Windgeschwindigkeit ist wesentlich größer als die thermische Geschwindigkeit v_{th} des Gases, welche in der Größenordnung von einigen km/s liegt. Abbildung 4.1(b) zeigt einen kleinen Ausschnitt aus dieser $v(r)$-Funktion, in welchem lokal das $v(r)$-Gesetz linear wird.

Die Steigung

$$v' = \frac{dv}{dr} \tag{4.3}$$

der Tangente an das $v(r)$-Gesetz entspricht also der Relation

$$v' = \frac{v_{\text{th}}}{L}\,. \tag{4.4}$$

Nach Gleichsetzung von (4.3) und (4.4) sowie simpler Umstellung führen diese beiden Ausdrücke zur Beziehung (4.1).

Da $v_{wind} \gg v_{\text{th}}$ und die Beschleunigung des Windes sehr stark ist (d.h. v' ist hinreichend groß), können Photonen einer gegebenen Frequenz ν nur in einem räumlich schmalen

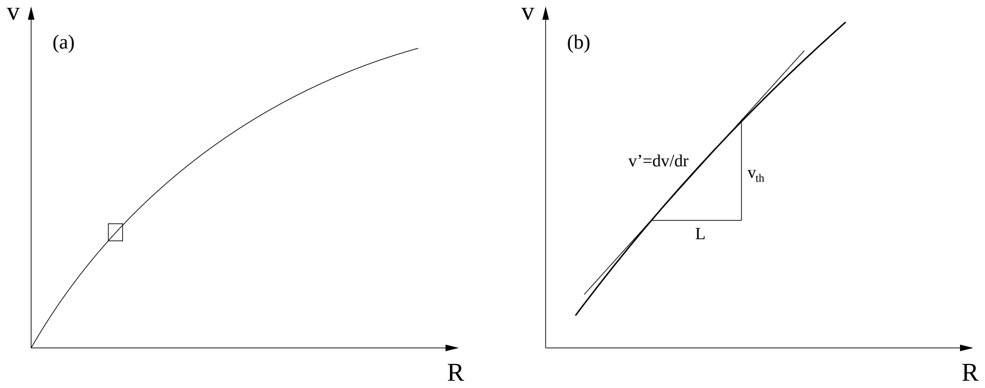

Abbildung 4.1: Sobolevnäherung: (a) Ein exemplarisches Windgeschwindigkeitsgesetz. (b) Ausschnittsvergrößerung des in (a) markierten Bereiches: der Geschwindigkeitsgradient v' kann lokal als konstant angenommen werden.

Bereich absorbiert werden. Geringfügig kleinere oder größere Frequenzen liegen wegen der starken Dopplerverschiebung am Ort der Absorptionszone bereits weit unter- bzw. oberhalb der Resonanzfrequenz. Dieser räumlich schmale Bereich wird *Resonanz-* oder auch *Sobolevzone* genannt. Ihre radiale Ausdehnung beträgt typischerweise nur einige Sobolevlängen L. Wegen dieser geringen Ausdehnung ist es legitim anzunehmen, dass viele Windeigenschaften innerhalb dieser Zone konstant sind. Dazu zählen vor allem die Dichte ρ, der Massenabsorptionskoeffizient κ_l einer Linie und der makroskopische Geschwindigkeitsgradient dv/dr. Die Windgeschwindigkeit v selbst kann in der Sobolevnäherung nicht als konstant angenommen werden, da sie per Definition innerhalb einer Sobolevlänge L um $v_{\rm th}$ zunimmt.

4.2 δ-Funktion als Linienprofilfunktion

In der Sobolevnäherung wird die Linienprofilfunktion ϕ durch die Deltafunktion δ ersetzt. Das trägt der oben genannten Tatsache Rechnung, dass wichtige Windeigenschaften innerhalb der Sobolevzone als konstant angenommen werden können.

4.3 Längenskalen

Sobolevnäherung beschreibt vor allem die Trennung von beteiligten Längenskalen in eine mikro- und eine makroskopische Skala. Während sich der Linienstrahlungstransport innerhalb der mikroskopischen Sobolevzone abspielt, verändern sich die hydrodynamischen Größen wie ρ oder dv/dr auf makroskopischen Längen $H \gg L$.

4.4 Optische Tiefe

Ersetzen wir wie in Abschnitt 4.2 gefordert die Linienprofilfunktion ϕ in (3.18) durch die δ-Funktion, so ist die optische Tiefe τ_l gegeben durch

$$\tau_l = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dr' \rho(\vec{r}\,')\kappa_l(\vec{r}\,')\delta(\tilde{x}') \qquad \text{mit} \qquad \tilde{x}' = x - \frac{\vec{n}\vec{v}(\vec{r}\,')}{v_{\text{th}}}, \tag{4.5}$$

wobei wir zunächst nur die radiale Abströmung betrachten und demgemäß das allgemeine Wegelement dl' durch das radial auswärts gerichtete dr' ersetzen dürfen. Es gilt mit dieser Voraussetzung ebenfalls

$$\vec{n}\vec{v} \equiv \vec{r}\vec{v} = v_r\,. \tag{4.6}$$

Wir beabsichtigen eine Variablensubstitution $dr \to d\tilde{x}$. Dazu nehmen wir die Monotizität von $\vec{n}\vec{v}(\vec{r})$ an, setzen sphärische Symmetrie voraus und bilden $d\tilde{x}/dr$

$$\frac{d\tilde{x}}{dr} = \frac{dx}{dr} - \frac{1}{v_{\text{th}}}\frac{dv_r(r)}{dr} = -\frac{v'}{v_{\text{th}}} \qquad \text{mit} \qquad v' = \frac{dv(r)}{dr}\,. \tag{4.7}$$

Eine weitere Annahme ist die eines isothermen Windes. Deswegen hängt v_{th} nicht von r ab und kommt in (4.7) lediglich als Konstante vor. Schließlich fällt der Term dx/dr weg, da im observers frame die Frequenz x nicht von r abhängt (vgl. Abschnitt 3.4).

Bemerkung: In beliebige Raumrichtungen hat (4.7) die folgende Form

$$\frac{d\tilde{x}}{dr} = -\frac{\vec{n}\cdot[(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{v}(\vec{r})]}{v_{\text{th}}}\,. \tag{4.8}$$

Der Vektorgradient $(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{v}$ misst die Änderung eines Vektors $\vec{v}$ entlang eines skalaren Wegdifferentials in Richtung $\vec{n}$

$$(\vec{n}\cdot\nabla)\,\vec{v}(\vec{r}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\vec{v}(\vec{r}+\epsilon\vec{n}) - \vec{v}(\vec{r})}{\epsilon}\,. \tag{4.9}$$

Einige Überlegung zeigt, dass

$$\vec{n}\cdot[(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{v}(\vec{r})] = \vec{n}\cdot[\vec{n}\cdot(\nabla\vec{v}(\vec{r}))] \tag{4.10}$$

mit Scherungstensor $\nabla\vec{v}$. Wir schreiben dies vereinfachend $\vec{n}\vec{n}\nabla\vec{v}$. In kartesischen Koordinaten gilt $\nabla\vec{v} = (dv_i/dx_j)$.

Wir kehren zu (4.7) zurück, woraus sich dr' durch Umstellung ergibt

$$dr' = -\frac{v_{\text{th}}}{v_r'}\,d\tilde{x}'. \tag{4.11}$$

Vollziehen wir die oben angesprochene Variablensubstitution, d.h. setzen (4.11) in (4.5) ein, ziehen die Konstanten vor das Integral und kehren die Integrationsgrenzen zwecks

Eliminierung des negativen Vorzeichens um, so folgt die optische Tiefe in Abhängigkeit von der Frequenz $\tilde{x}$

$$\tau_l = -\int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} \frac{v_{\rm th}}{v'}\,\rho(\tilde{x}')\,\kappa_l(\tilde{x}')\,\delta(\tilde{x}')\,d\tilde{x}' = \frac{v_{\rm th}\rho_R\kappa_R}{v'_R}\int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}_0}\delta(\tilde{x}')\,d\tilde{x}'\,. \tag{4.12}$$

Dieser Ausdruck gilt am Ort der Resonanz für Photonen einer gegebenen Frequenz ν, was durch den Index R gekennzeichnet wird. Wie bereits in (3.16) ist der Ort der Resonanzfrequenz gegeben durch

$$\tilde{x}(r_R) = x - \frac{v_R}{v_{\rm th}} = 0\,, \tag{4.13}$$

hier jedoch ohne Richtungsabhängigkeit der Geschwindigkeit. Zur Kraft am betrachteten Ort r können ausschließlich solche Linien beitragen, die dort ihren Resonanzort R haben. Wir vereinbaren daher ab sofort $R \equiv r$. Da wir annehmen, dass der Wind über makroskopische Entfernungen, also über viele $v_{\rm th}$ hinweg, von seiner Basis in der Photosphäre bis hin zu jedem beliebigen Resonanzort beschleunigt wird, kann die Integrationsgrenze $\tilde{x}_0$ in Gleichung (4.12) durch die Unendlichkeit ersetzt werden. Laut Definition gilt $\tilde{x}_R = 0$, somit folgt $\tilde{x}_0 \gg 1$ oder im Endeffekt $\tilde{x}_0 = \infty$ für ein Dopplerprofil. Die optische Tiefe aus (4.12) wird zu

$$\tau_l(r,\tilde{x}) = \frac{v_{\rm th}\rho(r)\kappa(r)}{v'(r)}\int_{\tilde{x}}^{\infty} dx\,\phi(x) = \tau_0(r)\,\Phi(\tilde{x}), \tag{4.14}$$

mit $\tau_0 = v_{\rm th}\rho(r)\kappa(r)/v'(r)$ als totaler optischer Tiefe der Sobolevzone. Die δ-Funktion wurde hier wieder durch die ursprüngliche Linienprofilfunktion ϕ ersetzt, da die verbleibenden Berechnungen für beliebige ϕ durchgeführt werden können.

4.5 Linienbeschleunigung

4.5.1 Einzelne Linie

Ausgehend von (3.21) folgt die Linienbeschleunigung in Sobolevnäherung

$$\vec{g}_l(\vec{r}) = \frac{\Delta\nu_D\kappa_l(\vec{r})}{c}\int d\omega\, I_l(\vec{r},\vec{n})\; P_l(\vec{r},\vec{n}) \tag{4.15}$$

mit

$$P_l(\vec{r},\vec{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}\phi(\tilde{x})\exp\left[-\tau_0(\vec{r},\vec{n})\int_{\tilde{x}}^{\infty} dx\,\phi(x)\right]. \tag{4.16}$$

P kann ebenfalls analytisch für jede beliebige Linienprofilfunktion berechnet werden.

Vereinbaren wir folgende Variablensubstitution

$$d\Phi = -\phi(\tilde{x})d\tilde{x} \qquad \text{oder} \qquad \Phi(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}}^{\infty} dx\phi(x), \tag{4.17}$$

$$\text{mit} \qquad \Phi(\infty) = 0, \quad \Phi(-\infty) = 1\,,$$

so erhalten wir

$$P = \int_0^1 d\Phi\, e^{-\tau_0 \Phi} = \frac{1 - e^{-\tau_0}}{\tau_0}\,. \tag{4.18}$$

In den Grenzfällen von sehr kleiner bzw. sehr großer optischer Tiefe τ_0 ergibt sich für P

$$P = \begin{cases} 1 & \text{falls } \tau_0 \ll 1 \\ \tau_0^{-1} & \text{falls } \tau_0 \gg 1\,. \end{cases} \tag{4.19}$$

P kann wie folgt interpretiert werden: für optisch dünne Linien können Photonen wegen der beinahe verschwindenden Absorption jeden Ort im betrachteten absorbierenden Gaselement erreichen. Aus diesem Grund ist $P = 1$ und hat als Multiplikator in (4.15) keinerlei Effekt. Andererseits werden im Fall optisch sehr dicker Linien Photonen nur in einem sehr dünnen Bereich auf der beleuchteten Seite des Gaselements absorbiert und können nicht in das Innere desselben dringen. Es gibt demzufolge einen sogenannten Ineffizienzfaktor $1/\tau$ für optisch dicke Linien. Das bedeutet jedoch nicht, dass liniengetriebene Winde hauptsächlich von optisch dünnen Linien beschleunigt würden. Die angreifende Linienkraft (4.15) enthält nämlich den linienspezifischen Massenabsorptionskoeffizienten κ_l als Vorfaktor und dieser ist klein für optisch dünne Linien, ihr Beitrag zur Gesamtkraft demnach ebenfalls gering. Für realistische Linienverteilungsfunktionen kann man zeigen, dass die Gesamtlinienkraft dominiert wird von Linien mit einer optischen Tiefe in der Größenordnung von $\tau \approx 1$.

Die Linienbeschleunigung skaliert sich für optisch dünne und dicke Linien wie

$$\vec{g}_l \sim \begin{cases} \kappa_l & \text{falls } \tau_0 \ll 1 \\ v_0'/\rho_0 & \text{falls } \tau_0 \gg 1\,, \end{cases} \tag{4.20}$$

wobei $\kappa_l = \text{const.}$ angenommen wird. Dies ist eine gute Näherung für Resonanzlinien – diese verbinden den Grundzustand des betreffenden Elementes mit einem höher angeregten Level. Da sich beinahe alle Ionen im Grundzustand befinden, folgt $\chi \sim \rho$ bzw. $\kappa = \text{const}$.

Die sehr interessante Schlussfolgerung aus (4.20) ist, dass der Beitrag optisch dünner Linien zur Gesamtlinienbeschleunigung offenbar durch Atomphysik bestimmt wird (κ), während optisch dicke Linien ausschließlich durch hydrodynamische Größen (v'/ρ) zur Linienbeschleunigung beitragen.

Man kann zeigen, dass in Sobolevapproximation Linienstreuung wegen der angenommenen Vor- und Rückwärtssymmetrie der Streuung nicht zur Linienkraft g beiträgt, sodass (4.20) nicht nur für Absorptionslinien, sondern auch für Streulinien gültig ist.

4.5.2 Äquivalente optische Tiefe

Der Ausdruck $\vec{n}\vec{n}\nabla\vec{v}$ aus (4.8) bedingt eine starke Winkelabhängigkeit der sobolevschen optischen Tiefe. Folgerichtig hängt die Linienkraft von der Strömungsgeometrie ab, welche jedoch wiederum von der Linienbeschleunigung verursacht wird. Dieser Sachverhalt führt zu einem hochgradig nichtlinearen Problem. Castor, Abbott und Klein (CAK) schlugen deshalb in ihrem berühmten Paper über liniengetriebene Winde (1975) die sogenannte *radiale Strömungsnäherung* vor. In dieser Näherung propagieren in sphärisch symmetrischen Strömungen alle Photonen radial auswärts, sie stammen aus ein und derselben Punktquelle.

Wir verallgemeinern den CAKschen Ansatz geringfügig, indem wir eine sogenannte *Richtung äquivalenter optischer Tiefe* $\vec{N}$ einführen. Für $\vec{N}$ gilt in (4.15)

$$\int d\omega I(\vec{n})P(\vec{n}) \equiv P(\vec{N}) \int d\omega I(\vec{n}) = P(\vec{N})\vec{F} \,. \tag{4.21}$$

Nach CAK gilt $\vec{N} = \vec{r}$ und laut Annahme sollte $\vec{N}$ nicht wesentlich von der Hauptflussrichtung abweichen. Beachtung von $\vec{N}$ liefert nunmehr einen angepassten Ausdruck für die Linienbeschleunigung einer einzelnen Linie

$$\vec{g}_l(\vec{r}) = \frac{\Delta\nu_D \kappa_l}{c}\, \vec{F}_l(\vec{r})\, \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_0(\vec{N})}}{\bar{\tau}_0(\vec{N})} \,. \tag{4.22}$$

4.5.3 Linienensemble

Die bislang hergeleiteten Ausdrücke für die Linienkraft gelten für eine einzige treibende Spektrallinie. Liniengetriebene Winde werden jedoch typischerweise von vielen Linien beschleunigt, ihre Anzahl geht oft in die Hunderte. Die totale Linienbeschleunigung kann daher durch eine Integration über alle treibenden Frequenzen ermittelt werden. Für praktische Zwecke nimmt man eine statistische Linienverteilungsfunktion an, die im Wesentlichen drei Kriterien erfüllen soll. (1) Die Linien sollen im gesamten Spektralbereich gleichmäßig verteilt sein, jedoch ohne zu überlappen und ohne Lücken aufzuweisen. Da jede Linie näherungsweise ein Frequenzintervall in der Größenordnung einer Dopplerbreite überdeckt, also $\nu \sim \Delta\nu_D$ gilt, muss die gesuchte Verteilungsfunktion mit ν^{-1} gehen. (2) Der Massenabsorptionskoeffizient κ besitzt keine natürliche Skala, demnach sollte die Verteilungsfunktion ein Potenzgesetz in κ sein. (3) Die Erfahrung lehrt, dass es mehr schwache als starke Spektrallinien gibt, weshalb die Linienverteilung die Beziehung $N(\nu, \kappa) \sim \kappa^{-\gamma}, \gamma > 0$ erfüllen soll.

Eine wichtige statistische Linienverteilungsfunktion, welche alle drei Charakteristika aufweist, fanden Castor, Abbott und Klein 1975. Sie lautet in einer anderen Form durch Owocki, Castor & Rybicki (1988) geschrieben

$$N(\nu, \kappa) = \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\kappa_0}\,\left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{2-\alpha} , \tag{4.23}$$

mit $0 < \alpha < 1$ und einem Parameter κ_0. Die Anzahl der Linien in einem Frequenzintervall $d\nu$ und einem Intervall des Massenabsorptionskoeffizienten $d\kappa$ ist somit $N(\nu, \kappa)\, d\nu\, d\kappa$.

Die Strahlungskraft einer einzelnen Linie wurde im Abschnitt 4.5.1 hergeleitet und lautet

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\Delta\nu_D\, \kappa}{c}\, \vec{F}_l(\vec{r})\, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \,. \tag{4.24}$$

Integriert man diese Gleichung über die Linienverteilungsfunktion (4.23), so folgt ein erster Ausdruck für die Linienstrahlungskraft aller Linien

$$\vec{g}_L(\vec{r}) = \int\limits_0^\infty d\kappa \, \frac{\Delta\nu_D}{c} \, \kappa \, \frac{1}{\nu} \, \frac{1}{\kappa_0} \left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{2-\alpha} \vec{F}_l(\vec{r}) \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \, . \tag{4.25}$$

Einführen von $\Delta\nu_D = \nu \, v_{th}/c$ in die Gleichung ergibt mit einigen Umstellungen

$$\begin{aligned}
\vec{g}_L(\vec{r}) &= \int\limits_0^\infty d\kappa \, \frac{\nu \, v_{th}}{c} \, \frac{1}{c} \, \frac{1}{\nu} \, \kappa_0^{-1} \, \kappa_0^{2-\alpha} \, \kappa \, \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{2-\alpha} \vec{F}_l(\vec{r}) \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
&= \frac{v_{th}}{c^2} \, \kappa_0^{1-\alpha} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \int\limits_0^\infty d\kappa \, \kappa \, \kappa^{\alpha-2} \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
&= \frac{v_{th}}{c^2} \, \kappa_0^{1-\alpha} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \int\limits_0^\infty d\kappa \, \kappa^{\alpha-1} \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \, .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Durch Einführung der Größe $\eta(\vec{r}, \vec{n}) = \tau(\vec{r}, \vec{n})/\kappa$ folgt nach einer Erweiterung

$$\begin{aligned}
\vec{g}_L(\vec{r}) &= \frac{v_{th}}{c^2} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \, \kappa_0 \, \kappa_0^{-\alpha} \left(\frac{\kappa_0 \, \eta}{\kappa_0 \, \eta}\right)^{\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \kappa^{\alpha-1} \, \frac{1-e^{-\kappa\,\eta}}{\kappa \, \eta} \\
&= \frac{v_{th}}{c^2} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \, \kappa_0 \, (\kappa_0 \, \eta)^{-\alpha} \, \eta^{\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \kappa^{\alpha-1} \, (\kappa \, \eta)^{-1} \left(1-e^{-\kappa\,\eta}\right) \, .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Hereinziehen von η^α in das Integral und Erweitern mit η/η liefern

$$\begin{aligned}
\vec{g}_L(\vec{r}) &= \frac{v_{th}}{c^2} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \, \kappa_0 \, (\kappa_0 \, \eta)^{-\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \frac{\eta}{\eta} \, \eta^{\alpha} \, \kappa^{\alpha-1} \, (\kappa \, \eta)^{-1} \left(1-e^{-\kappa\,\eta}\right) \\
&= \frac{v_{th}}{c^2} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \, \kappa_0 \, (\kappa_0 \, \eta)^{-\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \eta \, \eta^{\alpha-1} \, \kappa^{\alpha-1} \, (\kappa \, \eta)^{-1} \left(1-e^{-\kappa\,\eta}\right) \\
&= \frac{v_{th}}{c^2} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \, \kappa_0 \, (\kappa_0 \, \eta)^{-\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \eta \, (\kappa \, \eta)^{\alpha-2} \left(1-e^{-\kappa\,\eta}\right) \, .
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Da $\eta > 0$, ist eine Variablensubstitution $t = \kappa \, \eta$ zulässig und wir erhalten

$$\vec{g}_L(\vec{r}) = \frac{v_{th}}{c^2} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \, \kappa_0 \, t_0^{-\alpha} \int\limits_0^\infty dt \, t^{\alpha-2} \left(1-e^{-t}\right) \, . \tag{4.29}$$

Das Integral über dt lässt sich mittels partieller Integration lösen

$$\int_0^\infty dt\, t^{\alpha-2}\left(1-e^{-t}\right) = \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(1-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty dt\,\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\,e^{-t}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1-e^{-t}}{t^{1-\alpha}}\Big|_0^\infty - \frac{1}{\alpha-1}\int_0^\infty dt\, t^{\alpha-1}\,e^{-t}\,. \tag{4.30}$$

Das Integral im zweiten Term entspricht der vollständigen Eulerschen Gammafunktion $\Gamma(\alpha)$. Insgesamt folgt

$$\int_0^\infty dt\, t^{\alpha-2}\left(1-e^{-t}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1-e^{-\infty}}{\infty^{1-\alpha}} - \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1-e^{-t}}{t^{1-\alpha}}\Big|_0 + \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha}\,. \tag{4.31}$$

Die Auswertung des ersten Terms (bei ∞) gibt 0, während der zweite Term (bei 0) eventuell zu einer Singularität führen könnte. Wir unterziehen deshalb den Zähler $1-e^{-t}$ einer Taylor-Reihenentwicklung bis zur ersten Ordnung

$$(1-e^{-t})\,\Big|_{t=0} = (1-e^{-0}) + e^{-0}(t-0) = (1-1)+t = t \tag{4.32}$$

Somit folgt in (4.31) weiter

$$\int_0^\infty dt\, t^{\alpha-2}\left(1-e^{-t}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{t}{t^{1-\alpha}}\Big|_0 + \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} = \frac{t^\alpha}{\alpha-1}\Big|_0 + \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} \tag{4.33}$$

$$= \frac{0^\alpha}{\alpha-1} + \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} \tag{4.34}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha}\,. \tag{4.35}$$

Verwenden wir dieses Zwischenergebnis in (4.29), so folgt ein kompakter Ausdruck für die totale Linienstrahlungskraft mit der CAK-Linienverteilungsfunktion

$$\vec{g}_L(\vec{r}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha}\,\frac{v_{th}}{c^2}\,\kappa_0\,\vec{F}_l(\vec{r})\,t_0^{-\alpha}\,. \tag{4.36}$$

Integration der CAKschen Linienverteilungsfunktion von κ_0 bis ∞ lässt erkennen, dass die Gesamtanzahl von Linien mit $\kappa > \kappa_0$ in der Größenordnung von 1 liegt. Infolgedessen entspricht κ_0 ungefähr der stärksten Linie im Fluss. Als Zahlenwert für starke Winde ist $\kappa_0 \approx 10^8\,cm^2/g$ ein guter Wert.

4.5.4 Die CAK-Parameter

Es sollen plausible Werte für die CAKschen Parameter α und κ_0 angegeben werden. α beschreibt den relativen Anteil der optisch dicken Linien zur Linienbeschleunigung. Für dichte Winde folgt $\alpha \approx 2/3$ analytisch nach Puls et al. (1999) sowie aus detaillierten numerischen Strahlungstransport- und Ionisationsrechnungen. Bei dünnen Winden ist $\alpha \approx 1/2$ angemessen.

Der Massenabsorptionskoeffizient κ_0 kann nach nach Gayley (1995) geschrieben werden als

$$\frac{\kappa_0 v_{\rm th}}{\sigma_e c} = \frac{Q}{\Gamma(\alpha)^{1/(1-\alpha)}}\,, \tag{4.37}$$

wobei σ_e den Massenabsorptionskoeffizienten für Thomsonstreuung an Elektronen bezeichnet. Sein Wert folgt nach folgender Rechnung.

Für σ_e gilt die Relation

$$\sigma_e = \frac{\sigma_T\, N_e}{N\,\mu} \tag{4.38}$$

mit Thomsonquerschnitt (Wirkungsquerschnitt) der Elektronen σ_T, Teilchenzahldichte (Teilchenanzahl pro Volumeneinheit des Plasmas) aller Teilchen N, Elektronenzahldichte N_e und mittlerer Teilchenmasse μ im betrachteten Plasma.

Wir nehmen einen zehnprozentigen Teilchenanteil von Helium am Wasserstoffplasma an, sodass $N_{He}/N_H = 1/10$ gilt. Die Teilchenzahldichte ergibt sich aus der Summe der Teilchenzahldichten von Wasserstoff, Helium und ihrer Elektronen

$$N = N_H + N_{He} + N_e = N_H + 0.1\,N_H + (N_H + 0.2\,N_H) = 2.3\,N_H\,. \tag{4.39}$$

Die Summe in Klammern ist die Elektronenzahldichte der Elektronen von Wasserstoff und Helium zusammen. Wir gehen dabei vom vollständig ionisierten Plasma aus.

Weiterhin berechnet sich die mittlere Teilchenmasse μ als

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m_H N_H + m_{He} N_{He} + m_e N_e}{N} \\ &\approx \frac{m_H N_H + 0.4\,m_H N_H + 0}{2.3\,N_H} = \frac{1.4}{2.3}\,m_H \approx 0.609\,m_H\,.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Wegen der vernachlässigbar geringen Masse der Elektronen wurde deren Beitrag zu μ gleich Null gesetzt. Mit Hilfe der nun bekannten Teilchenzahldichten $N = 2.3\,N_H$ und $N_e = 1.2\,N_H$ sowie der mittleren Teilchenmasse $\mu = 0.609\,N_H$ liefert (4.38)

$$\sigma_e = \frac{\sigma_T\,N_e}{N\,\mu} = \frac{\sigma_T \cdot 1.2\,N_H}{2.3\,N_H \cdot (1.4/2.3)\,m_H} = \frac{1.2}{1.4}\,\frac{\sigma_T}{m_H}\,, \tag{4.41}$$

woraus schließlich mit der Masse des Protons $m_H = 1.673 \cdot 10^{-24}\,$g und dem experimentell bestimmten Thomsonquerschnitt des Elektrons $\sigma_T = 6.653 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$ der Massenabsorptionkoeffizient für Thomsonstreuung an Elektronen im vollständig ionisierten Plasma folgt

$$\sigma_e \approx 0.341\,[\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}]\,. \tag{4.42}$$

Zurück in (4.37) ergibt sich weiterhin $Q \approx 2000$ nach Gayley. Damit könnte der im Kapitel 4.5.3 genannte Wert von $\kappa_0 \approx 10^8\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}$ sogar noch etwas präziser berechnet werden. Die Werte von κ_0 und Q werden vor allem zur Berechnung von Massenverlustraten in liniengetriebenen Winden benötigt.

Kapitel 5

Resonanzflächen

Wie bereits im Abschnitt 4.1 beschrieben, kann in der Sobolevtheorie wegen des hohen Verhältnisses von makroskopischer Windgeschwindigkeit zur mikroskopischen thermischen Geschwindigkeit der Teilchen davon ausgegangen werden, dass Strahlung einer bestimmten Frequenz nur in einem sehr schmalen räumlichen Bereich absorbiert wird – der sogenannten Resonanz- oder Sobolevzone. Umgekehrt kann ein Beobachter am festen Ort Photonen einer festen Frequenz nur von definierten Gebieten im Wind empfangen, in denen die folgende Resonanzbedingung gilt

$$\nu - \frac{\vec{n}\,\vec{v}(\vec{r}\,')}{v_{th}} = \nu - \frac{\vec{n}\,\vec{v}(\vec{r})}{v_{th}} \,. \tag{5.1}$$

Überlegen wir nun, aus welchen Regionen ein sich unendlich weit weg vom Stern befindender Beobachter die Strahlung einer festen Frequenz emittiert sehen würde. Diese mathematischen Flächen, von denen die Rede ist, werden Resonanzflächen bzw. Flächen konstanter projizierter Geschwindigkeit genannt und in dem hier betrachteten Fall der unendlichen Entfernung zwischen Stern und Beobachter spricht man von den *Common Direction Velocity Surfaces (CDS)*. Die Beantwortung der Frage nach der Geometrie der Resonanzflächen hängt von dem im Sternwind herrschenden Windgeschwindigkeitsgesetz $v(r)$ ab, wobei wir radiale Symmetrie voraussetzen. In Abbildung 5.1 sind die CDS für zwei simple Windgeschwindigkeitsgesetze dargestellt.

Im linken Panel dieser Abbildung liegt die Situation eines konstanten Windgeschwindigkeitsgesetzes vor, d.h. $v(r) = const.$ überall im Wind. Hier liegen Bereiche gleicher in Richtung des Beobachters projizierter Geschwindigkeiten auf Kegelmanteloberflächen, deren Spitze am Stern liegt und deren Öffnungswinkel von den betrachteten Frequenzen abhängen. Die Blätterung des Raumes geht proportional mit der Frequenz und der Beobachter schaut stets entlang der zentralen Senkrechten eines Kegels.

Im rechten Panel von Abbildung 5.1 ist die entsprechende Raumblätterung für ein linear anwachsendes $v(r)$ - Gesetz skizziert, also für $v(r) \sim r$. Offenbar sind die zu diesem Geschwindigkeitsgesetz gehörenden CDSs Ebenen im Raum, deren Abstand voneinander durch die betrachteten Frequenzen bestimmt wird. Die Sichtlinie vom Beobachter zum Stern schneidet diese Ebenen immer im rechten Winkel.

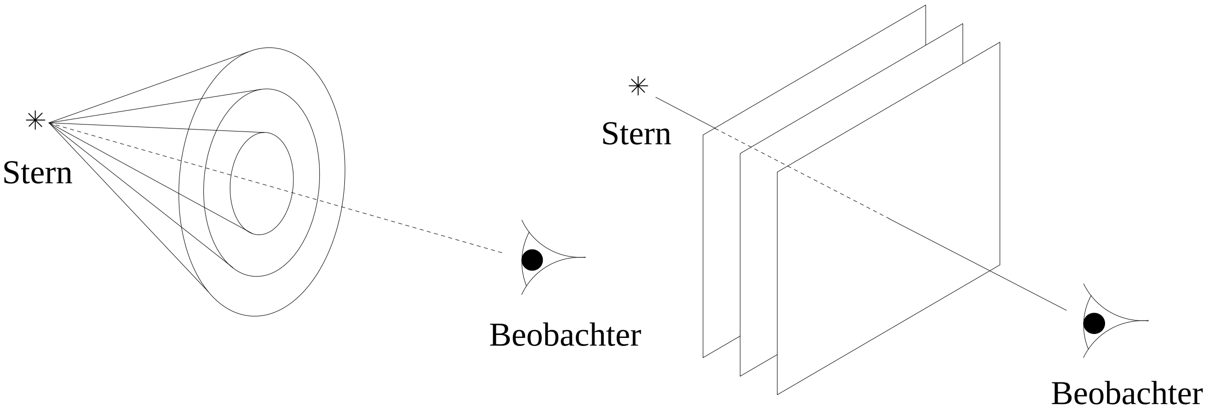

Abbildung 5.1: Common Direction Velocity Surfaces für zwei Windgeschwindigkeitsgesetze. Links: für ein konstantes Geschwindigkeitsgesetz $v(r) = const$. Rechts: für eine lineare Beziehung $v(r) = c \cdot r$.

Alles bisher Gesagte gilt für einen Beobachter im Unendlichen. Es ist jedoch von großem Interesse nach den Resonanzflächen in endlicher Entfernung vom Stern, ja mitten im Sternwind zu fragen. Aus welchen Regionen würde ein sich im Wind aufhaltender Beobachter Strahlung einer festen Frequenz empfangen können? Nach Rybicki und Hummer (1978) ist klar, dass auch in diesem Fall die Strahlung von einer mathematischen Oberfläche kommen muss:

> "When the flow speed is much larger than the mean thermal speed of the gas, radiation at each frequency as seen by a fixed observer comes primarily from a unique mathematical surface."

Da nicht wie im Fall eines unendlich fernen Beobachters allein die Richtung zu jenem von Bedeutung ist, sondern der exakte Ort (also seine wahren Koordinaten relativ zum Stern), spricht man von den sogenannten *Common Point Velocity Surfaces (CPS)*. Wie Rybicki & Hummer in ihrem Paper zeigen, sind die resultierenden Resonanzflächen zumindest bei Annahme von monotonen Windgeschwindigkeitsfeldern immer konvex, sie besitzen keine Wendepunkte. Das impliziert, dass jeder Sichtstrahl, der durch den Beobachterort r verläuft, die Resonanzfläche höchstens ein einziges weiteres Mal schneiden kann (siehe Fig. 2 in Rybicki & Hummer 1978). Diese Art von Resonanzflächen wird daher auch *Single Velocity Surfaces* genannt.

Durchläuft die im Wind strömende Materie nicht ausschließlich Bereiche monotoner Beschleunigung bzw. Abbremsung, sondern beide, so können mehrere Resonanzpunkte entlang einer Sichtlinie auftreten. Im Falle zweier solcher Punkte heißen die Resonanzflächen *Double Velocity Surfaces* und so fort.

Zum Erreichen des Hauptzieles der vorliegenden Arbeit, also zur Berechnung des Einflusses einer durch Mehrfachresonanz veränderten Linienstrahlungskraft g_l auf das gegebene

Windgeschwindigkeitsfeld, ist es zunächst vonnöten, diejenigen Gebiete im Wind zu bestimmen, von welchen die treibende Strahlung überhaupt emittiert wird. Mit anderen Worten ist es Ziel dieses Abschnittes, Verfahren zur Suche nach Resonanzflächen (es handelt sich um CPSs) für beliebige Windgeschwindigkeitsgesetze zu entwickeln und zu diskutieren. Dabei sei die Einschränkung auf sphärisch symmetrische Strömungen gemacht.

In Abschnitt 5.1 wird dazu eine quasianalytische Methode vorgestellt, welche sich zwar einer analytisch hergeleiteten Funktion $G(x, y)$ bedient um die Geometrie der Resonanzflächen zu bestimmen, die jedoch andererseits die hohe Rechengeschwindigkeit heutiger Rechner benutzt, um die nötige Nullstellensuche für sehr viele Koordinatenpunkte (x, y) durchzuführen. Es werden drei exemplarische Windgeschwindigkeitsgesetze auf diese Weise untersucht.

Im anschließenden Abschnitt 5.2 stellen wir dann ein rein numerisches Verfahren vor. Dieses gewinnt die Geometrie der aus einem $v(r)$ - Gesetz resultierenden Resonanzfläche, indem es in sehr feiner Auflösung an jedem potentiellen Resonanzort r' die dort herrschende Windgeschwindigkeit berechnet, ihre Projektion auf die Sichtlinie zum festen Ort r im Wind bestimmt und diese projizierte Geschwindigkeit mit der ebenfalls auf den genannten Sichtstrahl projizierten Windgeschwindigkeit am Ort r selbst vergleicht. Sind die projizierten Geschwindigkeiten gleich, handelt es sich um einen Punkt auf der gesuchten Resonanzfläche. Nach und nach entsteht so das Gesamtbild der zu entdeckenden CPS.

5.1 Quasianalytische Resonanzflächensuche

5.1.1 Analytische Überlegungen

Die gesuchten Resonanzflächen eines Ortes $\vec{r}$ lassen sich auch quasianalytisch durch die Reduzierung des Problems auf eine Nullstellensuche finden. Anhand von Abbildung 5.2 soll zunächst die Geometrie des Problems verdeutlicht werden. Gesucht ist die zum sich im Sternwind befindenden Ort $\vec{r}$ gehörende Resonanzfläche. Ein exemplarischer Resonanzort auf dieser Fläche sei $\vec{r}\,'$. Aufgrund der angenommenen radialen Symmetrie des Windes kann die Vektorschreibweise beim Ort r wegfallen, nicht jedoch beim Resonanzort $\vec{r}\,'$, da dieser natürlich weiterhin richtungsabhängig ist. Die vom Stern in Richtung von $\vec{r}\,'$ ausgesendeten Photonen werden an diesem Resonanzort in Richtung von r gestreut und propagieren somit entlang des Vektors $\vec{n}$. Dieser schließt mit $\vec{r}\,'$ einen Winkel θ' und mit $\vec{r}$ einen Winkel θ ein. Schließlich geben x und y die kartesischen Koordinaten des Resonanzortes $\vec{r}\,'$ an, während r' seine Entfernung vom Sternmittelpunkt ist. In Vorwegnahme des Abschnitts 5.1.2 ist in Abbildung 5.2 eine Resonanzfläche exemplarisch gezeichnet, obgleich ihre genaue Geometrie später noch zu bestimmen ist. Hier dient sie lediglich der Veranschaulichung. Im Folgenden seien definiert

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \cos\theta = \mu \tag{5.2}$$

$$\vec{r}\,' \cdot \vec{n} = \cos\theta' = \mu' \tag{5.3}$$

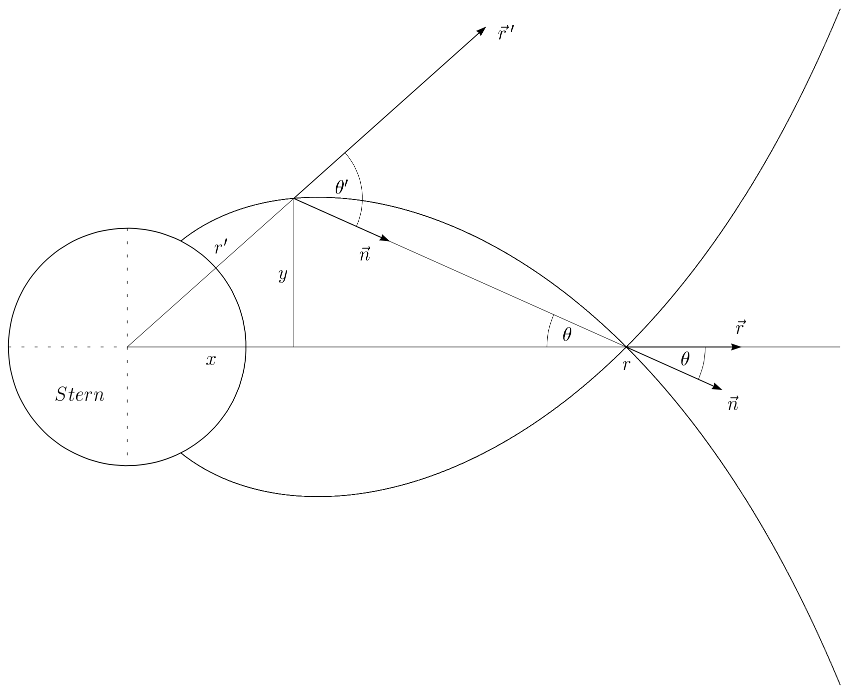

Abbildung 5.2: Geometrie zur quasianalytischen Resonanzflächensuche.

und $v(r)$ sei ein vorgegebenes radiales Geschwindigkeitsgesetz. Die zu erfüllende Resonanzbedingung folgt aus (5.2) und (5.3) zu

$$v(r)\ \vec{r}\cdot\vec{n} = v(r')\ \vec{r}'\cdot\vec{n} \tag{5.4}$$

$$v(r)\ \cos\theta = v(r')\ \cos\theta' = -v(r')\ \cos(\pi-\theta')\ . \tag{5.5}$$

Weiterhin folgt aus Abbildung 5.2 mittels des Sinussatzes

$$\frac{\sin\theta}{r'} = \frac{\sin(\pi-\theta')}{r} \tag{5.6}$$

und nach Quadratur zusammen mit $\cos\theta' = -\cos(\pi-\theta')$ aus (5.5)

$$\cos^2(\pi-\theta') = 1 - \frac{r^2}{r'^2}(1-\mu^2)\,. \tag{5.7}$$

Zwecks besserer Lesbarkeit verstehen sich von jetzt an v als $v(r)$ und v' als $v(r')$. Quadrierung der Resonanzbedingung (5.5) und Einsetzen von (5.7) liefern

$$v^2\mu^2 = v'^2\ \left\{1 - \frac{r^2}{r'^2}(1-\mu^2)\right\}. \tag{5.8}$$

Um eine vom Parameter μ freie Form zu finden, rechnen wir auf kartesische Koordinaten x, y um. Ziel soll sein, von x und y abhängige Ausdrücke für μ^2 und $1-\mu^2$ in (5.8) zu finden. Beachten wir zunächst die folgenden Zusammenhänge

$$\tan^2\theta = \frac{y^2}{(r-x)^2} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\mu^2}{\mu^2}\ . \tag{5.9}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 + \frac{y^2}{(r-x)^2} = \frac{(r-x)^2 + y^2}{(r-x)^2} \tag{5.10}$$

und somit

$$\mu^2 = \frac{(r-x)^2}{(r-x)^2 + y^2} \; . \tag{5.11}$$

Einsetzen von (5.11) für das nennerseitige μ^2 in (5.9) und Auflösen nach $1-\mu^2$ liefert

$$1 - \mu^2 = \frac{y^2}{(r-x)^2 + y^2} \; . \tag{5.12}$$

Damit existieren die gesuchten Ausdrücke für μ^2 und $1-\mu^2$, sodass (5.8) lautet

$$v^2 \frac{(r-x)^2}{(r-x)^2 + y^2} = v'^2 \left[1 - \frac{r^2}{r'^2} \left\{ \frac{y^2}{(r-x)^2 + y^2} \right\} \right] \; . \tag{5.13}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{v'^2} &= \left[1 - \frac{r^2 y^2}{r'^2 \left\{ (r-x)^2 + y^2 \right\}} \right] \cdot \frac{(r-x)^2 + y^2}{(r-x)^2} \\ &= \frac{r'^2 \left\{ (r-x)^2 + y^2 \right\} - r^2 y^2}{r'^2 \left\{ (r-x)^2 + y^2 \right\}} \cdot \frac{(r-x)^2 + y^2}{(r-x)^2} \\ &= \frac{(r-x)^2 + y^2}{(r-x)^2} - \frac{r^2 y^2}{r'^2 (r-x)^2} \\ &= 1 + \frac{y^2}{(r-x)^2} - \frac{r^2 y^2}{r'^2 (r-x)^2} \\ &= 1 - \frac{y^2}{(r-x)^2} \left(\frac{r^2}{r'^2} - 1 \right) \; . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Aus Abbildung 5.2 erkennt man $r'^2 = x^2 + y^2$ und wir erhalten einen von μ freien, geschlossenen Ausdruck

$$G(x,y) = \frac{v^2(r)}{v^2(\sqrt{x^2+y^2}\,)} + \frac{y^2}{(r-x)^2} \left(\frac{r^2}{x^2+y^2} - 1 \right) - 1 = 0 \; . \tag{5.15}$$

Bei gegebenem Parameter r und bekanntem Geschwindigkeitsgesetz $v(r)$ kann für jeden Wert von x durch finden der Nullstelle von G der y-Wert berechnet werden. Erfolgt diese Rechnung für alle interessierenden x, so gewinnt man die zu r bei gegebenem $v(r)$ gehörende Resonanzfläche $y(x)$.

5.1.2 Numerische Nullstellensuche

Bei beliebigem, jedoch festem Wert für r und einem vorgegebenen x wird der Ausdruck aus (5.15) zu

$$G(x,y) = G(x = const.,\, y) = 0 \, . \tag{5.16}$$

Die Suche nach der gesamten Resonanzfläche reduziert sich auf das Finden der Nullstellen von G für alle x, demnach auf die Suche nach Werten von y, mit welchen bei gegebenen x Gleichung (5.16) erfüllt wird.

Exemplarisch sollen hier die Untersuchungen für bestimmte Geschwindigkeitsgesetze durchgeführt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit und rein willkürlich sei in allen folgenden Beispielen $r = 2.0$, solange nichts anderes vereinbart wird.

Zunächst widmen wir uns einem sehr einfachen $v(r)$ - Gesetz, namentlich $v(r) = 1/r$. Den Verlauf dieses Geschwindigkeitsprofils zeigt Abbildung 5.3. Es ist zunächst interessant zu wissen, wie die Funktion $G(x, y)$ für diesen Fall aussieht. Sie ist auf jeden Fall symmetrisch zur (G, x) - Ebene, sodass sich ihre Darstellung in Abbildung 5.4 auf den Bereich von $y \geq 0$ beschränken kann.

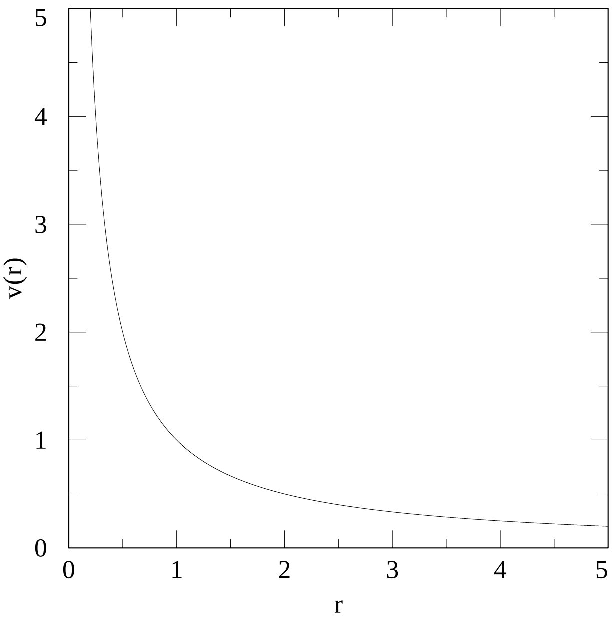

Abbildung 5.3: Windgeschwindigkeitsprofil für $v(r) = 1/r$.

Schneidet man diese Hyperfläche bei einem bestimmten Wert von x ab, wählt also ein beliebiges, jedoch festes x aus, so ergeben sich die in Abbildung 5.5 dargestellten Flächenausschnitte. Es zeigt sich, dass zwei qualitativ unterschiedliche Lösungsfälle auftreten, welche von der Wahl des Parameters x relativ zum Parameter r abhängen. Wie vereinbart sei $r = 2.0$, während $x = 1.5$ bzw. $x = 2.7$. Der Verlauf eines einzelnen Schnittes durch die Fläche der Funktion $G(x, y)$ ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Bei $x < r$ treten zwei Nullstellen auf (Abbildung 5.6 (a)), im Fall $x > r$ lediglich eine (Abbildung 5.6 (b)). Für die Suche der Resonanzflächen ist immer die erste Nullstelle im positiven Wertebereich von y von Interesse. Die gewählten Ausschnitte der Hyperfläche in Abbildung 5.5 zeigen auf der dem Betrachter zugewandten Seite ((G, y) - Ebene) genau diesen Verlauf der Kurve.

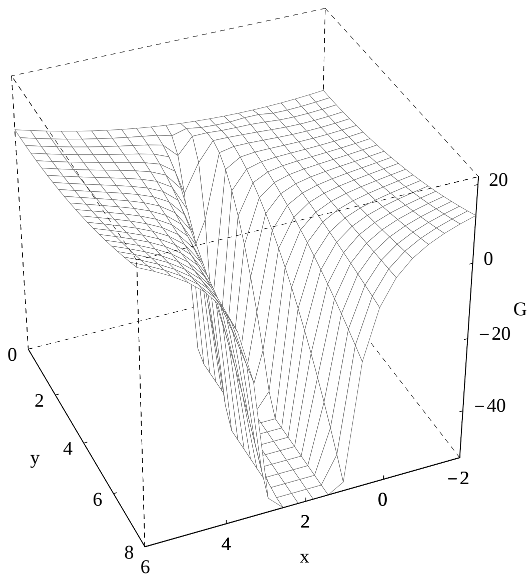

Abbildung 5.4: $G(x,y)$ für $v(r) = 1/r$.

Der hier verwendete numerische Algorithmus zur Nullstellensuche benötigt (wie beinahe jeder andere Algorithmus auch) zwei Intervallgrenzen als Startwerte, welche der Bedingung genügen müssen, dass sich die Nullstelle im betreffenden Intervall befindet. Es gilt damit $\mathrm{sig}(G(x, y_{left})) \neq \mathrm{sig}(G(x, y_{right}))$, d.h. die Funktionswerte der linken und rechten Intervallgrenze weisen unterschiedliche Vorzeichen auf. Die erste numerische Aufgabe für den zu programmierenden Solver besteht demnach in einer adäquaten Wahl der Intervallgrenzen.

Aus Abbildung 5.6 ist zu ersehen, dass als linke Intervallgrenze der Einfachheit halber immer $y_{left} = 0$ gewählt werden kann, während y_{right} von den Parametern x und r abhängt. Das vorliegende Programm *resoquasi.f90* (siehe FORTRAN 90 - Programmlisting im Anhang C.2) bedient sich bei der Suche nach der rechten Intervallgrenze einer einfachen Logik, indem es von der linken Intervallgrenze ausgehend einen konstanten Betrag in y - Richtung hinzuaddiert und jeweils den Funktionswert $G(x, y)$ an dieser Stelle prüft – solange, bis ein Vorzeichenwechsel stattgefunden hat. Um den gesuchten Vorzeichenwechsel einerseits nicht durch eine zu große Schrittweite zu überspringen und ihn andererseits nicht durch eine zu feine Auflösung allzulange und uneffektiv suchen zu müssen, haben wir die zu addierende Schrittweite als skalenabhängige und von den beiden bestimmenden Parametern x und r abhängige Größe vorgeschrieben (Zeile 39 im Code). Diese Methode zur Intervallgrenzenbestimmung ist in den Zeilen 98 bis 103 in der Function *ns* programmiert und funktioniert in der Praxis gut. Die rechte Intervallgrenze y_{right} wird schnell entdeckt und steht unmittelbar nach dem Finden eines Vorzeichenwechsels von G fest. Es zeigt sich zur Laufzeit des Programmes, dass je nach gewählten Parametern x und r

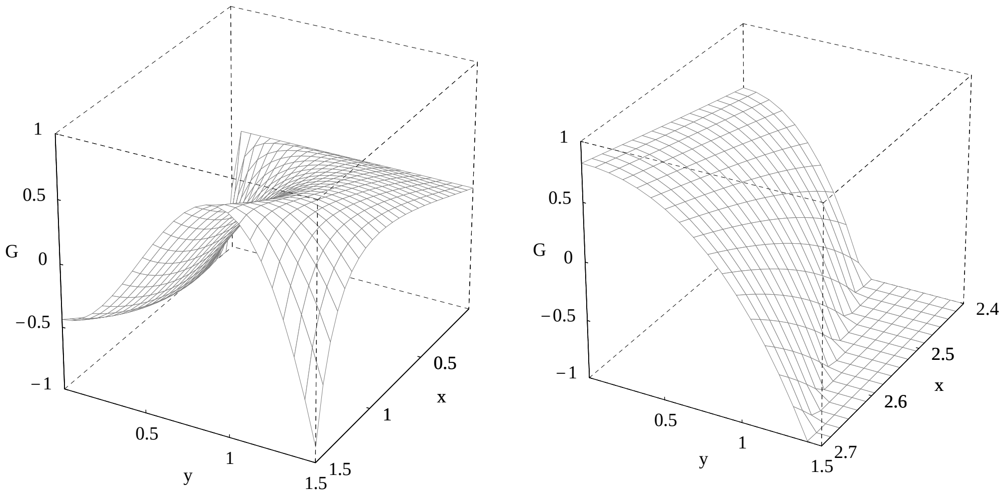

Abbildung 5.5: Ausschnitte von $G(x, y)$ für $v(r) = 1/r$. Links: Schnitt bei x = 1.5 . Rechts: Schnitt bei x = 2.7 .

die Addition des konstanten Betrages ca. 10 - 20 Mal durchgeführt werden muss, um den Vorzeichenwechsel zu finden, während die anschließende Intervallbisektion weitere 15 - 20 Mal durchgeführt werden muss, bei einer vorgegebenen Genauigkeit von $eps = 1.0 \cdot 10^{-6}$. Bei heutigen Rechnergeschwindigkeiten und einer Gesamtlaufzeit des Solvers von nur wenigen Sekunden ist diese verhältnismäßig schlechte Programmeffizienz kein Argument mehr gegen die Methode der Intervallbisektion.

Die Kernaufgabe des Solvers – das Finden der Nullstellen von $G(x, y)$ – ist in der Function *ns* (speziell Zeilen 105 bis 119) programmiert und bedient sich des klassischen Intervallbisektionsverfahrens. Für jedes in der x - Loop aktuelle x wird die Function *ns* aufgerufen (Zeile 49) und berechnet die zugehörige Nullstelle. Dazu halbiert der Algorithmus zunächst das vorgegebene Intervall und überprüft durch Vorzeichenvergleich, in welcher der beiden Intervallhälften sich die Nullstelle befindet. In dieser Hälfte wird eine erneute Bisektion durchgeführt und so fort. Diese Methode konvergiert relativ schnell, obwohl durchaus noch schnellere Verfahren existieren. Sie sind jedoch in bestimmten Situationen nicht so stabil wie die Bisektionsmethode, weshalb sie hier keine Verwendung fanden. Durch den Parameter *eps* ist die benötigte Genauigkeit festzulegen, durch *xres* die gewünschte Auflösung in x - Richtung. In einer großen Loop über x (Zeilen 35 bis 59) erfolgt die Berechnung der Nullstelle für insgesamt $(x_{max} - x_{min})/xres$ vorgegebene Werte von x und die Ergebnisse werden in Form einer x, y - Tabelle zur Weiterverwendung in eine Datei geschrieben.

Bei ersten Läufen des Programms zeigte sich, dass die gefundenen Resonanzflächen kleine Lücken in den Bereichen aufwiesen, in denen die Resonanzfläche fast senkrecht zur r - Achse steht. Dieses Phänomen hängt mit der verwendeten Schrittweite in x - Richtung

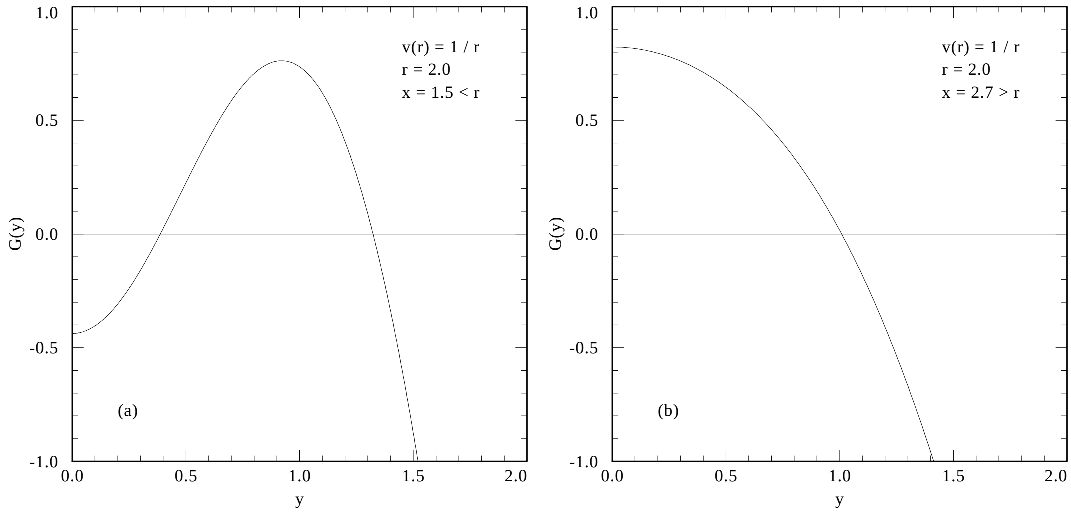

Abbildung 5.6: Verlauf von $G(x,y)$ aus Gleichung (5.15) für $v(r) = 1/r$. (a) Für ein festes $x < r$. (b) Für ein festes $x > r$. Wegen der Symmetrie zur G - Achse sind lediglich die beiden rechten Quadranten dargestellt.

zusammen, also mit dem Parameter *xres*. Offenbar reichte an diesen steilen Abschnitten die Auflösung nicht aus. Mehrere Wege sind denkbar, um dieses Problem zu bewältigen. Eine Möglichkeit wäre die konsequente Erhöhung der Auflösung in x - Richtung. Dieses Verfahren führt natürlich zum Ziel, doch eine beispielsweise um den Faktor 10 verfeinerte Schrittweite ließ die Laufzeit des Programmes um denselben Faktor ansteigen und war gegenüber anderen Verfahren nicht mehr vertretbar. Außerdem wuchs das resultierende Datenfile entsprechend, was bei seiner Weiterverarbeitung zu nicht unerheblichen Arbeitsverzögerungen führte. Eine weitere Methode wäre es, die Nullstellensuche auch mit einem vorgegebenen y, also durch Auflösung von $G(x, y)$ nach x statt nach y durchzuführen. Die so gewonnenen Daten würden dann nach Vertauschung der Koordinaten zum ersten Datensatz hinzugefügt werden und es ergäbe sich eine größere Datenpunktdichte.

Ich habe mich hier jedoch für eine dritte Variante entschieden. Dabei prüft das Programm nach jeder neu gewonnenen Nullstelle, ob ihr Ordinatenwert sich stark vom Ordinatenwert der unmittelbar zuvor berechneten Nullstelle unterscheidet, ob also ein gewisser Sprung vorliegt (Zeile 55 im Code). Im Fall eines positiven Tests wird die Subroutine *nsfine* aufgerufen, welche in einem kleinen x - Intervall um die eben berechnete Nullstelle herum mit einer zehn Mal höheren Auflösung nach weiteren Nullstellen sucht (Zeilen 75 bis 79), bei Bedarf auch in einem noch kleineren Intervall mit einer 100 mal höheren Feinheit (Zeilen 81 bis 85). Dadurch wird die Auflösung stets hoch genug sein, jedoch bei nur geringfügig höheren Kosten an Rechenzeit und Datenfilegröße. Die Subroutine ist in den Zeilen 69 bis 88 kodiert.

Die zum untersuchten Geschwindigkeitsgesetz $v(r) = 1/r$ gefundene Resonanzfläche ist in Abbildung 5.7 für drei verschiedene Resonanzorte $r = 1.1$, $r = 1.6$ und $r = 2.1$ dargestellt. Offensichtlich ändert sich die Geometrie der Resonanzfläche qualitativ nicht in Abhängigkeit von r, es findet jedoch eine proportionale Skalierung der gesamten Fläche statt. Bei $x = 0$ befindet sich der Sternmittelpunkt eines Sternes vom Radius 1, weshalb im strengeren Sinne die Resonanzfläche erst ab einem Radius von 1 um den Koordinatenursprung herum existent ist. Diese Tatsache ist im rechten Panel von Abbildung 5.7 durch eine schattierte Sternscheibe mit Radius $r = 1$ angedeutet.

Die in Abbildung 5.2 zunächst lediglich als Prinzipskizze verwendete Form der Resonanzfläche entspricht also der tatsächlichen Gestalt. Vielmehr ist diese „Fisch - Form“ mit dem sich im Schnittpunkt befindenden Ort r typisch für monoton hyperbolisch fallende Windgeschwindigkeitsgesetze.

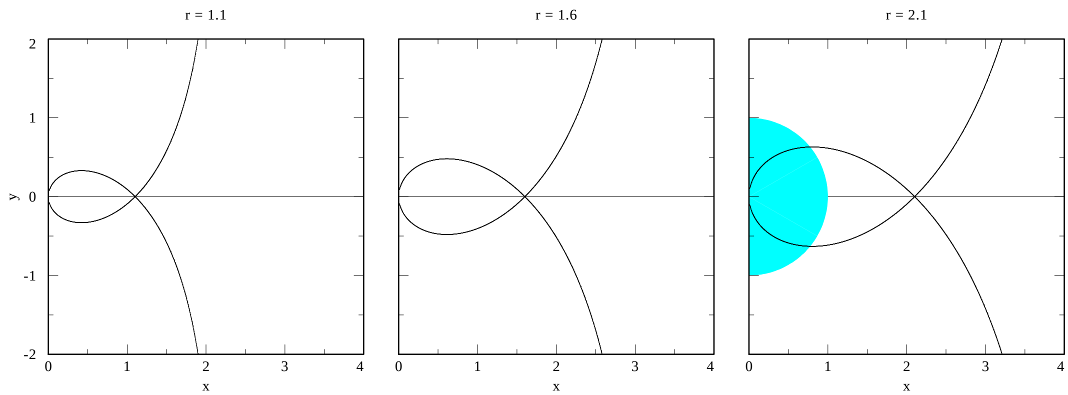

Abbildung 5.7: Quasianalytisch gefundene Resonanzfläche für $v(r) = 1/r$ bei drei verschiedenen Werten von r. Die Kurve im negativen Bereich von y wurde nicht explizit berechnet, sondern aus einfachen Symmetriegründen durch Spiegelung der oberen Werte erhalten. Im rechten Panel ist eine Sternscheibe mit Radius $r = 1$ angedeutet.

Mit dem programmierten Solver lässt sich die gesuchte Resonanzfläche auch für beliebige andere Windgeschwindigkeitsgesetze finden, indem das betreffende $v(r)$ - Gesetz in der Function v im Quellcode (Zeilen 134 bis 140) ersetzt wird. Wir möchten jetzt die Resonanzfläche für ein komplizierteres Geschwindigkeitsgesetz finden, das zwei Kinks aufweist, in welchem also ein negativer Geschwindigkeitsgradient auftritt. In absoluten und willkürlichen Größen sei das Gesetz beispielsweise folgendermaßen formuliert

$$v(r) = \begin{cases} r - 0.9 & \text{falls } r \leq 2 \\ 1/(r-1) + 0.1 & \text{falls } 2 < r \leq 3 \\ r - 2.4 & \text{falls } r > 3 \end{cases} . \qquad (5.17)$$

Dieses Windgeschwindigkeitsprofil kennzeichnet sich durch einen linearen Anstieg, gefolgt von einem hyperbolischen Abfall und einem anschließend erneut linear ansteigenden Teil. Es ist in Abbildung 5.8 dargestellt und zeigt die besagten Kinks bei $r = 2$ und bei $r = 3$.

Die Startgeschwindigkeit des Windes an der Sternoberfläche beträgt 0.1. Wir untersuchen zuerst, wie sich die Funktion $G(x, y)$ bei verschiedenen Orten r verhält, wie sie also auf die Lage von r bezüglich des $v(r)$ - Abschnittes mit negativem Gradienten reagiert. Anschließend betrachten wir die Topologie der für dieses Geschwindigkeitsgesetz gefundenen Resonanzflächen sowie ihre Änderung aufgrund der Variation von r. Im Gegensatz zu $v \sim 1/r$ und dem skaleninvarianten „Fisch“ hängt hier die Resonanzflächenform vom absoluten r-Wert ab.

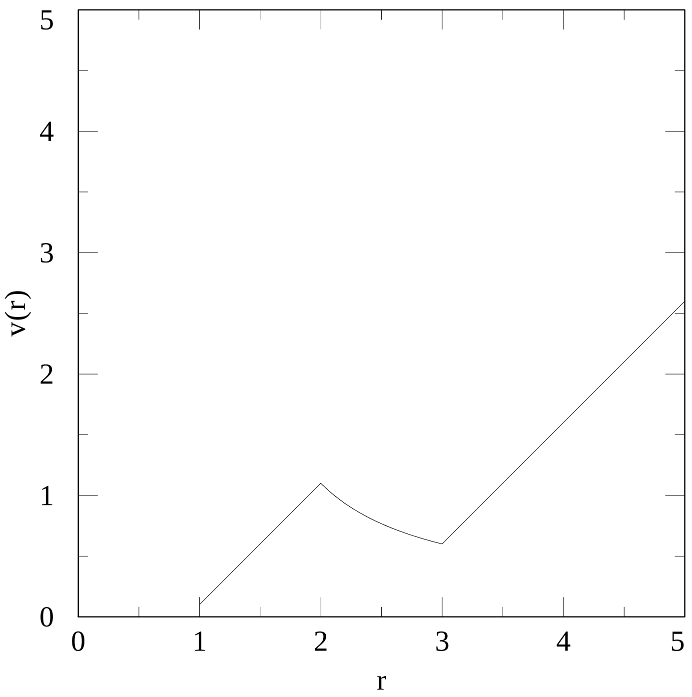

Abbildung 5.8: Windgeschwindigkeitsprofil mit zwei Kinks. Hyperbolischer Abfall und somit negativer v - Gradient für $2 < r \leq 3$, linearer Anstieg davor und dahinter. Startgeschwindigkeit an der Sternoberfläche ist 0.1 .

Prinzipiell gibt es beim in Abbildung 5.8 dargestellten 2 - Kink - Geschwindigkeitsgesetz genau vier sich qualitativ voneinander unterscheidende Orte r. Diese Orte sind mit den römischen Ziffern $I - IV$ im oberen Panel von Abbildung B.1 im Anhang B.1 gekennzeichnet. Die vier möglichen Orte sind die folgenden: im ersten linearen Teil des $v(r)$ - Gesetzes (A), im hyperbolisch abfallenden Teil (B), im zweiten linearen Teil - jedoch bei Windgeschwindigkeiten kleiner der Geschwindigkeit am ersten Kink (C) und schließlich im zweiten linearen Teil, jedoch bei Geschwindigkeiten oberhalb der Geschwindigkeit am ersten Kink (D). Die Orte I bis IV befinden sich demnach in Bereichen A bis D des Windgeschwindigkeitsprofils und diese Bereiche sind in Abbildung B.1 durch senkrechte Linien voneinander getrennt.

Zur Untersuchung des Verhaltens von $G(x, y)$ in Abhängigkeit von der Position des Ortes r im Wind ist es zweckmäßig, die Funktion zu jedem der vier Orte I bis IV in den dabei relevanten Bereichen zu plotten. Es stellt sich die Frage, welche Bereiche das sind. Nehmen wir zunächst an, r befinde sich bei I, d.h. im Teilstück A des Geschwindigkeitsgesetzes und betrachten dazu das Panel „Fall I“ in Abbildung B.1. Der zu variierende Ort x kann sich erstens im gleichen linearen Teilstück A befinden, jedoch entweder vor oder hinter dem festen Ort I und damit bei einer kleineren bzw. größeren Geschwindigkeit als der am Ort I herrschenden. Dieser Tatsache wird Rechnung getragen, indem der Bereich A in der Abbildung in die beiden Teilbereiche Aa und Ab unterteilt wird, entsprechend der Position von x vor- bzw. hinter I. Zweitens, drittens und viertens kann x in den Bereichen B, C und D liegen. Es ist jedoch zu beachten, dass die am Ort I herrschende Geschwindigkeit bei größeren Entfernungen vom Stern noch zweimal auftritt, nämlich dort, wo die durch I gehende, waagerechte, gepunktete Linie das $v(r)$ - Gesetz schneidet. Jeder dieser Schnittpunkte unterteilt seinen Bereich (hier B bzw. C) in zwei weitere – dies sind je ein Teilbereich mit Geschwindigkeiten ober- bzw. unterhalb der am Ort I herrschenden Windgeschwindigkeit. Zwecks einheitlicher Nomenklatur benennen wir diese Teilabschnitte analog, also Ba und Bb bzw. Ca und Cb. Der Bereich D wird hier nicht geteilt, denn in ihm herrschen per Definition ausschließlich höhere Geschwindigkeiten als $v(r = I)$. Er soll aus Konsistenzgründen Da heissen.

Diese prinzipielle Differenzierung der einzelnen Bereiche ist notwendig, denn die in dieser Arbeit untersuchte Kopplung ist durch die mehrfache Existenz ein und der selben Windgeschwindigkeit bei verschiedenen Entfernungen vom Stern definiert. Die Resonanzkopplung tritt nur zwischen Bereichen gleicher Geschwindigkeit auf – für die hier beabsichtigte Variation von x bietet es sich an, Bereiche mit kleineren und größeren Geschwindigkeiten als der am Ort I herrschenden voneinander zu unterscheiden.

Folglich empfiehlt sich im „Fall I“ eine Inspektion der Funktion $G(x, y)$ in den einzelnen Teilbereichen Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb und Da, da nur beim Übergang von einem Bereich zu einem anderen ist eine qualitative Veränderung von G zu erwarten. Ein Ändern von x innerhalb eines dieser sieben Teilbereiche dürfte zwar quantitive Unterschiede der resultierenden Funktion G hervorrufen, die Qualität derselben sollte jedoch nicht berührt sein. Um diese Vermutung zu untermauern, plotten wir $G(x, y)$ für je einen Wert von x aus jedem der sieben Teilbereiche.

Das Ergebnis dieser abschnittsweisen Untersuchung von $G(x, y)$ zeigt für den „Fall I“ die Abbildung B.2 im Anhang B.1. Für sieben Werte von x – entsprechend den oben genannten Teilabschnitten – ist der Verlauf der Funktion $G(x, y)$ über y geplottet. Es sind sich deutlich unterscheidende Charakteristika der Funktion erkennbar, jedoch ist allen Plots die Symmetrie zur Ordinate gemeinsam. Bei $y = 0$ befindet sich stets ein Extremum von $G(x, y)$. Im Fall eines Minimums hat $G(x, y)$ zwei Nullstellen (im interessierenden positiven Wertebereich von y), wenn der Ordinatenwert bei $y = 0$ negativ ist, das Minimum also unterhalb der Abszisse liegt. In diesem Fall ist die erste Nullstelle die gesuchte Lösung. (Im Fall IAa trifft dies nicht zu und die einzige vorhandene Nullstelle bei größerem r ist keine physikalisch sinnvolle Lösung.) Im Falle eines Maximums von G bei $y = 0$ ergibt sich überhaupt eine Lösung nur für Fälle mit $G(x, y = 0) > 0$ (hier im

Fall IBb und ICa). Die einzige Nullstelle entspricht dann der gesuchten Lösung.

Abbildungen B.3, B.4 und B.5 verdeutlichen denselben Sachverhalt für die oben diskutierten Fälle II, III und IV. Dabei werden dieselben Teilbereiche Aa bis Da betrachtet, obgleich sie andere Intervalle auf r belegen. Lediglich Fall IV unterscheidet sich in der Einteilung in seine Teilabschnitte, denn die in Abbildung B.1, Fall IV, durch den Ort IV gehende waagerechte Linie gleicher Geschwindigkeit schneidet die Kurve des Windgeschwindigkeitsgesetzes kein weiteres Mal. Sie unterteilt somit keinen der anderen Bereiche A, B und C in Teilbereche a und b.

In gewissen Bereichen zeigt der Verlauf von G eindeutig Unstetigkeiten (z.B. Abbildung B.4, Fall $IIIAa$ bis $IIIBb$), weshalb sich hier die Bevorzugung eines auf Intervallbisektion basierenden Nullstellensolvers gegenüber einem Newtonschen als richtig erweist. Ein Kraft der Newtonschen Methode (Tangentenmethode) arbeitender Algorithmus würde an den Unstetigkeitsstellen möglicherweise nicht terminieren, da dort keine Differenzierbarkeit vorliegt.

Die auf diese Weise gefundene Resonanzfläche ist für verschiedene Werte von r in einer Bildsequenz in Abbildung B.6 im Anhang B.1 zu sehen. Das zugrunde liegende Windgeschwindigkeitsgesetz ist zur Erinnerung und leichteren Interpretation im oberen linken Panel abgebildet. Der Wert von r wurde hierbei stufenweise erhöht und zu jedem r die Resonanzfläche berechnet. Durch die relativ kleine Schrittweite von $\Delta r = 0.13$ fährt r fast den gesamten interessanten Bereich des $v(r)$ - Gesetztes ab, vom ersten linearen Teilstück über den hyberbolischen Abfall mit negativem Gradienten bis kurz vor dem zweiten linearen Teil. Es ist deutlich erkennbar, wie sich dabei die Form der Resonanzfläche verändert. Sie begint einteilig auf der windabgewandten Seite von r und rückt zusehends upstream bis sie schließlich den Ort r selbst erreicht. Alsbald besteht die Resonanzfläche aus zwei Teilen, die bei r gewissermaßen zusammengeschnürt werden. Dies ist der Fall, wenn r durch den hyperbolischen Teil des Windgeschwindigkeitsprofils fährt, wenn also Kopplungen sowohl zwischen r und dem ersten linearen Teilstück stattfinden als auch zwischen r und dem zweiten linearen Abschnitt. Bei r - Werten oberhalb von 3 verschwindet die Resonanzfläche vollständig, d.h. dass beim vorliegenden Windgeschwindigkeitsgesetz für Orte jenseits von $r = 3$ keine Kopplung mehr stattfindet. Nirgendwo sonst im Wind gibt es gleiche Geschwindigkeiten der Materie, sodass auch keine entsprechenden Absorptions- und Emissionsfrequenzen auftreten können.

Die in Abbildung B.6 dargestellte Sequenz von Resonanzflächen für unterschiedliche Werte von r wurde erzeugt, indem im Programm *resoquasi.f90* (Programmlisting im Anhang (C.2)) eine Schleife mit r als Laufvariablen um die x - Loop herum hinzugefügt wurde. Bei einer Schrittweite von $\Delta r = 0.13$ und passend gewähltem r - Intervall wurden die 15 abgebildeten Resonanzflächen stellvertretend für eine kontinuierliche Sequenz berechnet und mittels der in unserer Arbeitsgruppe von Professor Hamann entwickelten Software WRPLOT geplottet. Die meisten der in dieser Arbeit vorliegenden Datendiagramme wurden mit WRPLOT erzeugt.

Als drittes und vorerst letztes Beispiel untersuchen wir ein abgewandeltes $v(r)$ - Gesetz, das zwei Teilstücke mit negativem Geschwindgkeitsgradienten aufweist, welches jedoch ähnlich dem Windgeschwindigkeitsgesetz aus Gleichung (5.17) konstruiert werden kann. Der analytische Ausdruck dafür sei

$$v(r) = \begin{cases} r - 0.9 & \text{falls } r \leq 2 \\ 1/(r-1) + 0.1 & \text{falls } 2 < r \leq 3 \\ r - 2.4 & \text{falls } 3 < r \leq 3.5 \\ 1/(r-2.5) + 0.1 & \text{falls } 3.5 < r \leq 4.5 \\ r - 3.9 & \text{falls } r > 4.5 \end{cases} \quad . \tag{5.18}$$

wobei die exakten Parameter ebenfalls willkürlich sind. Den Verlauf dieses Windgeschwindigkeitsgesetzes verdeutlicht Abbildung 5.9 und man sieht eine Folge von sich abwechselnden linear ansteigenden und einfach hyperbolisch abfallenden Teilstücken mit insgesamt vier Kinks. In den folgenden Passagen werden auf dieses Geschwindigkeitsgesetz unter dem Namen 4 - Kink - Geschwindigkeitsgesetz Bezug nehmen. Außerdem startet auch in diesem Beispiel der Wind an seiner Basis mit einer Geschwindigkeit von 0.1 .

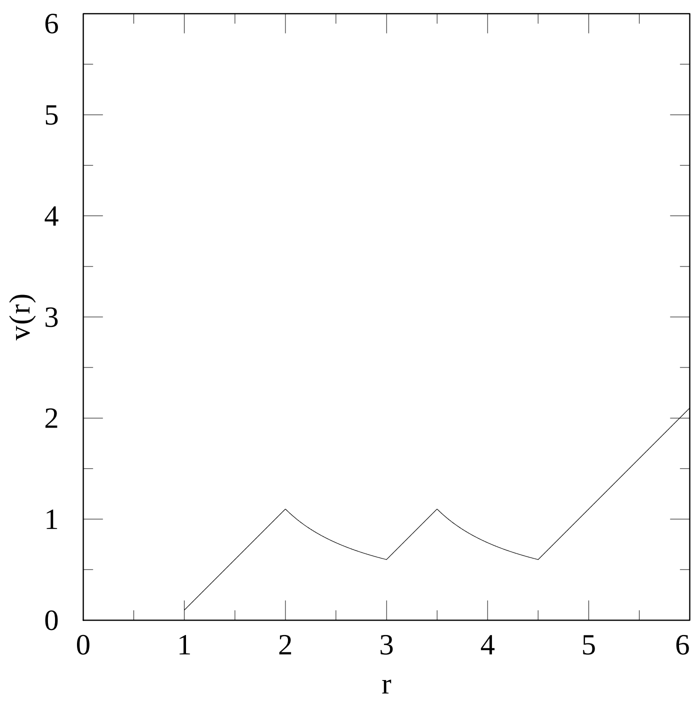

Abbildung 5.9: Windgeschwindigkeitsprofil mit vier Kinks. Hyperbolischer Abfall und somit negativer v - Gradient für $2 < r \leq 3$ und $3.5 < r \leq 4.5$, linearer Anstieg überall sonst. Die Startgeschwindigkeit an der Sternoberfläche beträgt 0.1 .

Innerhalb dieses Windes sind vielfältige Resonanzkopplungen möglich, denn je nach Lage des betrachteten Ortes r in diesem Wind existieren bis zu fünf Orte gleichen Geschwindigkeitsbetrages bzw. bis zu drei Orte gleichen Geschwindigkeitbetrages und gleicher

Orientierung. Aus Gründen der Analogie zum voranstehenden Beispiel des 2 - Kink - Geschwindigkeitsgesetzes verzichten wir hier auf die Darstellung und Diskussion von $G(x, y)$ und stellen unmittelbar die berechnete Sequenz der Resonanzflächen in Abbildung B.7 im Anhang B.2 dar. Dabei wird der Ort r im Wind wiederum variiert, sodass er den gesamten interessanten Bereich vom ersten bis zum letzten linearen Teilstück des Windgeschwindigkeitsgesetzes durchwandert. Die gewählte Schrittweite bei Vorgabe von 15 Momentaufnahmen zur Überdeckung des gesamten interessierenden r - Intervalls beträgt $\Delta r = 0.24$. Es ergibt sich ein bereits recht komplexes Bild der resultierenden Resonanzflächen.

Die Sequenz beginnt bei $r = 1.10$, während sich der betrachtete Ort noch im ersten linearen Teilstück des $v(r)$ - Gesetzes befindet. Augenscheinlich besteht der fundamentalste qualitative Unterschied zum 2 - Kink - Geschwindigkeitsgesetz darin, dass die Resonanzfläche geteilt ist und aus zwei einzelnen Flächen besteht. Das entspricht der Tatsache, dass im vorliegenden Fall zwei Teilstücke des Geschwindigkeitsprofils mit negativem Gradienten existieren und somit die Kopplungen in zwei räumlich separierten Abschnitten des Windes stattfinden können.

Im dem Moment, in dem r den ersten hyperbolischen Abschnitt von $v(r)$ bei $r = 1.5$ erreicht, zeigt sich in völliger Analogie zum Fall der zwei Kinks eine Einschnürstelle innerhalb der ersten Resonanzfläche, da nun eine Kopplungswechselwirkung zwischen Windbereichen gleicher Geschwindigkeit im ersten hyperbolischen sowie im zweiten linearen Teilstück stattfindet. Diese Einschnürung verschwindet erst wieder, wenn r in das zweite lineare Teilstück bei $r = 2.5$ rückt. Sodann besteht die Resonanzfläche erneut aus zwei getrennten und jeweils nicht eingeschnürten Bereichen. Verdeutlicht wird dies in Abbildung B.7, Panels $r = 2.54$ und $r = 2.78$.

Eine Einschnürung tritt ein weiteres Mal auf, sobald r einen Wert von 3.0 überschreitet. Der zweite hyperbolische Abschnitt des 4 - Kink - Windgeschwindigkeitsgesetzes wird wirksam und die weiter außen im Wind liegende Resonanzfläche wird durch die Kopplung zwischen diesem und dem dritten linearen Abschnitt eingeschnürt. Diese Einschnürung der sternabgewandten Resonanzfläche existiert bei Radien jenseits von $r = 4.0$ nicht länger, denn dort beginnt das dritte lineare Teilstück des Windes und die dafür verantwortliche Kopplung verliert ihre Wirkung. Schließlich werden die Resonanzflächen immer kleiner und verschwinden ab $r = 4.5$ vollständig, sobald der Wind also im dritten linearen Teilstück eine Geschwindigkeit von mehr als $v(r) = 1.5$ erreicht hat und somit schneller ist als in den beiden Windgeschwindigkeitsmaxima bei $r = 1.5$ und $r = 3.0$. Es findet keine Resonanzkopplung mehr statt, weil es an keiner weiteren Stelle im Wind Materie gleicher projizierter Geschwindigkeit gibt.

Zu bemerken ist letztendlich noch, dass die beiden separierten Resonanzflächen in diesem Beispiel für alle Werte von r stets getrennt bleiben. Eine Annäherung gewissermaßen auf „Tuchfühlung“ findet bei $r = 1.5$ und $r = 4.0$ statt. Im ersten Fall ist dies beim Beginn der Einschnürung der sternnahen Resonanzfläche, im zweiten Fall beim Ende der Einschnürung der sternfernen Fläche. Die beiden Teilflächen berühren dann jeweils einander, jedoch überlappen sie dabei nicht und entfernen sich voneinander bei der kleinsten Variation von r.

Ich möchte nicht verschweigen, dass der im Programm *resoquasi.f90* verwendete Algorithmus wegen der in Gleichung (5.8) durchgeführten Quadrierung der Resonanzbedingung gegenüber einer eventuellen Multiplizität der Lösungen von $G(x, y)$ blind ist. Es zeigt sich, dass neben den korrekt berechneten Resonanzflächen auch artifizielle Datenpunkte im Output des Programmes auftauchen und diese nachträglich manuell entfernt werden mussten.

Nicht zuletzt zur Rechtfertigung eines solchen Eingriffes befasst sich der folgende Abschnitt mit der rein numerischen Suche nach Resonanzflächen. Dabei treten die Phantom - Flächen nicht mehr auf, da hier nicht nur die Geschwindigkeitsbeträge, sondern die vektoriellen Projektionen von Geschwindigkeiten an unterschiedlichen Orten im Wind behandelt werden. Der Algorithmus kennt das Problem der multiplen Lösungen somit gar nicht.

5.2 Numerische Resonanzflächensuche

Die Bestimmung der aus einem gegebenen Windgeschwindigkeitsgesetz $v(r)$ am Ort r resultierenden Resonanzflächen durch Finden von Nullstellen der Funktion G(x,y) (siehe Gleichung (5.15)) ist nicht der einzige mögliche Weg. Daneben ist es unter anderem auch möglich, jene Resonanzflächen auf rein numerischem Wege zu gewinnen. Der vorliegende Abschnitt befasst sich mit dieser Methode und zeigt auf, dass durch Inanspruchnahme der hohen Rechenleistung heutiger Computer ohne weiteres ein äquivalentes Ergebnis schnell erreicht werden kann.

Das zu diesem Zweck in FORTRAN 90 geschriebene Programm *resonum.f90* ist im Programmlisting im Anhang C.3 wiedergegeben und wird im Folgenden erläutert. Zunächst möchten wir zur Verdeutlichung seiner Funktionsweise auf Abbildung 5.10 verweisen. Dargestellt ist – erneut lediglich exemplarisch – die „Fisch“ - Resonanzfläche, welche sich aus dem Geschwindigkeitsgesetz $v(r) = 1/r$ ergibt. Erneut wird angenommen, dass am Resonanzort r' ein Photon in Richtung von r gestreut wird bzw. umgekehrt im Fall von $r' > r$. Um das Vorliegen einer Resonanz zu verifizieren ist es Ziel aller Berechnungen, die Projektionen der Windgeschwindigkeiten am Ort r und am Resonanzort r' auf die Verbindungslinie dieser beiden Orte zu gewinnen und diese zwei Projektionen miteinander zu vergleichen.

Der im hier diskutierten Programm verwendete Algorithmus führt einen feinen Scan in x - Richtung und in y - Richtung durch und überprüft die Erfüllung dieser Resonanzbedingung für jedes Wertepaar (x, y). Es ist sinnvoll zwei Fälle zu unterscheiden. Zum einen findet man die Situation für alle $x \leq r$ dargestellt in Abbildung 5.10 (links) vor, zum anderen für $x > r$, abgebildet in Abbildung 5.10 (rechts). Die durchzuführenden

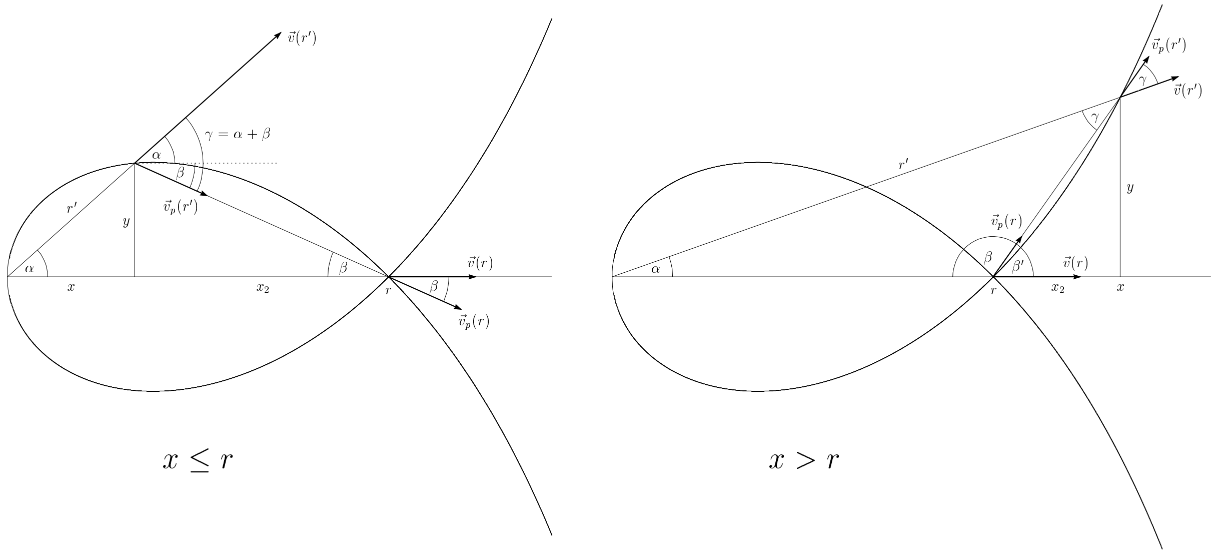

Abbildung 5.10: Geometrie zur numerischen Resonanzflächensuche. Links: für alle $x \leq r$. Rechts: für alle $x > r$. Zur Veranschaulichung ist die zum $v(r) = 1/r$ - Geschwindigkeitsgesetz gehörende Resonanzfläche eingezeichnet. Überall auf der Resonanzfläche sind die Vektoren der projizierten Geschwindigkeiten $\vec{v}_p(r)$ und $\vec{v}_p(r')$ einander identisch.

geometrischen Berechnungen unterscheiden sich markant in beiden Fällen, weshalb eine gesonderte Betrachtung beider sogar notwendig ist.

Im Fall (a) benötigt man die beiden Geschwindigkeiten $v(r)$ und $v(r')$ sowie für ihre Projektionen auf die Verbindungslinie (Propagationsrichtung des bei r' gestreuten Photons) die beiden Winkel β und γ. Die einzigen eingangs bekannten Größen sind die Koordinaten x und y sowie das zugrundeliegende Windgeschwindigkeitsgesetz. Um γ zu bestimmen, errechnet man zunächst r' nach Pythagoras. Aus $\alpha = \arccos(x/r')$ ergibt sich der Winkel α. Vermöge $x_2 = r - x$ sowie $\beta = \arctan(y/x2)$ finden wir den Winkel β und damit den zweiten gesuchten Winkel $\gamma = \alpha + \beta$.

Mit den beiden leicht zu berechnenden Geschwindigkeiten $v(r)$ und $v(r')$ ergeben sich nun auch ihre Projektionen $v_p(r)$ sowie $v_p(r')$ via $v_p(r) = v(r) \cos \gamma$ bzw. $v_p(r') = v(r') \cos \beta$. An dieser Stelle ist ein Vergleich der beiden projizierten Geschwindigkeiten möglich und im Falle einer Übereinstimmung die Gewinnung eines Punktes in der (x, y) - Ebene, welcher auf der gesuchten Resonanzfläche liegt.

Die geometrischen Überlegungen im Fall (b) sind nicht wesentlich verschieden zu jenen im Fall (a), jedoch werden andere Winkel und Strecken benötigt. Nach identischer Bestimmung von r' aus $r' = (x^2 + y^2)^{1/2}$ sowie Berechnung des Winkels α durch die Beziehung $\alpha = \arccos(x/r')$ folgt mit nunmehr $x_2 = x - r$ zunächst der Winkel $\beta' = \arctan(y/x_2)$ und damit auch der Winkel $\beta = \pi - \beta'$. Folglich errechnet sich der zweite gesuchte Winkel γ schließlich durch $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Die auch hier bei gegebenem $v(r)$ - Gesetz bekannten

Geschwindigkeiten $v(r)$ und $v(r')$ ergeben zusammen mit den eben ermittelten Winkeln β' und γ die auf die Propagationsrichtung des Photons projizierten Geschwindigkeiten $v_p(r) = v(r)\cos\beta'$ sowie $v_p(r') = v(r')\cos\gamma$. Vergleich der Projektionen entscheidet über die Zugehörigkeit des untersuchten Punktes zur Resonanzfläche.

Die Arbeitsweise des Programmes *resonum.f90* orientiert sich streng am soeben erläuterten Algorithmus. Der Scan der x- bzw. y-Richtung geschieht in einer Schleife über x (Zeilen 35 bis 43) sowie in einer darin geschachtelten y-Loop (Zeilen 36 bis 42). Für jeden potentiellen Resonanzort r' in der Ebene – charakterisiert durch seine Koordinaten x und y – wird zusammen mit dem festen Ort r die Function *reso* aufgerufen (Zeile 37), welche entweder 1 oder 0 zurückliefert, je nachdem ob r' und r miteinander in Resonanz stehen oder nicht.

Die erforderlichen Berechnungen werden demnach in der besagten Function (Zeilen 53 bis 91) durchgeführt. Nach Initialisierung des Rückgabewertes *reso* in Zeile 66 berechnet das Programm zunächst den Resonanzort r', die Windgeschwindigkeit dort und den Winkel α, bevor es abhängig von aktuellen Werten von x und r die Kalkulationen verzweigt. Alle eingangs behandelten gestrichenen Größen führen im Quellcode eine „1“ am Ende (z.B. *r1* statt r'), die Geschwindigkeiten $v(r)$ und $v(r')$ heißen *vr* sowie *vr1* und ihren Projektionen auf die Propagationsrichtung des gestreuten Photons wird ein zusätzliches „p“ ans Ende konkateniert. So entspricht beispielsweise *vr1p* der gesuchten projizierten Geschwindigkeit $v_p(r')$ am Resonanzort r' .

Sowohl im Fall (a) (Zeilen 73 bis 78) als auch im Fall (b) (Zeilen 79 bis 86) werden jeweils die projizierten Geschwindigkeiten an den Orten r und r' berechnet (Zeilen 77,78 bzw. 84,85) und stehen zum anschließenden Vergleich in Zeile 89 zur Verfügung. Dieser Vergleich ist in Form einer Abweichung ihrer Differenz vom arithmetischen Mittel $[v_p(r) + v_p(r')]/2$ realisiert, denn die zu prüfenden Differenzen können sich stark in Abhängigkeit von den gerade berechneten Zahlen ändern. Damit wäre eine Messung der absoluten Abweichung dieser projizierten Geschwindigkeiten von einer festen, kleinen Zahl nicht sehr sinnvoll gewesen. Die Feststellung der relativen Abweichungen vom Mittelwert dagegen ist wesentlich unempfindlicher gegenüber unterschiedlichen Skalen.

Falls nun die relative Abweichung der Differenz beider projizierter Geschwindigkeiten vom Mittelwert einen kleinen Schwellenwert *eps* unterschreitet, gibt die Function *reso* den Wert 1 zurück und das Hauptprogramm schreibt die Koordinaten des gefundenen Punktes auf der Resonanzfläche in das Datenfile (Zeilen 38 bis 41). Das anschließende Schlüsselwort *EXIT* veranlasst das Programm sodann zum Verlassen der aktuellen y-Schleife, denn es wird davon ausgegangen, dass nur ein Resonanzpunkt zu jedem x existiert. Ein fortgeführter Lauf der y-Loop wäre Verschwendung von Rechenzeit. Möchte man jedoch Geschwindigkeitsgesetze untersuchen, welche eine verschlungene Form der Resonanzfläche nach sich ziehen bzw. diese vermuten lassen, so muss das Kommando zum Verlassen der Schleife deaktiviert werden. Der Abbruch der y-Loop erfolgt dann erwartungsgemäß beim Erreichen des Schleifenendwertes *ymax* und multiple Resonanzorte zu einem festen Wert von x werden, falls vorhanden, gefunden.

Der aufmerksame Leser möge sich nicht über die Verwendung der intrinsischen FORTRAN 90 - Function *ATAN2(a,b)* in den Zeilen 75 und 81 wundern. Es handelt sich um eine Function zur Berechnung des Arcustangens eines Quotienten a/b zweier reeller Zahlen. Der Vorteil von *ATAN2(a,b)* gegenüber *ATAN(a/b)* ist ihr voller Wertebereich ($-\pi < ATAN2(a,b) \leq \pi$ statt $-\pi/2 \leq ATAN(a/b) \leq \pi/2$) sowie die Tatsache, dass auch der Fall $b = 0$ (rechter Winkel) zugelassen ist.

Beispielhaft seien in Abbildung 5.11 die gewonnenen Resonanzflächen für die aus Abschnitt 5.1 bekannten Windgeschwindigkeitsgesetze ($1/r$, 2 - Kink - und 4 - Kink - Geschwindigkeitsgesetze) sowie für einige andere, zum Teil kuriose $v(r)$ - Beziehungen, dargestellt. Aus Gründen der Wiedererkennbarkeit und Anschaulichkeit haben wir ihnen unkonventionelle Namen gegeben.

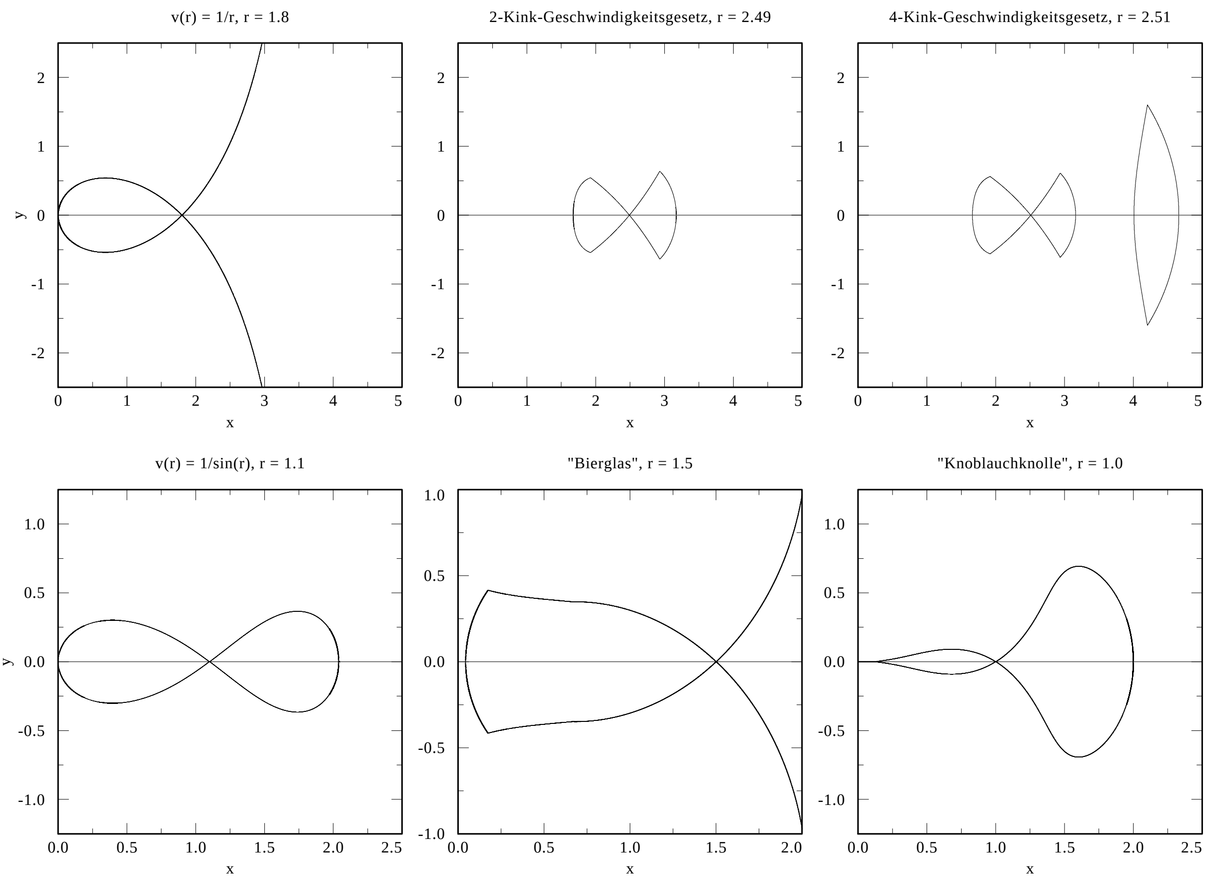

Abbildung 5.11: Numerisch berechnete Resonanzflächen für diverse $v(r)$ - Gesetze. Oben: für die bereits aus Abschnitt 5.1 bekannten $1/r$ -, 2 - Kink - und 4 - Kink - Geschwindigkeitsgesetze. Unten: $v(r) = 1/\sin(r)$ sowie zwei Kuriositäten (Beschreibung siehe Text).

Das $v(r)$ - Gesetz zum linken unteren Panel lautet $v(r) = 1/sin(r)$ und ergibt eine ähnliche, wenn auch stark verformte, 2 - Kink - Resonanzfläche. Das verwundert nicht weiter, weil der Sinus ebenso periodisch wie das artifizielle 2 - Kink - Gesetz die Windgeschwindigkeit oszillieren lässt. Die den in beiden letzten Panels abgebildeten Resonanzflächen zugrundeliegenden Windgeschwindigkeitsgesetze sind stark konstruiert und lauten folgendermaßen. Für das „Bierglas“ gilt

$$v(r) = \begin{cases} 17.89\, r & \text{falls } r < 0.45 \\ \sqrt{4r^2/(5r^2-1)} & \text{falls } 0.45 \le r < 0.75 \\ 1.114 + \frac{1}{4}(r-0.75)(1-1.114) & \text{falls } 0.75 \le r \le 2.5 \end{cases} . \tag{5.19}$$

während die „Knoblauchknolle“ aus

$$v(r) = r^2 \sin(r) + 8 \tag{5.20}$$

resultiert. Beiden Fällen ist gemeinsam, dass es offenbar möglich ist, analytische Ausdrücke für $v(r)$ - Beziehungen anzugeben, welche eine Resonanzfläche mit Wendepunkten erzeugen können. Ein solcher Wendepunkt befindet sich beim „Bierglas“ in etwa bei $x = 0.58$ und im Fall der „Knoblauchknolle“ bei $r = 1.27$.

Kapitel 6

Linienkraft im Regime der double surfaces

Im folgenden Kapitel werden wir uns der Frage widmen, wie die Gleichung der Linienkraft aller Linien einer statistischen Verteilung für den Fall der double surfaces aussieht. Als Ansatz sei zunächst eine Definition für die totale Strahlungskraft im Regime der single surfaces aus Owocki & Puls (1996) verwendet

$$g_L^{single}(\vec{r}) = \frac{4\pi\,\kappa\,v_{th}\,\nu}{c^2}\,\bar{H}(\vec{r})\,. \tag{6.1}$$

Verkürzt schreiben wir von jetzt an g_L^S statt g_L^{single} sowie g_L^D statt g_L^{double} als Synonyme für die Linienkraft bei single bzw. double surfaces. Ferner verwenden wir die von Castor, Abbott & Klein (1975) eingeführte statistische Linienverteilungsfunktion, jedoch geschrieben in der Form von Owocki, Castor & Rybicki (1988)

$$N(\nu,\kappa) = \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\kappa_0}\,\left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{2-\alpha}\,. \tag{6.2}$$

Integration über κ – also über alle Linien – liefert

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) &= \int\limits_0^\infty d\kappa\, g_L^S(\vec{r})\,N(\kappa) && (6.3)\\ &= \int\limits_0^\infty d\kappa\,\frac{4\pi\,v_{th}\,\nu\,\kappa}{c^2}\,\bar{H}(\vec{r})\,\frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\kappa_0}\,\left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{2-\alpha} && (6.4)\\ &= \frac{4\pi\,v_{th}}{c^2}\int\limits_0^\infty d\kappa\,\left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{1-\alpha}\,\bar{H}(\vec{r})\,. && (6.5) \end{aligned}$$

Dabei ist $\bar{H}(\vec{r})$ der von Rybicki und Hummer (1978) hergeleitete Ausdruck (siehe Gleichung (71) dort)

$$\bar{H}(\vec{r}) = \bar{\gamma}_c\,I_c + \int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr'\,L(r,r')\,S(r')\,k(r')\,{r'}^2 \tag{6.6}$$

mit dem Integralkern

$$L(r,r') = \frac{c}{2\nu_0}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,\frac{1-e^{-\tau'}}{\tau'}\,\frac{v'}{r^2\,v'^2 - r'^2 v^2}\,. \tag{6.7}$$

Wir haben im letzten Bruch eine verkürzte Schreibweise eingeführt, sodass wie bereits zuvor alle gestrichenen Größen am Ort r' definiert sind sowie alle ungestrichenen am Ort r. Beispielsweise bezeichnet somit v' *nicht* etwa die Ortsableitung der Geschwindigkeit, sondern die Geschwindigkeit am Resonanzort r' und so fort. Für die Ortsableitung der Geschwindigkeit schreiben wir von nun an immer dv/dr.

Weiterhin ist in (6.6)

$$\bar{\gamma}_c = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\omega\,\vec{n}\,e^{-\tau'}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,. \tag{6.8}$$

definiert. Man beachte, dass τ und τ' von der Propagationsrichtung $\vec{n}$ der Photonen abhängen.

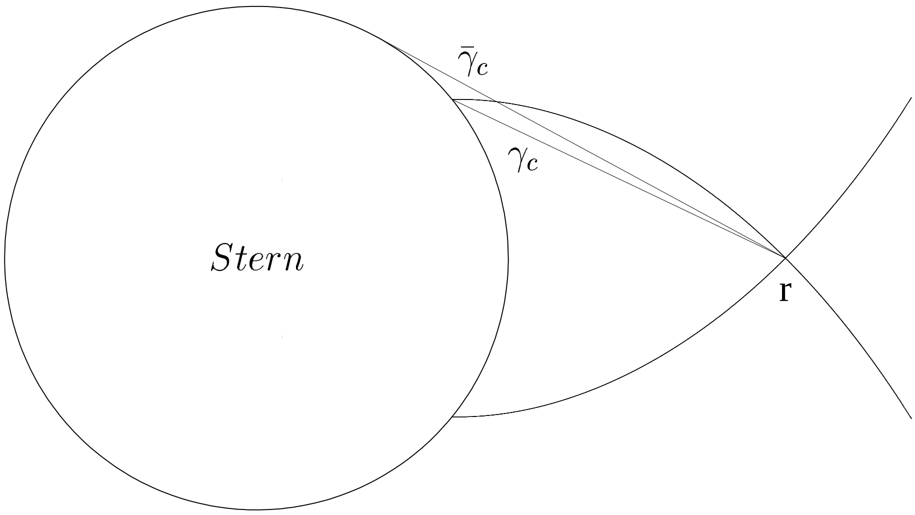

Abbildung 6.1: Zur Näherung $\bar{\gamma}_c = \gamma_c$. Strahlen, die von der Sternscheibe kommend r erreichen und dabei die Resonanzfläche schneiden, entsprechen $\bar{\gamma}_c$. Strahlen von der Sternscheibe ohne Schnittpunkt mit der Resonanzfläche werden durch γ_c beschrieben. Der Anteil von $\bar{\gamma}_c$-Strahlen ist relativ klein, weshalb die Näherung $\bar{\gamma}_c = \gamma_c$ gerechtfertigt ist. Bei größeren Radien r wächst die Resonanzfläche und der Anteil der $\bar{\gamma}_c$-Strahlen sinkt entsprechend stark, wodurch die Approximation umso treffender wird.

Wir machen die Näherung $\bar{\gamma}_c = \gamma_c$ und verweisen auf Abbildung 6.1. $\bar{\gamma}_c$ bezieht sich auf diejenigen Strahlen von der Sternscheibe, welche den Ort r direkt erreichen und dabei die Resonanzfläche schneiden. Unter der Annahme, dass der Anteil solcher Strahlen gegenüber denen, die von der Photosphäre kommend den Ort r erreichen ohne die Resonanzfläche zu schneiden, kann in (6.8) $\tau' = 0$ gesetzt werden (τ' bezeichnet die optische Tiefe an der Schnittstelle des Strahls mit der Resonanzfläche) und der Faktor $e^{-\tau'}$ wird zu 1. Wir schreiben folglich

$$\gamma_c = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} d\omega \, \vec{n} \, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \, . \tag{6.9}$$

Einsetzen von (6.7) und (6.6) in (6.5) liefert

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) = {} & \frac{4\pi \, v_{th}}{c^2} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{1-\alpha} \\ & \times \left[\gamma_c \, I_c + \frac{1}{2} \int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr' \, \frac{c}{\nu_0} \, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \, \frac{1 - e^{-\tau'}}{\tau'} \, \frac{v'}{r^2 \, v'^2 - r'^2 \, v^2} \, S' \, k' \, r'^2 \right] . \end{aligned} \tag{6.10}$$

Den Faktor r'^2 aus dem Klammerterm bringen wir in den Bruch, welcher eine Beziehung zwischen Geschwindigkeiten und Orten herstellt und schreiben für diesen Bruch der Kürze wegen

$$\Upsilon = \frac{r'^2 \, v'}{r^2 \, v'^2 - r'^2 \, v^2} \tag{6.11}$$

Ferner ziehen wir $\kappa_0^{1-\alpha}$ vor das Integral und splitten das $d\kappa$ - Integral in zwei Teile. Zusammen liefert dies

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) = {} & \frac{4\pi \, v_{th}}{c^2} \, \kappa_0^{1-\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \kappa^{\alpha-1} \, \gamma_c \, I_c \\ & + \frac{4\pi \, v_{th}}{2 \, c^2} \, \kappa_0^{1-\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \kappa^{\alpha-1} \int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr' \, \frac{c}{\nu_0} \, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \, \frac{1 - e^{-\tau'}}{\tau'} \, \Upsilon \, S' \, k' \, . \end{aligned} \tag{6.12}$$

Im ersten Term setzen wir γ_c aus (6.9) ein und verwenden im zweiten Term die Beziehung

$$\frac{c \, k'}{\nu_0} = \kappa \, v_{th} \, \rho' \, , \tag{6.13}$$

womit folgt

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) = {} & \frac{4\pi \, v_{th}}{c^2} \, \kappa_0^{1-\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \kappa^{\alpha-1} \left[\frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} d\omega \, \vec{n} \, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \, I_c \right] \\ & + \frac{2\pi \, v_{th}}{c^2} \, \kappa_0^{1-\alpha} \int\limits_0^\infty d\kappa \, \kappa^{\alpha-1} \int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr' \, \kappa \, v_{th} \, \rho' \, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \, \frac{1 - e^{-\tau'}}{\tau'} \, \Upsilon \, S' \, . \end{aligned} \tag{6.14}$$

Im ersten Term kann der Leser $\int_{4\pi} d\omega \, \vec{n} \, I_c$ als den Fluss $\vec{F}_l(\vec{r})$ einer Linie identifizieren, wie beispielsweise ein Vergleich mit der früheren Gleichung (3.4) zeigt. Damit sowie mit

$\tau = \kappa\,\eta$ bzw. $\tau' = \kappa\,\eta'$ folgt weiter

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) = \frac{v_{th}}{c^2}\,\kappa_0^{1-\alpha}\,\vec{F}_l(\vec{r}) \int\limits_0^\infty d\kappa\,\kappa^{\alpha-1}\left[\frac{1-e^{-\kappa\,\eta}}{\kappa\,\eta}\right] \\ +\ \frac{2\pi\,v_{th}^2}{c^2}\,\kappa_0^{1-\alpha}\int\limits_0^\infty d\kappa\,\kappa^{\alpha-1}\int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr'\,\kappa\,\rho'\,\frac{1-e^{-\kappa\,\eta}}{\kappa\,\eta}\,\frac{1-e^{-\kappa\,\eta'}}{\kappa\,\eta'}\,\Upsilon\,S'\,. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Der erste Term entspricht exakt der aus (4.26) bekannten totalen Linienkraft im Regime der single surfaces, weshalb wir fortan g_L^S dafür schreiben werden

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) &= g_L^S(\vec{r}) \\ &+\ \frac{2\pi\,v_{th}^2}{c^2}\,\kappa_0^{1-\alpha}\int\limits_0^\infty d\kappa\,\kappa^{\alpha-1}\int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr'\,\kappa\,\rho'\,\frac{1-e^{-\kappa\,\eta}}{\kappa\,\eta}\,\frac{1-e^{-\kappa\,\eta'}}{\kappa\,\eta'}\,\Upsilon\,S'\,. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge sowie Erweitern der Vorfaktoren mit einer adäquaten Form von 1 führen zu

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) =&\ g_L^S(\vec{r}) \\ &+\ \frac{2\pi\,v_{th}^2}{c^2}\,\kappa_0^{1-\alpha}\left(\frac{\kappa_0\,\eta}{\kappa_0\,\eta}\right)^\alpha \int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr'\,\rho'\,\Upsilon\,S'\int\limits_0^\infty d\kappa\,\kappa^{\alpha-1}\kappa\,\frac{1-e^{-\kappa\,\eta}}{\kappa\,\eta}\,\frac{1-e^{-\kappa\,\eta'}}{\kappa\,\eta'} \\ =&\ g_L^S(\vec{r}) \\ &+\ \frac{2\pi\,v_{th}^2}{c^2\,(\kappa_0\,\eta)^\alpha}\,\kappa_0\,\eta^\alpha\int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr'\,\rho'\,\Upsilon\,S'\int\limits_0^\infty d\kappa\,\frac{1}{\eta}\,\frac{1}{\eta'}\,\kappa^{\alpha-2}\,(1-e^{-\kappa\,\eta})\,(1-e^{-\kappa\,\eta'})\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Durch das Ziehen von η^α in das $d\kappa$ - Integral, das gleichzeitige Herausziehen von $1/\eta'$ und schließlich durch das Erweitern desselben und des Exponenten der zweiten e - Funktion mit η/η folgt

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) =&\ g_L^S(\vec{r}) \\ &+\ \frac{2\pi\,v_{th}^2\,\kappa_0}{c^2\,(\kappa_0\,\eta)^\alpha}\int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr'\,\frac{\rho'}{\eta'}\,\Upsilon\,S'\int\limits_0^\infty d\kappa\,\frac{\eta}{\eta}\,\frac{\eta^\alpha}{\eta}\,\kappa^{\alpha-2}\,(1-e^{-\kappa\,\eta})\,(1-e^{-\kappa\,\eta'\,\frac{\eta}{\eta}}) \\ =&\ g_L^S(\vec{r}) \\ &+\ \frac{2\pi\,v_{th}^2\,\kappa_0}{c^2\,(\kappa_0\,\eta)^\alpha}\int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr'\,\frac{\rho'}{\eta'}\,\Upsilon\,S'\int\limits_0^\infty d\kappa\,\eta\,(\kappa\,\eta)^{\alpha-2}\,(1-e^{-\kappa\,\eta})\,(1-e^{-\kappa\,\eta\,\frac{\eta'}{\eta}})\,. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Nach Rybicki & Hummer (1978, Gleichung (67) dort) gilt

$$\tau' = \frac{c}{\nu_0}\,\frac{k'}{|Q'|} = \frac{c}{\nu_0}\,\frac{k'}{|dv'/dr'|}\,. \tag{6.19}$$

Zusammen mit der weiter oben verwendeten Beziehung (6.13) folgt

$$\tau' = \frac{\kappa\, v_{th}\, \rho'}{|dv'/dr'|}\,, \tag{6.20}$$

und schließlich vermöge $\tau' = \kappa\,\eta'$

$$dv'/dr' = v_{th}\,\frac{\rho'}{\eta'}\,. \tag{6.21}$$

Zieht man in (6.18) ein v_{th} in das dr' - Integral herein, kann man die letzte Beziehung angenehmerweise verwenden. Zusammen mit der Variablensubstitution $t = \kappa\,\eta$ folgt

$$g_L^D(\vec{r}) = g_L^S(\vec{r}) + \frac{2\pi\, v_{th}\, \kappa_0}{c^2\, t_0^\alpha} \int\limits_{r_c}^{r_{max}} dr'\, \frac{dv'}{dr'}\, \Upsilon\, S' \int\limits_0^\infty dt\, t^{\alpha-2}\,(1-e^{-t})\,(1-e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}})\,. \tag{6.22}$$

Diese Variablensubstitution ist nur möglich, weil $\eta > 0$ stets gilt. In einer Nebenrechnung soll nun das dt - Integral mittels partieller Integration gelöst werden

$$\int\limits_0^\infty dt\, t^{\alpha-2}\,(1-e^{-t})\,(1-e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}}) = \int\limits_0^\infty dt\, t^{\alpha-2}\,\left(1-e^{-t}-e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}}-e^{-t\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}}\right) =$$

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\,\left(1-e^{-t}-e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}}-e^{-t\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}}\right)\Bigg|_0^\infty$$

$$-\int\limits_0^\infty dt\,\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\,\left(e^{-t}+\frac{\eta'}{\eta}\,e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}}-\frac{\eta+\eta'}{\eta}\,e^{-t\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}}\right)\,. \tag{6.23}$$

Der erste Summand verschwindet an seinen Grenzen ∞ und 0, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{t^{1-\alpha}}\,\left(1-e^{-t}-e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}}-e^{-t\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}}\right)\Bigg|_0^\infty =$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{\infty^{1-\alpha}}\,\left(1-e^{-\infty}-e^{-\infty\,\frac{\eta'}{\eta}}-e^{-\infty\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}}\right) -$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{t^{1-\alpha}}\,\left(1-1+t-1+t\,\frac{\eta'}{\eta}+1-t\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\cdot 0\cdot(1-0-0-0)\;-\;\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{t}{t^{1-\alpha}}\,\left(1+\frac{\eta'}{\eta}-\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$0\;-\;\frac{1}{\alpha-1}\,t^\alpha\,\left(1+\frac{\eta'}{\eta}-\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$\frac{1}{-1\alpha}\,0^\alpha\,\left(1+\frac{\eta'}{\eta}-\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)\Bigg|_{t=0} = 0\,. \tag{6.24}$$

In der dritten Zeile wurde der Klammerausdruck bei der Auswertung an der unteren Grenze einer Taylorreihenentwicklung bis zur ersten Ordnung um $t = 0$ herum unterzogen, um das eventuelle Auftreten von Singularitäten zu untersuchen. Es tritt keine solche Singularität bei $t = 0$ auf und der gesamte Term verschwindet.

Zu (6.23) zurückkehrend wird im Folgenden das verbliebene dt - Integral gelöst

$$\frac{1}{\alpha-1}\int_0^\infty dt\, t^{\alpha-1}\alpha - 1 \left(e^{-t} + \frac{\eta'}{\eta}\, e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}} - \frac{\eta+\eta'}{\eta}\, e^{-t\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}}\right) =$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\int_0^\infty dt\, t^{\alpha-1}\, e^{-t} + \int_0^\infty dt\, \frac{\eta'}{\eta}\, t^{\alpha-1}\, e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}} - \int_0^\infty dt\, \frac{\eta+\eta'}{\eta}\, t^{\alpha-1}\, e^{-t\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}}\right). \tag{6.25}$$

Das erste der drei Integrale in der Klammer gleicht der vollständigen Eulerschen Gammafunktion

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt\, t^{\alpha-1}\, e^{-t} \tag{6.26}$$

und auch die beiden anderen Integrale haben eine ähnliche Form. Ziel ist also, in beiden Fällen eine solche Variablensubstitution zu vollziehen, sodass diese Integrale ebenfalls als Gammafunktionen geschrieben werden können. Dazu bietet es sich an, jeweils den gesamten Exponenten der entsprechenden e - Funktion als neue Integrationsvariable $\tilde{t}$ anzusetzen. Im Fall des zweiten Integrales gelte somit $\tilde{t} = t\,\eta'/\eta$, beim dritten Integral $\tilde{t} = t\,(\eta+\eta')/\eta$. Dementsprechend müssen die gesamten Terme erweitert werden

$$\frac{1}{\alpha-1}\left\{\Gamma(\alpha) + \int_0^\infty dt\, \frac{\eta'}{\eta}\, t^{\alpha-1}\, \frac{\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\alpha-1}}\, e^{-t\,\frac{\eta'}{\eta}} - \int_0^\infty dt\, \frac{\eta+\eta'}{\eta}\, t^{\alpha-1}\, \frac{\left(\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)^{\alpha-1}}\, e^{-t\,\frac{\eta+\eta'}{\eta}}\right\} =$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\left\{\Gamma(\alpha) + \int_0^\infty d\tilde{t}\, \tilde{t}^{\alpha-1}\, e^{-\tilde{t}}\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} - \int_0^\infty d\tilde{t}\, \tilde{t}^{\alpha-1}\, e^{-\tilde{t}}\left(\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha}\right\} =$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\left\{\Gamma(\alpha) + \Gamma(\alpha)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} - \Gamma(\alpha)\left(\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha}\right\} =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}\left\{1 + \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha}\right\}. \tag{6.27}$$

Dieses Ergebnis in (6.22) eingesetzt und die substituierte Variable t_0 als $t_0 = \kappa_0\,\eta = \tau_0$ zurückübersetzt liefert

$$g_L^D(\vec{r}) = g_L^S(\vec{r}) + \frac{2\pi\, v_{th}\, \kappa_0}{c^2\, \tau_0^\alpha}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} \int_{r_c}^{r_{max}} dr'\, \frac{dv'}{dr'}\, \Upsilon\, S' \left\{1 + \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{\eta+\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha}\right\}. \tag{6.28}$$

Die Vorfaktoren des Integrals im zweiten Term sehen der Gleichung für die Linienkraft bei single surfaces (4.36) sehr ähnlich, jedoch fehlt darin noch der Linienfluss $\vec{F}_l(\vec{r})$ und ein zusätzlicher Vorfaktor 2π scheint vorhanden. An dieser Stelle kann man jedoch benutzen, dass

$$\vec{F}_l(\vec{r}) = 2\pi\, I_*\, W(r)\,, \tag{6.29}$$

wobei $I_*\, W$ die mit dem sogenannten Verdünnungsfaktor (dilution factor)

$$W(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}}\right) \tag{6.30}$$

abfallende Intensität der Sternscheibe darstellt.

6.1 Intermezzo: dilution factor

Abbildung 6.2 und die folgenden Zeilen werden das Zustandekommen von W verdeutlichen. R_* ist der Sternradius, r die Entfernung vom Sternmittelpunkt und es ist klar,

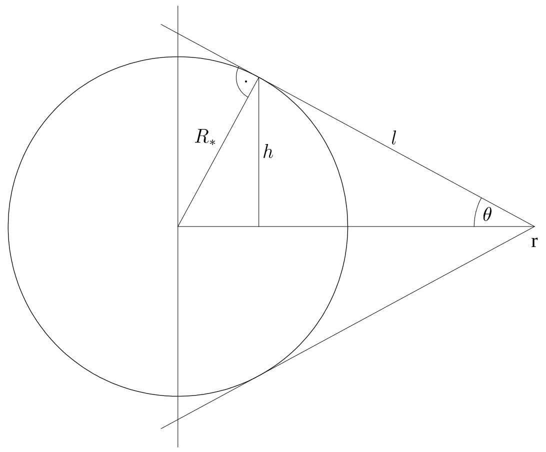

Abbildung 6.2: Zum dilution factor W.

dass $l = (r^2 - R_*^2)^{1/2}$ gilt. Falls wir mit θ_* den Winkel bezeichnen, unter dem der Sternscheibenrand relativ zum Sternscheibenmittelpunkt vom Ort r aus betrachtet erscheint, gilt

$$\mu_* = \cos\theta_* = \frac{l}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - R_*^2}}{r} = \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}}\,. \tag{6.31}$$

W ist definiert als das Verhältnis des von der Sternscheibe ausgefüllten Raumwinkels zum gesamten Raumwinkel des Himmels, also zu 4π

$$W = \frac{\Omega_*}{4\pi}\,. \tag{6.32}$$

Es interessiert jetzt die Frage, wie groß der Sternscheiben-Raumwinkel Ω_* ist. Wir stellen uns vor, vom Ort r aus auf die kugelförmige Sternoberfläche zu blicken und darauf eine infinitesimale Fläche zu betrachten. Der von der gesamten Sternscheibe mit jenen winzigen Flächen ausgefüllte Raumwinkel lässt sich ansetzen als

$$\Omega_* = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_*} \sin\theta \, d\theta \,. \tag{6.33}$$

Das erste Integral beschreibt die Summation der infinitesimalen Flächen in ϕ - Richtung, also in konzentrischen Kreisen um den Mittelpunkt der Sternscheibe herum. Im Unterschied dazu sieht man jede dieser kleinen Flächen in θ - Richtung um den Faktor $\sin\theta$ verkürzt, weshalb er als Projektionsfaktor im zweiten Integral auftaucht. Außerdem erstreckt sich die θ - Integration vom Mittelpunkt der Sternscheibe bis zu ihrem Rand, also von 0 bis θ_*. Ausrechnen von (6.33) liefert

$$\Omega_* = 2\pi \cdot \cos\theta \,\big|_{\theta_*}^{0} = 2\pi\,(1 - \cos\theta_*) = 2\pi\,(1 - \mu_*) \,. \tag{6.34}$$

Durch (6.34) in (6.32) folgt schließlich mit μ_* aus (6.31)

$$W = \frac{2\pi(1 - \mu_*)}{4\pi} = \frac{1}{2}\,(1 - \mu_*) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}}\right) . \tag{6.35}$$

Zurück bei der Herleitung der Linienkraft erweitern wir nun dank dieses gesicherten Ergebnisses den zweiten Term in (6.28) mit $(I_* W)/(I_* W)$, wodurch folgt

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) &= g_L^S(\vec{r}) \\ &\quad + \frac{2\pi\, v_{th}\, \kappa_0}{c^2\, \tau_0^\alpha} \, \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} \, \frac{I_* W}{I_* W} \int_{r_c}^{r_{max}} dr' \, \frac{dv'}{dr'} \, \Upsilon \, S' \left\{ 1 + \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{\eta + \eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} \right\} . \end{aligned} \tag{6.36}$$

Beachtung von (6.29) und (4.36) liefert augenblicklich

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) &= g_L^S(\vec{r}) \\ &\quad + \frac{v_{th}\, \kappa_0}{c^2\, \tau_0^\alpha} \, \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} \, \vec{F}_l(\vec{r}) \int_{r_c}^{r_{max}} dr' \, \frac{dv'}{dr'} \, \Upsilon \, \frac{S'}{I_* W} \left\{ 1 \; + \; \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{\eta + \eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} \right\} \\ &= g_L^S(\vec{r}) \left[1 + \int_{r_c}^{r_{max}} dr' \, \frac{dv'}{dr'} \, \Upsilon \, \frac{S'}{I_* W} \left\{ 1 \; + \; \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{\eta + \eta'}{\eta}\right)^{1-\alpha} \right\} \right] \end{aligned} \tag{6.37}$$

und durch Erweiterung der η - Terme mit κ_0 sowie mittels $\tau_0 = \kappa_0\, \eta$ schließlich

$$\begin{aligned} g_L^D(\vec{r}) &= g_L^S(\vec{r}) \left[1 + \int_{r_c}^{r_{max}} dr' \, \frac{dv'}{dr'} \, \Upsilon \, \frac{S'}{I_* W} \left\{ 1 \; + \; \left(\frac{\kappa_0\, \eta'}{\kappa_0\, \eta}\right)^{1-\alpha} - \left(1 + \frac{\kappa_0\, \eta'}{\kappa_0\, \eta}\right)^{1-\alpha} \right\} \right] \\ &= g_L^S(\vec{r}) \left[1 + \int_{r_c}^{r_{max}} dr' \, \frac{dv'}{dr'} \, \Upsilon \, \frac{S'}{I_* W} \left\{ 1 \; + \; \left(\frac{\tau_0'}{\tau_0}\right)^{1-\alpha} - \left(1 + \frac{\tau_0'}{\tau_0}\right)^{1-\alpha} \right\} \right] . \end{aligned} \tag{6.38}$$

Kapitel 7

Quellfunktion bei Dreipunktkopplung

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die analytische Formulierung der totalen Strahlungskraft aller Linien der CAKschen Linienverteilungsfunktion im Regime der double surfaces gewonnen wurde, wird auf den folgenden Seiten zunächst ein Ausdruck für die Quellfunktion $S(r)$ im besagten Regime entwickelt (Abschnitt 7.1) und anschließend die gesuchte Quellfunktion durch Λ - Iteration am Ort r sowie den Resonanzorten r' und r'' gewonnen (Abschnitt 7.2).

7.1 Der Formalismus

Bei der von Rybicki & Hummer (1978) vorgestellten Vorgehensweise beginnend behandelt dieser Abschnitt zunächst die Herleitung des von den beiden Autoren gefundenen Ausdrucks für die Quellfunktion $S(r)$ im Regime der single surfaces. Anschließend werden wir diesen Formalismus auf den Fall der double surfaces erweitern, wobei die im Kapitel 5 über die double surfaces gewonnenen Ergebnisse in hohem Maße Verwendung finden werden. Insbesondere werden hier Aussagen zu den Resonanzflächen im Falle des 2 - Kink - Geschwindigkeitsgesetzes von Nutzen sein.

7.1.1 Transformation in das p-z-Koordinatensystem

Der interessante Kunstgriff, mit dem Rybicki und Hummer die Behandlung der Resonanzflächen wesentlich vereinfachen konnten, bestand darin, die Geometrie der gefundenen Flächen, wie sie beispielsweise in Abbildung 5.2 dargestellt ist, durch Drehung des Koordinatensystems um den Ursprung derart in das p - z - Koordinatensystem zu überführen, dass die Richtung des bei r' in Richtung von r gestreuten Photons parallel zur z-Achse des Systems liegt. Die projizierten Geschwindigkeiten $v_p(r)$ und $v_p(r')$ liegen dann ebenfalls parallel zur z-Achse, denn sie sind definiert als entlang der Verbindungslinie zwischen r' und r liegend. Beide Geschwindigkeitsvektoren liegen somit entlang desselben Impactparameters p. Ganz allgemein gilt für den Impactparameter eine Photons $p = const.$. Es ist klar, dass die Transformation eine Drehung um den Winkel θ sein muss. Abbildung 7.1 verdeutlicht die Situation nach der Drehung für den von Rybicki und Hummer untersuchten Fall des $1/r$ - Geschwindigkeitsgesetzes.

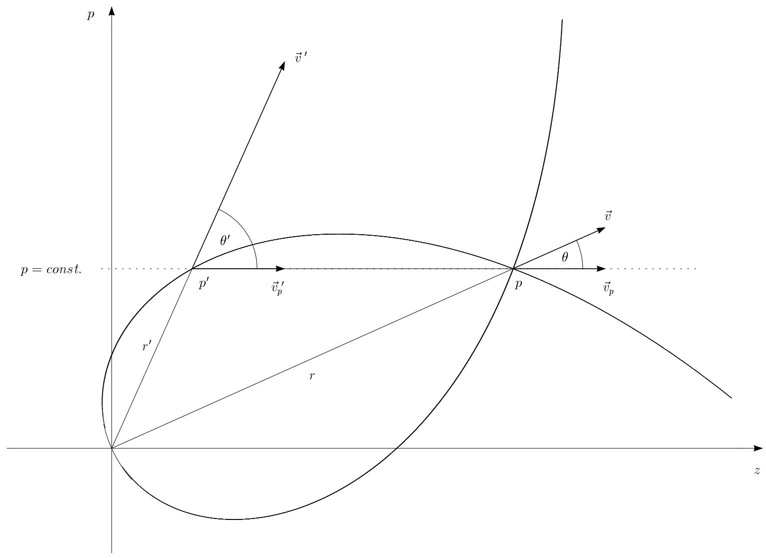

Abbildung 7.1: Transformation der Resonanzflächen in das p - z - Koordinatensystem, hier am Beispiel des von Rybicki & Hummer untersuchten hyperbolischen Geschwindigkeitsgesetzes. Nach der Drehung um den Winkel θ liegen die projizierten Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_p$ und $\vec{v}_p'$ entlang desselben Impactparameters p.

Im Unterschied zum oben genannten Paper führen wir eine leicht veränderte Nomenklatur ein, um die Lesbarkeit der Formeln und Diagramme zu erhöhen. Von jetzt an sollen r und v den betrachteten Ort und die dort herrschende Radialgeschwindigkeit bezeichnen. Die einfach gestrichenen Größen r' und $v' = v(r')$ beziehen sich auf die Verhältnisse am Resonanzort r' . Im Falle der double surfaces werden zwei Resonanzorte gleichzeitig betrachtet, deshalb wird der zweite von beiden zweifach gestrichen, also r'' und $v'' = v(r'')$. Analog beziehen sich alle weiteren einfach gestrichenen Größen stets auf den Resonanzort r', alle zweifach gestrichenen auf r'' .

Entsinnen wir uns der Definition

$$\mu = \cos\theta \qquad \text{und} \qquad \mu' = \cos\theta' \tag{7.1}$$

mit $\theta = \vec{v} \cdot \vec{n}$ bzw. $\theta' = \vec{v}\,' \cdot \vec{n}$ und $\vec{n}$ als der Propagationsrichtung des bei r' gestreuten Photons. Beachten wir ferner die Resonanzbedingung

$$\mu\, v = \mu'\, v' \,. \tag{7.2}$$

Aus Abbildung 7.1 ergeben sich außerdem

$$p = r\, \sin\theta \qquad \text{und} \qquad p' = r'\, \sin\theta' \,. \tag{7.3}$$

Wir erhalten damit wegen der Konstanz des Impactparameters p

$$p = r\, \sin\theta = r'\, \sin\theta' = p' \,. \tag{7.4}$$

Mittels $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ und (7.1) verwendend folgt

$$r^2\,(1-\mu^2) = r'^2\,(1-\mu'^2)\,, \tag{7.5}$$

sowie mit Hilfe von (7.2)

$$r^2\left(1-\mu^2\right) = r'^2\left(1-\mu^2\,\frac{v^2}{v'^2}\right) \tag{7.6}$$

$$r^2 - r^2\,\mu^2 = r'^2 - r'^2\,\mu^2\,\frac{v^2}{v'^2} \tag{7.7}$$

$$\mu^2 = \frac{v'^2\,(r^2 - r'^2)}{r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2}\,. \tag{7.8}$$

Es ist hier gelungen, μ als Funktion der Orte und Geschwindigkeiten auszudrücken, jedoch ohne μ' schreiben zu müssen. Zwecks Vereinfachung der weiteren Ausführungen ist es sinnvoll, die in allgemeiner Form als Tensor geschriebene Größe Q einzuführen

$$Q(\vec{r},\vec{n}) = \sum_i\sum_j n_i n_j \frac{\partial v_i}{\partial r_j} \equiv \frac{dv_l}{dl}\,, \tag{7.9}$$

bzw. in ihrer Formulierung für sphärisch symmetrische Expansion

$$Q = \mu^2\,\frac{dv}{dr} + (1-\mu^2)\,\frac{v}{r}\,. \tag{7.10}$$

Einsetzen von μ^2 aus (7.8) in (7.10) liefert

$$\begin{aligned} Q &= \frac{v'^2\,(r^2 - r'^2)\;dv/dr}{r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2} + \left\{1 - \frac{v'^2\,(r^2 - r'^2)}{r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2}\right\}\,\frac{v}{r} \\ &= \frac{r\,v'^2\;dv/dr\;(r^2 - r'^2) + v\,(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2) - v\,v'^2\,(r^2 - r'^2)}{r\,(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2)} \\ &= \frac{r\,v'^2\;dv/dr\;(r^2 - r'^2) + v\,(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2 + r'^2\,v'^2)}{r\,(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2)} \\ &= \frac{r\,v'^2\;dv/dr\;(r^2 - r'^2) + v\,r'^2(v'^2 - v^2)}{r\,(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2)}\,. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Diese Rechnung lässt sich analog auch für den einfach gestrichenen Fall führen, indem mittels $\mu = \mu'\;v'/v$ aus (7.2) sich die Beziehung (7.5) umformen lässt zu

$$r^2\left(1-\mu'^2\,\frac{v'^2}{v^2}\right) = r'^2\left(1-\mu'^2\right) \tag{7.12}$$

$$r^2 - r^2\,\mu'^2\,\frac{v'^2}{v^2} = r'^2 - r'^2\,\mu'^2 \tag{7.13}$$

$$\mu'^2 = \frac{v^2\,\left(r'^2 - r^2\right)}{r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2}\,. \tag{7.14}$$

Damit folgt auch sofort die gestrichene Form von Q

$$Q' = \mu'^2 \frac{dv'}{dr'} + (1 - \mu'^2) \frac{v'}{r'} \tag{7.15}$$

$$= \frac{v^2 (r'^2 - r^2)\, dv'/dr'}{r'^2 v^2 - r^2 v'^2} + \left\{ 1 - \frac{v^2 (r'^2 - r^2)}{r'^2 v^2 - r^2 v'^2} \right\} \frac{v'}{r'}$$

$$= \frac{r' v^2 \, dv'/dr' \, (r'^2 - r^2) + v' (r'^2 v^2 - r^2 v'^2) - v^2 v' (r'^2 - r^2)}{r' (r'^2 v^2 - r^2 v'^2)}$$

$$= \frac{r' v^2 \, dv'/dr' \, (r'^2 - r^2) + v' (r'^2 v^2 - r^2 v'^2 - r'^2 v^2 + r^2 v^2)}{r' (r'^2 v^2 - r^2 v'^2)}$$

$$= \frac{r' v^2 \, dv'/dr' \, (r'^2 - r^2) + v' r^2 (v^2 - v'^2)}{r' (r'^2 v^2 - r^2 v'^2)} . \tag{7.16}$$

Ein Vergleich mit (7.11) zeigt, dass dabei lediglich alle gestrichenen Größen gegen ungestrichene vertauscht worden sind und umgekehrt. Dies war aus Symmetriegründen a priori klar und somit dient die durchgeführte zweite Rechnung der Kontrolle. Die Definition von Q und Q' wird sich im Verlauf der folgenden Ausführungen noch als nützlich erweisen.

7.1.2 Dreipunktkopplung

Die im letzten Abschnitt erläuterte Drehtransformation in das p - z - Koordinatensystem lässt sich ebenso auf den Fall eines komplizierteren Geschwindigkeitsgesetzes anwenden. Wir werden uns hier dem im Kapitel 5 behandelten 2 - Kink - Geschwindigkeitsgesetz (5.17) widmen. Eine der dabei resultierenden Resonanzflächen sei zunächst in Abbildung 7.2 gezeigt. Sie entspricht einem der mittleren Panels (mit $r = 2.49$) aus der Bildsequenz B.6 im Anhang B.1, ist jedoch um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

Nach der Drehung existiert nunmehr neben den bereits bekannten Orten r und r' auch ein weiterer Kopplungspunkt r'' entlang eines konstanten p-Strahles, denn der p-Strahl schneidet die Resonanzfläche ein weiteres Mal, nachdem er durch den Ort r selbst gegangen ist. Ferner liegen, wie schon im Beispiel des hyperbolischen Geschwindigkeitsgesetzes, alle projizierten Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_p$, $\vec{v}_p'$ und $\vec{v}_p''$ entlang eines einzigen Impactparameters, weshalb $p = p' = p'' = const.$ gilt. In Anlehnung an die Anzahl der entlang eines p-Strahles in resonanter Wechselwirkung stehenden Orte bezeichnen wir diese Konfiguration fortan als Dreipunktkopplung.

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Ausdruck für die Quellfunktion in dieser Situation zu entwickeln. Wir werden zeigen, dass es in aller Allgemeinheit möglich ist das erweiterte Problem der Dreipunkt- auf das bereits bekannte Problem der Zweipunktkopplung zurückzuführen.

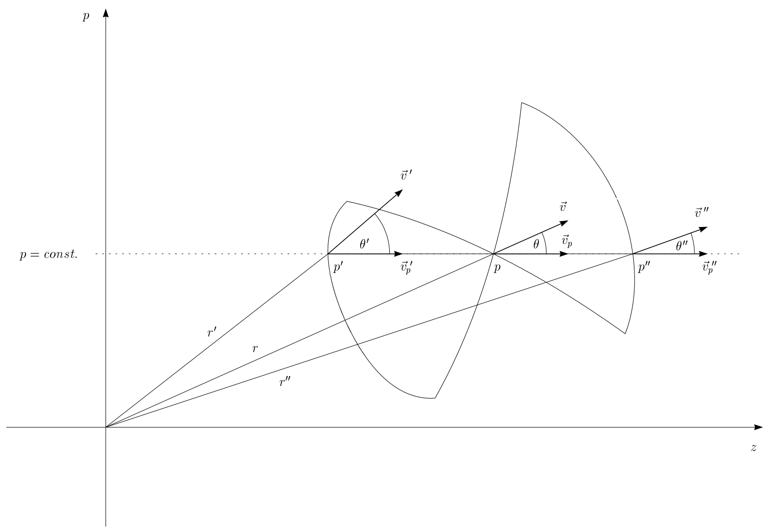

Abbildung 7.2: Transformation der Resonanzflächen in das p - z - Koordinatensystem, hier am Beispiel des 2 - Kink - Geschwindigkeitsgesetzes aus (5.17). Neben r selbst treten nunmehr zwei weitere Kopplungspunkte r' und r'' auf. Die projizierten Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_p$, $\vec{v}_p{}'$ und $\vec{v}_p{}''$ liegen nach der Drehung um den Winkel θ entlang desselben Impactparameters p.

Wichtig für die weiteren Untersuchungen wird eine Unterscheidung der drei möglichen Geometrien der Resonanzflächen sein, welche sich mit vorliegendem 2 - Kink - Geschwindigkeitsgesetz ergeben können. In Abbildung 7.3 sind drei Vertreter dieser unterschiedlichen Konfigurationen dargestellt.

Die drei Grafiken zeigen jeweils die Fälle, in denen der untersuchte Ort r sich entweder im ersten linearen Teilstück des Windgeschwindigkeitsgesetzes befindet, also vor dem ersten Kink (Fall 1) oder im Teilstück mit negativem Geschwindigkeitsgradienten (Fall 2) sowie im zweiten linearen Teilstück jenseits des zweiten Kinks (Fall 3). Der Leser möge Abbildung 5.8 betrachten, welche den Verlauf des $v(r)$ - Gesetzes verdeutlicht. In allen drei Abbildungen ist der Anschaulichkeit wegen eine maßstabgerechte Sternscheibe mit Radius $R = 1$ eingezeichnet.

Im Fall 1 besteht die Resonanzfläche aus zwei Subflächen, welche an einem bestimmten Punkt ineinander übergehen. Man kann mit geometrischen Argumenten zeigen, dass der Ort des Zusammentreffens beider Subflächen exakt eine Entfernung r_k vom Koordinatenursprung hat, also die radiale Entferung des ersten Kinks vom Sternmittelpunkt im zugrunde liegenden Geschwindigkeitsgesetz. Bei r_k befindet sich nämlich der letzte Ort, bei dem die Resonanzbedingung erfüllt ist. In radialer Richtung gilt das ebenso wie unter einem Winkel, jedoch verschiebt sich im zweiten Fall der Ort des Kinks lateral. Der Kink ist stets der letzte Kopplungspunkt auf *beiden* Resonanzflächen und damit per Definition der Ort des Zusammentreffens beider Teilflächen. Er hat folglich auch immer die Entfernung r_k vom Sternmittelpunkt.

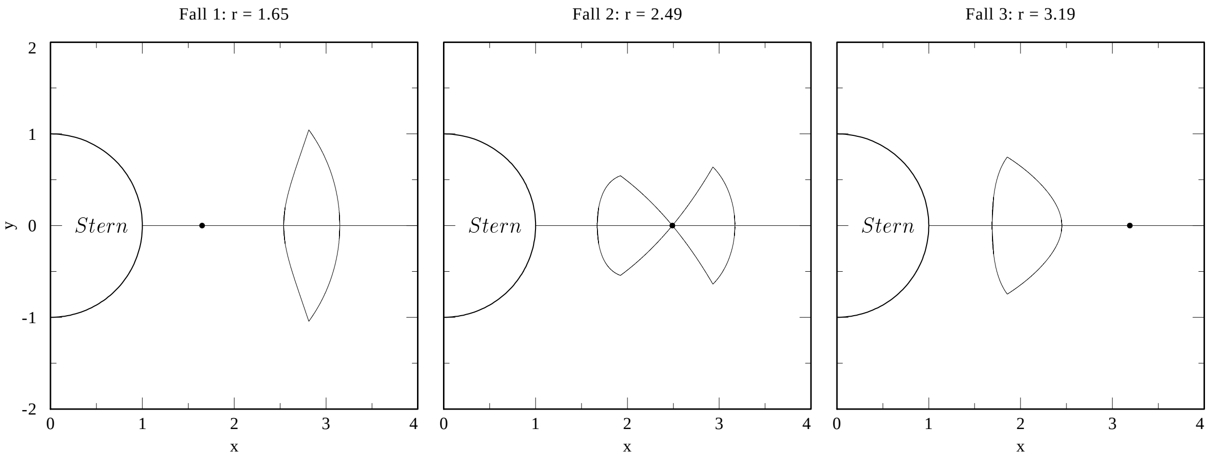

Abbildung 7.3: Drei verschiedene Konfigurationen der Resonanzfläche bei Dreipunktkopplung. Links: der Ort r befindet sich noch innerhalb des ersten linearen Teilstückes des Windgeschwindigkeitsgesetzes. Mitte: r im Teilstück mit negativem Geschwindigkeitsgradienten. Rechts: r im zweiten linearen Teilstück von $v(r)$. In allen drei Fällen ist schematisch die maßstabgerechte Sternscheibe abgebildet. Der betrachtete Ort r ist durch einen kleinen Punkt auf der x-Achse markiert.

Der Ort r befindet sich vor diesen beiden Resonanzflächen, sodass es zur Messung der Intensität an diesem Ort notwendig ist, den Beitrag von der sternfernen Teilfläche einer Dämpfung durch die ihr vorgelagerte Subfläche zu unterziehen. Licht von der hinteren Fläche passiert auf seinem Weg zu r offensichtlich die dazwischen liegende erste Resonanzfläche und wird demnach durch diese mit der ihr eigenen optischen Tiefe τ' abgeschwächt. Licht der sternnahen Resonanzfläche erreicht r ohne Abschwächung. Außerdem gelangt das direkte Sternlicht ohne Durchgang durch jedwede Resonanzflächen, demnach auch ohne Abschwächung, zum Ort r. Schließlich werden beide Subflächen als konvex angenommen, wenngleich die sternnahe Teilfläche in der Realität einen Wendepunkt besitzen kann. Die Abweichung von der monotonen Krümmung ist jedoch sehr klein, sodass diese Approximation gerechtfertigt erscheint. Die Konsequenz dieser Idealisierung ist, dass jeder von r in Richtung der Resonanzfläche ausgehende Sichtstrahl jede der Subflächen genau einmal trifft und es somit nicht zu komplizierten Mehrfachkopplungen innerhalb einer Subfläche kommen kann.

Fall 2 ist ein wenig anders gelagert, da sich hier der untersuchte Ort r im Einschnürpunkt zweier Teilflächen befindet. Er steht in resonanter Wechselwirkung mit beiden linearen Abschnitten des Windgeschwindigkeitsgesetzes. Sternwärts und windwärts wird das Resonanzflächensystem von zwei konkaven Flächen begrenzt. Die beiden Verbindungskurven zwischen den Endpunkten dieser kreisähnlichen Teilflächen folgen aus dem hyperbolischen Teilstück des $v(r)$ - Gesetzes und entsprechen vollkommen dem Verlauf der Resonanzfläche des von Rybicki und Hummer untersuchten inversen Potenzgesetzes. Die vollständige „Fischform“ liegt im Bereich des hyperbolischen Teils der Windgeschwindigkeit vor und wird auf beiden Seiten durch die Wirkung der linearen Teile begrenzt.

Näherungsweise betrachten wir die oben gemeinten Verbindungskurven jedoch nicht als dem Rybicki-Hummerschen Ergebnis entsprechend, sondern als grade Linien. Das scheint uns angesichts der geringen Krümmung dieser Kurven gerechtfertigt, denn ein von r zu einem beliebigen Resonanzort verlaufender Sichtstrahl wechselwirkt nur gering mit anderen Punkten der Resonanzfläche, wenn man die Krümmung der Verbindungslinien zulässt. In Approximation gerader Verbindunglinien jedoch vereinfacht sich der Formalismus zur Berechnung der Quellfunktion S sehr, denn nun sind lediglich die Beiträge der beiden kreisförmigen Resonanzflächenabschnitte zu berücksichtigen. Es ist sofort erkennbar, dass im besprochenen Fall 2 direkt vom Stern kommendes Licht auf seinem Weg zu r lediglich durch die sternseitige Resonanzfläche moduliert wird, während das in den beiden Subflächen produzierte Licht keine weitere Abschwächung durch dazwischen liegende Resonanzflächen erfährt.

Schließlich liegt im Fall 3 der Resonanzort jenseits des zweiten Kinks im Windgeschwindigkeitsprofil, sodass die resultierende Resonanzfläche vollständig zwischen Stern und r liegt. Hier muss bei der Berechnung der Intensität am Ort r die Abschwächung des Sternlichtes durch beide Teilflächen berücksichtigt werden, außerdem erfährt auch das in der sternnäheren Resonanzfläche erzeugte Licht eine Abschwächung beim Durchgang durch die zwischen ihr und r liegende zweite Fläche. Im Fall 3 ist die monotone Konvexität beider Subflächen selbst ohne Idealisierung gegeben, sodass es keine Komplizierung des Problems durch eventuelle Mehrfachdurchgänge eines von r ausgehenden Sichtstrahles durch eine Subfläche geben kann.

7.1.3 Nomenklatur der Resonanzflächen

An dieser Stelle führen wir eine einheitliche Nomenklatur ein, welche die Benennung der jeweils relevanten Teilresonanzflächen und der entsprechenden optischen Tiefen regelt. Abbildung 7.4 verdeutlicht den Sachverhalt. In schematischer Weise sind darin nochmals die möglichen Konfigurationen von Resonanzflächen dargestellt, welche sich mit dem untersuchten 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetz ergeben können.
Jeder durch den Ort r verlaufende Sichtstrahl, der eine der stets zwei vorhandenen Resonanzflächen schneidet, trifft auch die zweite Fläche. Jede der beiden Flächen wird zu ihrer Unterscheidung entweder einfach oder zweifach gestrichen. Diese Vereinbarung betrifft neben den Bezeichnungen der Orte r' und r'' auch die optischen Tiefen $\tau' = \tau(r')$ und $\tau'' = \tau(r'')$ dieser Subflächen.

Im Fall 1 soll die dem Ort r näher liegende Teilresonanzfläche einfach gestrichen sein, während die fernere zweifach gestrichen wird. Im Fall 2 ist die Sortierung der Subflächen bezüglich ihrer Entfernung zu r nicht möglich, da r sich zwischen diesen beiden Flächen befindet. Deshalb wird hier die dem Stern nahe Teilfläche mit r' bezeichnet und die sternferne mit r''. Fall 3 schließlich verhält sich wie Fall 1, das heißt r' steht für die dem Ort r näher liegende, r'' für die von r fernere Subfläche.

Bei der Behandlung der auftretenden Abschwächungen von Licht durch die Resonanz-

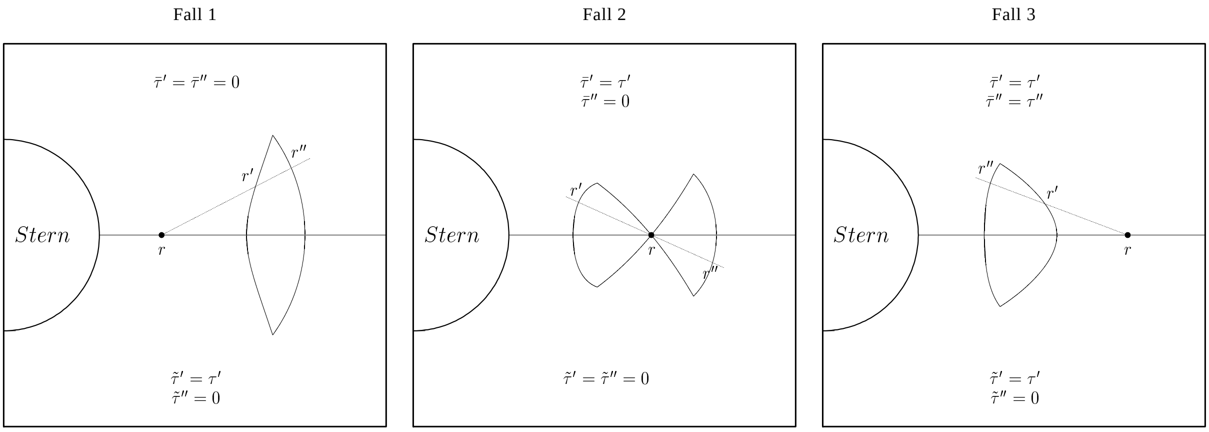

Abbildung 7.4: Sortierung der Resonanzflächen in den drei möglichen Konfigurationen. Ein von r ausgehender Sichtstrahl schneidet die Resonanzflächen jeweils zweimal.

flächen ist es notwendig, die Lichtstrahlen nach ihrer Herkunft zu unterscheiden. Sie können entweder direkt vom Stern kommen (auch *Core* genannt) oder in einer der Resonanzflächen produziert worden sein. Die optischen Tiefen der beiden beteiligten Resonanzflächen sind für Strahlen vom Core und für Strahlen von den Resonanzflächen zu unterscheiden, weshalb die ersteren einen Querbalken über ihrem Symbol tragen ($\bar{\tau}'$ bzw. $\bar{\tau}''$) während die letzteren mit einer Tilde ornamentiert werden ($\tilde{\tau}'$ bzw. $\tilde{\tau}''$).

Offensichtlich wird im Fall 1 das vom Core stammende Licht durch keine der beiden Resonanzflächen geschwächt, denn beide liegen jenseits des Ortes r (siehe Abbildung 7.4). Daher können $\bar{\tau}' = \bar{\tau}'' = 0$ gesetzt werden. Die einfach gestrichene Fläche moduliert jedoch das in der zweifach gestrichenen Fläche produzierte Licht, weshalb $\tilde{\tau}'$ nicht verschwindet und somit $\tilde{\tau}' = \tau'$ gilt. Durch die zu r'' gehörende Teilfläche hingegen propagiert das Licht der anderen Fläche nicht, daher ist $\tilde{\tau}'' = 0$ die Konsequenz.

Im Unterschied dazu impliziert Fall 2, dass Core-Licht auf seinem Weg zu r die einfach gestrichene Resonanzfläche passieren muss, sodass dafür die optische Tiefe der ersten Resonanzfläche nicht verschwindet – es gilt $\bar{\tau}' = \tau'$. Die Größe $\bar{\tau}''$ dagegen verändert das direkte Sternlicht nicht, sodass sie gleich Null gesetzt wird. Die mit einer Tilde verzierten optischen Tiefen $\tilde{\tau}'$ und $\tilde{\tau}''$ sind schließlich ebenfalls beide Null, da keine der beiden Flächen das Licht der jeweils anderen auf seinem Weg zu r behindert.

Zu guter Letzt sind im Fall 3 beide Subflächen bei der Behandlung von Corestrahlen relevant, denn sie befinden sich beide zwischen dem Stern und r. Es muss daher $\bar{\tau}' = \tau'$ bzw. $\bar{\tau}'' = \tau''$ gelten. Außerdem dämpft die einfach gestrichene Fläche das Licht der zweifach gestrichenen, sodass $\tilde{\tau}' = \tau'$ gilt. Währenddessen kann $\tilde{\tau}'' = 0$ gesetzt werden, denn Photonen von der r näher liegenden Fläche durchqueren auf ihrem Weg zu r die andere Teilfläche nicht.

7.1.4 Formulierung der Quellfunktion

Zunächst in allgemeiner Form sowie ohne Beachtung der im Abschnitt 7.1.3 getroffenen Vereinbarungen und ihrer Konsequenzen schreiben wir ausgehend von Gleichungen (29) und (46) in Rybicki & Hummer (1978) den Ausdruck für die Intensität bei Dreipunktkopplung als

$$
\begin{aligned}
\bar{I}(\vec{r},\vec{n}) = e^{-\bar{\tau}''}\, e^{-\bar{\tau}'}\, I_c\, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
+ \left(1 - e^{-\tau''}\right) S(r'')\, e^{-\tilde{\tau}'}\, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
+ \left(1 - e^{-\tau'}\right) S(r')\, e^{-\tilde{\tau}''}\, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
+ \left(1 - \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\right) S(r)\,. \qquad (7.17)
\end{aligned}
$$

Im Vergleich zur Gleichung (46) von Rybicki & Hummer kommt hierbei ein zusätzlicher Term hinzu – der zweite Summand in (7.17). Er beschreibt den Beitrag der zweifach gestrichenen Resonanzfläche zur Gesamtintensität am Ort r. In diesem Term wird die lokale Quellfunktion $S(r'')$ mit $e^{-\tilde{\tau}'}$ gedämpft, was dem im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Durchgang des bei r'' produzierten Lichtes durch die einfach gestrichene Resonanzfläche entspricht. Der dritte Term in (7.17) bewirkt dasselbe, jedoch für den Beitrag der anderen Resonanzfläche. Hier vollzieht sich die Abschwächung mittels $e^{-\tilde{\tau}''}$, was genau einem Durchgang des bei r' erzeugten Lichtes durch die zweifach gestrichene Resonanzfläche entspricht. Der erste Term von (7.17) behandelt die Wirkung des direkten Sternlichtes, also der Corestrahlen. Sie werden beim Durchgang durch jede der beiden Resonanzflächen entsprechend mittels $e^{-\bar{\tau}'}$ bzw. $e^{-\bar{\tau}''}$ gedämpft. Die Intensität des Sternlichtes I_c sei hierbei als gegeben angenommen.

Der sich in allen vier Termen wiederfindende Faktor $(1 - e^{-\tau})/\tau$ wird im englischen Sprachgebrauch meist als *escape probability* bezeichnet. Er steht demnach für eine lokale Entweichwahrscheinlichkeit der erzeugten Photonen. Es ist klar, dass der Vorfaktor von $S(r)$ im vierten Term von (7.17) den sogenannten lokalen Produktionsfehler am Ort r beschreibt, denn die Differenz zwischen eins und der Entweichwahrscheinlichkeit bezeichnet gewissermaßen die „Verbleibewahrscheinlichkeit“ der lokal bei r erzeugten Photonen und ihren Beitrag zur Gesamtintensität.

Durch Bildung des Raumwinkelintegrals erhalten wir aus (7.17)

$$
\begin{aligned}
S(r) = \frac{I_c}{4\pi} \int\limits_{\Omega_c} d\Omega \, e^{-\bar{\tau}''} \, e^{-\bar{\tau}'} \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} d\Omega \, \left(1 - e^{-\tau''}\right) \, S(r'') \, e^{-\tilde{\tau}'} \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} d\Omega \, \left(1 - e^{-\tau'}\right) \, S(r') \, e^{-\tilde{\tau}''} \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
+ \frac{1}{4\pi} \, S(r) \int\limits_{4\pi} d\Omega \; - \; \frac{1}{4\pi} \, S(r) \int\limits_{4\pi} d\Omega \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \, .
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Da der erste Term die direkt vom Stern kommende Strahlung beschreibt, ist es hinreichend, lediglich über den Raumwinkelbereich der Sternscheibe zu integrieren. Andere Richtungen würden keinen weiteren Beitrag zum Integral liefern. Die Evaluation des Integrals im vierten Term liefert offensichtlich 4π, was sich gegen den Vorfaktor $1/4\pi$ wegkürzt. Für das gesamte Integral aus dem ersten Term inklusive des Normierungsfaktors $1/4\pi$ schreiben wir eine neue Größe

$$
\bar{\beta}_c(r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_c} d\Omega \, e^{-\bar{\tau}''} \, e^{-\bar{\tau}'} \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \, ,
\tag{7.19}
$$

wobei der Index c für „core“ steht. Außerdem sei für alle nicht vom „core“ stammenden Strahlen

$$
\beta(r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} d\Omega \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \, ,
\tag{7.20}
$$

was dem Integral aus dem letzten Term mitsamt des Vorfaktors $1/4\pi$ entspricht. Damit schreibt sich (7.18) nunmehr

$$
\begin{aligned}
S(r) = I_c \, \bar{\beta}_c(r) \\
+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} d\Omega \, \left(1 - e^{-\tau''}\right) \, S(r'') \, e^{-\tilde{\tau}'} \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} d\Omega \, \left(1 - e^{-\tau'}\right) \, S(r') \, e^{-\tilde{\tau}''} \, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
+ S(r) \; - \; \beta(r) S(r) \, .
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

Subtraktion von $S(r)$ liefert erstmals einen Ausdruck, der zum iterativen Bestimmen der

Quellfunktion $S(r)$ verwendet werden kann

$$
\begin{aligned}
\beta(r)S(r) = {} & I_c\,\bar{\beta}_c(r) \\
& + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} d\Omega\,\left(1-e^{-\tau''}\right)\,S(r'')\,e^{-\tilde{\tau}'}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
& + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} d\Omega\,\left(1-e^{-\tau'}\right)\,S(r')\,e^{-\tilde{\tau}''}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,.
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

Es wird deutlich, dass diese Gleichung die Quellfunktion am betrachteten Ort r als Funktion der Quellfunktionen an den beiden Resonanzorten r' und r'' beschreibt. Eine kurze Nebenrechnung zeigt, wie die beiden verbliebenen $d\Omega$ - Integrale in handlichere Integrale über μ umgeschrieben werden können

$$
\frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\int\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{4\pi}\,2\pi\int\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int\sin\theta\,d\theta\,.
\tag{7.23}
$$

Mit Hilfe von

$$
d\cos\theta = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\,d\theta = -\sin\theta\,d\theta
\tag{7.24}
$$

folgt zusammen mit $d\mu = d\cos\theta$ weiter in (7.23)

$$
\frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} d\Omega = -\frac{1}{2}\int d\cos\theta = -\frac{1}{2}\int d\mu\,.
\tag{7.25}
$$

Die Integrationsgrenzen des zweiten Integrals in (7.23) (des jetzigen $d\mu$ - Integrals) haben wir bislang bewußt nicht hingeschrieben. Ihre Wahl ist, wie wir weiter unten zeigen werden, Konventionssache und für die drei zu behandelnden Fälle unterschiedlich. Zunächst jedoch verschwindet durch die Vertauschung der Integrationsgrenzen das negative Vorzeichen.

Neben diesem Resultat verwenden wir im nächsten Schritt ein Ergebnis aus Abschnitt 7.1.3. Dort konnte dank entsprechend gewählter Sortierung der Teilresonanzflächen erreicht werden konnte, dass $\tilde{\tau}'' = 0$ stets gilt. Diese Tatsache trifft in allen drei genannten Fällen zu (vgl. Abbildung 7.4), sodass sie hier in völliger Allgemeinheit verwendet werden kann. Unzweifelhaft ergibt sich daraus $e^{-\tilde{\tau}''} = 1$. Zusammen mit (7.25) schreibt sich (7.22) als

$$
\begin{aligned}
\beta(r)S(r) = {} & I_c\,\bar{\beta}_c(r) \\
& + \frac{1}{2}\int d\mu\,\left(1-e^{-\tau''}\right)\,S(r'')\,e^{-\tilde{\tau}'}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\
& + \frac{1}{2}\int d\mu\,\left(1-e^{-\tau'}\right)\,S(r')\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,.
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

Wir vereinbaren an dieser Stelle die Orientierung von μ. Vom Ort r aus gesehen liegt die untere Grenze $\mu = -1$ in Richtung des Sterns und die obere Grenze $\mu = +1$ zeigt vom Stern weg. Die Richtung $\mu = 0$ zeigt senkrecht zur Verbindungsachse zwischen Stern und Ort r. Die Integration erfolgt somit von $\mu = -1$ nach $\mu = +1$, also im Uhrzeigersinn. Somit fußt auch die oben vorgenommene Vertauschung der Integrationsgrenzen in beiden $d\mu$ - Integralen auf gesichertem Boden. Abbildung 7.5 verdeutlicht diese Konvention am Beispiel von Fall 2.

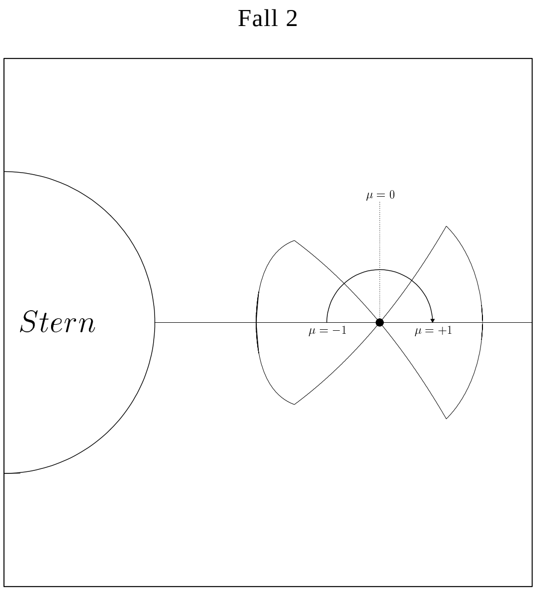

Abbildung 7.5: Integrationsrichtung des $d\mu$-Integrals, hier am Beispiel von Fall 2. Beginnend bei $\mu = -1$ in Sternrichtung über $\mu = 0$ nach $\mu = +1$ in sternabgewandter Richtung erfolgt die Integration über μ.

Im Folgenden ist für die drei untersuchten Fälle eine sorgfältige Wahl der Integrationsreihenfolge über die auftretenden Resonanzflächen zu treffen.

Fall 2. Leicht gegen die Gebote der Didaktik verstoßend möchte ich zuerst Fall 2 erläutern, da dieser meiner Meinung nach die Vorgehensweise am deutlichsten und einfachsten klar macht. Sich am Ort r befindend impliziert eine Integrationsrichtung von $\mu = -1$ nach $\mu = +1$, dass zunächst eine Zweipunktkopplung zwischen den Resonanzorten r' und dem Ort r selbst betrachtet wird, während μ sich dem Wert 0 nähert. Anschließend, bei $\mu > 0$, findet eine Zweipunktkopplung zwischen den Resonanzorten r'' und r statt. Das Erstaunliche an dieser Stelle ist offenbar, dass die eigentlich vorhandene Dreipunktkopplung in diesem Fall durch die Integration über μ zu jedem Zeitpunkt als Zweipunktkopplung behandelt werden kann. Jeder Resonanzort r' auf der Resonanzfläche steht mit r in Verbindung, ebenso wie jedes r'' auf der anderen Seite des Flächensystems. Jedoch – und das ist der Kernpunkt der folgenden Bemühungen und zugleich Voraussetzung für deren Gelingen – befinden sich die beiden Resonanzorte r' und r'' miteinander *nicht* in Resonanz.

Wie bereits angedeutet, besteht ein Problem beim Durchgang von μ durch den Wert Null. Im hier behandelten Fall 2 ist jedoch sofort ersichtlich, dass diese Komplikation umgangen werden kann, indem die vollständige Integral $\int_{-1}^{+1} d\mu$ geschickt auf die beiden links- und rechtsseits von r liegenden Resonanzflächen aufgeteilt wird. Der zweite Term in Gleichung (7.26) beschreibt die Kopplung von r und r''. Der zweifach gestrichene Resonanzort liegt jedoch im positiven Bereich von μ, sodass die untere Grenze für dieses Integral gleich Null gesetzt werden kann. Analog ist eine Integration im dritten Term ausschließlich im negativen Wertebereich von μ sinnvoll. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \beta(r)S(r) = I_c\,\bar{\beta}_c(r) & \\ & + \frac{1}{2}\int_0^{+1} d\mu\, \left(1 - e^{-\tau''}\right)\, S(r'')\, e^{-\tilde{\tau}'}\, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\ & + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} d\mu\, \left(1 - e^{-\tau'}\right)\, S(r')\, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Schließlich fällt dem aufmerksamen Leser sicherlich auf, dass im hier vorliegenden Regime der Faktor $e^{-\tilde{\tau}'}$ ebenfalls verschwindet, denn er beschreibt die Abschwächung des bei r'' erzeugten Lichtes beim Durchgang durch die einfach gestrichene Resonanzfläche. In der Geometrie von Fall 2 tritt diese Schwächung jedoch überhaupt nicht auf, da sich die beiden Teilresonanzflächen auf verschiedenen Seiten von r befinden. Somit ist hier $\tilde{\tau}' = 0$ und der exponentielle Faktor wird 1 . Gleichung (7.27) wird somit zu

$$\begin{aligned} \beta(r)S(r) = I_c\,\bar{\beta}_c(r) & \\ & + \frac{1}{2}\int_0^{+1} d\mu\, \left(1 - e^{-\tau''}\right)\, S(r'')\, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \\ & + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} d\mu\, \left(1 - e^{-\tau'}\right)\, S(r')\, \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Fall 1. Hierbei liegt die gesamte Resonanzfläche jenseits des untersuchten Ortes r, d.h. r befindet sich zwischen dem Stern und den Resonanzflächen (vgl. beispielsweise Abbildung 7.3). Offenbar würde eine Integration im negativen Wertebereich von μ keine zusätzlichen Beiträge zur Quellfunktion $S(r)$ liefern, sodass beide $d\mu$ - Integrale in (7.26) auf den positiven Wertebereich von μ beschränkt werden können. Für Fall 1 folgt somit aus (7.26)

$$\begin{aligned}\beta(r)S(r) = I_c\,\bar{\beta}_c(r) & \\ + \frac{1}{2}\int_0^1 d\mu\,\left(1-e^{-\tau''}\right)\,S(r'')\,e^{-\tilde{\tau}'}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau} & \\ + \frac{1}{2}\int_0^1 d\mu\,\left(1-e^{-\tau'}\right)\,S(r')\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,. & \qquad (7.29)\end{aligned}$$

Fall 3. Schließlich verhält sich diese dritte mögliche Konfiguration symmetrisch zu Fall 1, namentlich mit r jenseits aller Resonanzflächen (vgl. zum Beispiel Abbildung 7.3). Die Resonanzflächen befinden sich zwischen Stern und Ort r, weshalb hier die vom Stern weg gerichteten Integrationsrichtungen keine Beiträge zum $d\mu$ - Integral liefern. Seine Beschränkung auf den negativen Wertebereich von μ ist somit sinnvoll und wir erhalten aus (7.26) für den Fall 3

$$\begin{aligned}\beta(r)S(r) = I_c\,\bar{\beta}_c(r) & \\ + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 d\mu\,\left(1-e^{-\tau''}\right)\,S(r'')\,e^{-\tilde{\tau}'}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau} & \\ + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 d\mu\,\left(1-e^{-\tau'}\right)\,S(r')\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,. & \qquad (7.30)\end{aligned}$$

Vor allem die im Fall 2 gemachte Beobachtung, dass sich die untersuchte Dreipunktkopplung prinzipiell durch Aufspaltung der Integration in eine Zweipunktkopplung umwandeln lässt, ist eine bemerkenswerte Erkenntnis. Von dieser Eigenschaft ausgehend und nunmehr mit Iterationsgleichungen für die Quellfunktion $S(r)$ in allen drei Fällen ausgestattet wollen wir jetzt zeigen, wie mittels einer Variablensubstitution $d\mu \to dr'$ die Winkelintegrale $\int d\mu$ in Wegintegrale $\int dr'$ transformiert werden können. Dies ermöglicht erst den weiter oben eingeführten Begriff des *geometriefreien* Formalismus bei der Berechnung von $S(r)$.

7.1.5 Variablensubstitution $d\mu \to dr'$ im Fall 2

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie das relativ kompliziert zu handhabende $d\mu$ - Integral durch Substitution der Integrationsvariablen in ein wesentlich einfacher zu lösendes dr' - Integral überführt werden kann. Wir beschränken uns zunächst auf Fall 2, in welchem eine sehr weitgehende Vereinfachung möglich ist. Später werden wir zeigen, wie die hier gezeigte Variablensubstitution die Iterationsgleichung für die Quellfunktion in den Fällen 1 und 3 verändert.

Die im Fall 2 durchzuführende Vereinfachung ist die, dass die beiden Resonanzorte r' und r'' sowie die Integration ihrer Beiträge zur Quellfunktion nicht mehr getrennt nach sternwärts bzw. windwärts vom Ort r liegend betrachtet werden, sondern dass die Integration durchgehend über r' geht. Damit gilt der Form halber $r'' \to r'$ und somit r' als einzige Integrationsvariable im gesamten Integrationsbereich. Abbildung 7.6 verdeutlicht die Vorgehensweise, indem der Integrationsweg durch Pfeile symbolisiert ist.

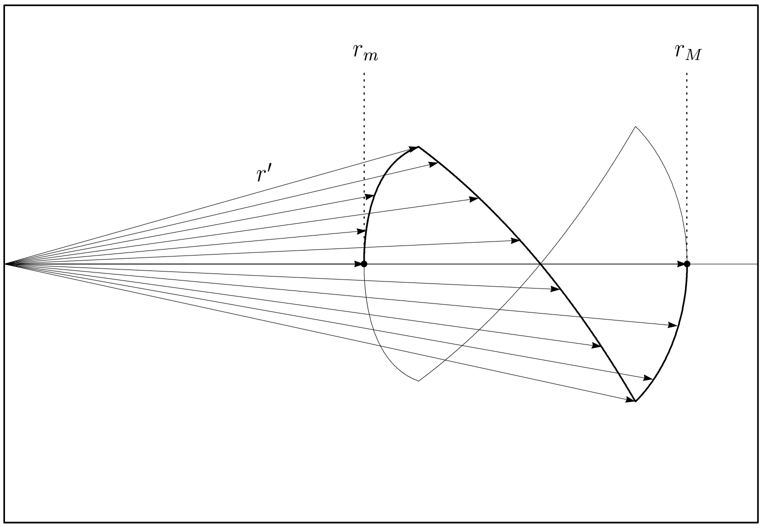

Abbildung 7.6: Integration entlang des dr'-Pfades, hier im Fall 2. Durch die Monotizität von r' ist eine fortlaufende Integration möglich. Der aufintegrierte Pfad ist durch die ihn entlanglaufenden Pfeile verdeutlicht. Die Integration verläuft in den Grenzen von r_m bis r_M, welche als Punkte in der Abbildung symbolisiert sind.

Es zeigt sich dabei, dass dank sphärischer Symmetrie des Problems der zu r'' gehörende Teil des Integrationsweges als nahtlose Fortsetzung der linksseitigen Integration über dr' behandelt werden darf. Damit kann (7.28) wieder als ein einziges Integral geschrieben werden

$$\beta(r)S(r) = I_c\,\bar{\beta}_c(r) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\mu\,\left(1 - e^{-\tau'}\right)\,S(r')\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,. \tag{7.31}$$

Die nun gewünschte Substitution $d\mu \to dr'$ beginnt mit μ^2 aus (7.8). Daraus folgt durch

Differentiation zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dr'} &= \frac{d\mu^2}{dr'}\,\frac{d\mu}{d\mu^2} = \left(\frac{d\mu^2}{d\mu}\right)^{-1}\frac{d\mu^2}{dr'} = (2\,\mu)^{-1}\,\frac{d\mu^2}{dr'} = \frac{1}{2\,\mu}\,\frac{d\mu^2}{dr'} \\
&= \frac{1}{2\,\mu}\,\frac{1}{\left(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2\right)^2} \\
&\quad \times \Big\{\Big(2\,r^2\,v'\,dv'/dr' - 2\,r'^2\,v'\,dv'/dr' - 2\,r'\,v'^2\Big)\Big(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2\Big) \\
&\qquad - \Big(r^2\,v'^2 - r'^2\,v'^2\Big)\,\left(2\,r^2\,v'\,dv'/dr' - r\,r'\,v^2\right)\Big\} \\
&= \frac{1}{2\,\mu}\,\frac{2}{\left(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2\right)^2} \\
&\quad \times \Big(\,r^4\,v'^3\,dv'/dr' - r^2\,r'^2\,v^2\,v'\,dv'/dr' - r^2\,r'^2\,v'^3\,dv'/dr' + r'^4\,v^2\,v'\,dv'/dr' \\
&\qquad -r^2\,r'\,v'^4 + r'^3\,v^2\,v'^2 - r^4\,v'^3\,dv'/dr' + r^2\,r'\,v^2\,v'^2 + r^2\,r'^2\,v'^3\,dv'/dr' - r'^3\,v^2\,v'^2\Big) \\
&= \frac{1}{\mu}\,\frac{r'^4\,v^2\,v'\,dv'/dr' + r^2\,r'\,v^2\,v'^2 - r^2\,r'^2\,v^2\,v'\,dv'/dr' - r^2\,r'\,v'^4}{\left(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2\right)^2}\,.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Durch Einsetzen von

$$\mu = \left\{\frac{v'^2\,(r^2 - r'^2)}{r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2}\right\}^{1/2} = \frac{v'\,\left(r^2 - r'^2\right)^{1/2}}{\left(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2\right)^{1/2}} \tag{7.33}$$

aus (7.8) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dr'} &= \frac{\left(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2\right)^{1/2}}{v'\,\left(r^2 - r'^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{r'^4\,v^2\,v'\,dv'/dr' + r^2\,r'\,v^2\,v'^2 - r^2\,r'^2\,v^2\,v'\,dv'/dr' - r^2\,r'\,v'^4}{\left(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2\right)^2} \\
&= \frac{v'\,\left(r'^4\,v^2\,dv'/dr' + r^2\,r'\,v^2\,v' - r^2\,r'^2\,v^2\,dv'/dr' - r^2\,r'\,v'^3\right)}{v'\,\left(r^2 - r'^2\right)^{1/2}\,\left(r^2\,v'^2 - r'^2\,v^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{r'\,\left\{r'\,v^2\,dv'/dr'\,\left(r'^2 - r^2\right) + r^2\,v'\,\left(v^2 - v'^2\right)\right\}}{\left(r'^2 - r^2\right)^{1/2}\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)^{3/2}}\,.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Aufspalten des Ausdruckes und Erweitern mit r'/r' sowie ein Vergleich mit Q' aus (7.16) liefern

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dr'} &= \frac{r'}{\left(r'^2 - r^2\right)^{1/2}\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)^{1/2}} \cdot \frac{r'}{r'} \cdot \frac{r'\,v^2\,dv'/dr'\,\left(r'^2 - r^2\right) + r^2\,v'\,\left(v^2 - v'^2\right)}{r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2} \\
&= \frac{r'^2}{\left\{\left(r'^2 - r^2\right)\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)\right\}^{1/2}} \cdot \frac{r'\,v^2\,dv'/dr'\,\left(r'^2 - r^2\right) + r^2\,v'\,\left(v^2 - v'^2\right)}{r'\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)} \\
&= \frac{r'^2\,Q'}{\left\{\left(r'^2 - r^2\right)\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)\right\}^{1/2}}\,. \qquad (7.35)
\end{aligned}$$

Somit lautet der Substitutionsausdruck $d\mu \to dr'$

$$d\mu = dr'\,\frac{r'^2\,Q'}{\left\{\left(r'^2 - r^2\right)\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)\right\}^{1/2}} \qquad (7.36)$$

und (7.31) transformiert sich zu

$$\begin{aligned}
\beta(r)S(r) &= I_c\,\bar{\beta}_c(r) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{r_m}^{r_M} dr'\,\frac{r'^2\,Q'}{\left\{\left(r'^2 - r^2\right)\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)\right\}^{1/2}}\,(1 - e^{-\tau'})\,S(r')\,\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \qquad (7.37)
\end{aligned}$$

mit den in Abbildung 7.6 angedeuteten Integrationsgrenzen r_m und r_M. Diese Gleichung stellt die transformierte Iterationsgleichung für die Quellfunktion $S(r)$ im Fall 2 dar und ist völlig frei von Winkelintegralen und somit frei von der Notwendigkeit, die explizite Geometrie der Resonanzflächen bestimmen zu müssen. Die Geometrie des Problems ergibt sich gewissermaßen von selbst durch den „Geometriebruch“ in der Formel. Dieser beinhaltet die gesamte Information über Orte und Geschwindigkeiten.

Nach (6.13) und (6.19) gilt die Beziehung

$$Q' = \frac{\kappa\,v_{th}\,\rho'}{\tau'}\,, \qquad (7.38)$$

wodurch (7.37) sich ein wenig physikalischer schreiben lässt als

$$\begin{aligned}
\beta(r)S(r) &= I_c\,\bar{\beta}_c(r) \\
&\quad + \frac{\kappa\,v_{th}}{2}\int_{r_m}^{r_M} dr'\,\frac{r'^2\,\rho'}{\left\{\left(r'^2 - r^2\right)\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)\right\}^{1/2}}\,\frac{1 - e^{-\tau'}}{\tau'}\,\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}\,S(r')\,. \qquad (7.39)
\end{aligned}$$

7.1.6 Quellfunktion im Fall 1 und 3

Im oben besprochenen Fall 2 war die Herleitung der Iterationsgleichung für die Quellfunktion $S(r)$ am Ort r dadurch begünstigt, dass lediglich die Abschattung des Sternlichtes durch eine der beiden kreisbogenähnlichen Resonanzflächen berücksichtigt werden musste. Es traten keine Abschattungen des in den Teilflächen erzeugten Lichtes durch die jeweils andere Subfläche auf, denn der betrachtete Ort r befand sich genau zwischen diesen beiden. Dadurch konnte der gesamte Integrationsweg (von r_m bis r_M) kontinuierlich durchfahren werden.

Etwas anders gelagert ist die Situation in den Fällen 1 und 3. Im ersteren befindet sich r zwischen dem Stern und den beiden Resonanzflächen, sodass überhaupt keine Abschattung des Sterns vorliegt. Allerdings dämpft die sternnahe Teilfläche das in der sternfernen produzierte Licht auf seinem Weg zum Ort r. Umgekehrt, im Fall 3, befinden sich beide Flächen zwischen Stern und r, sodass beide einen Abschattungseffekt auf das Sternlicht haben. Außerdem verdunkelt erneut eine Fläche die andere, nämlich die sternfernere die sternnahe.

In beiden hier betrachteten Fällen kann die Variablensubstitution $d\mu \rightarrow dr'$ wie oben auch vollzogen werden, jedoch unter Beachtung des oben gesagten, also durch Einführung zusätzlicher Extinktionsfaktoren.

Der Integrationsweg über dr' soll in beiden Fällen vom sternnächsten Punkt r_m über den „Knickpunkt" r_k (den Punkt des Zusammentreffens beider Subflächen) bis zum sternfernsten Punkt r_M führen, wie in Abbildung 7.7 durch den dick gezeichneten Abschnitt der Resonanzflächen verdeutlicht.

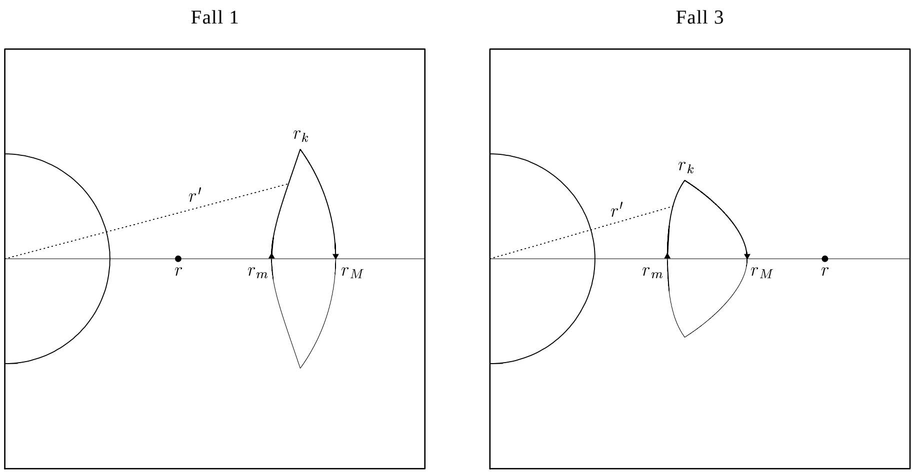

Abbildung 7.7: Integration über dr' in den Fällen 1 und 3. In beiden Situationen verläuft die Integration entlang des dick gezeichneten Weges. Der Integrationspfad beginnt jeweils beim sternnächsten Punkt der Resonanzfläche r_m, verläuft über den Ort des Zusammentreffens der beiden Teilflächen (den Kink) r_k und endet schließlich beim sternfernsten Punkt der Resonanzfläche r_M. Der Integrand r' nimmt monoton zu. Es ist klar, dass während der Integration nach Überschreiten von r_k die einzelnen Beiträge eine Extinktion des in der vom Ort r weiter weg gelegenen Teilfläche produzierten Lichtes durch die davor liegende Fläche beinhalten müssen.

Wenn in beiden Fällen r' jeweils die weiter weg vom Ort r gelegene Fläche bezeichnet und r'' diejenige, welche näher an r liegt und welche die zuerst genannte abschattet, dann lautet die Iterationsgleichung der Quellfunktion aus (7.39) im Fall 1

$$\beta(r)S(r) = I_c\,\beta_c(r) + \frac{\kappa\, v_{th}}{2}\int_{r_m}^{r_M} dr'\,\frac{r'^2\,\rho'}{\left\{\left(r'^2 - r^2\right)\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)\right\}^{1/2}}\,\frac{1-e^{-\tau'}}{\tau'}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,S(r')\;e^{-\tau''\,U(r'-r_k)} \tag{7.40}$$

und im Fall 3

$$\beta(r)S(r) = I_c\,\bar{\bar{\beta}}_c(r) + \frac{\kappa\, v_{th}}{2}\int_{r_m}^{r_M} dr'\,\frac{r'^2\,\rho'}{\left\{\left(r'^2 - r^2\right)\,\left(r'^2\,v^2 - r^2\,v'^2\right)\right\}^{1/2}}\,\frac{1-e^{-\tau'}}{\tau'}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,S(r')\;e^{-\tau''\,U(r_k-r')}\,, \tag{7.41}$$

jeweils mit der Heavisideschen Sprungfunktion

$$U(t-t_0) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t > t_0 \\ 0 & \text{für} \quad t < t_0 \end{cases} \qquad (t_0 > 0)\,. \tag{7.42}$$

Die im Vergleich zu (7.39) zusätzlichen Extinktionsfaktoren $e^{-\tau''}$ in (7.40) und (7.41) werden somit bei der dr'-Integration erst ab einem Wert von $r' > r_k$ wirksam, also ab dem Ort des Zusammentreffens beider Teilflächen. Bei kleineren Werten von r' liefert die Sprungfunktion null und der exponentielle Faktor ist eins.

Man beachte die in (7.39) bis (7.41) jeweils unterschiedliche Notation von $\beta_c(r)$, welches im Fall 1 keinen Balken, im Fall 2 einen und im Fall 3 zwei Balken trägt. Die Anzahl der Balken symbolisiert die Anzahl der das Sternlicht verdunkelnden Resonanzflächen und somit die Anzahl der in $\beta_c(r)$ wirkenden Extinktionsfaktoren. Da $\beta_c(r)$ ausschließlich Einfluss auf die photosphärische Intensität I_* hat, ist es sinnvoll die unterschiedlichen Auswirkungen der Sternabschattung in den drei Fällen an der Größe $\beta_c(r)$ selbst festzumachen. Wie aus (7.19) sofort ersichtlich ist, ergeben sich folgende Ausdrücke für $\beta_c(r)$:

$$\beta_c(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_c} d\Omega\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \tag{7.43}$$

im Fall 1 (keinerlei Sternabschattung durch Resonanzflächen),

$$\bar{\beta}_c(r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_c} d\Omega\,e^{-\bar{\tau}'}\,\frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \tag{7.44}$$

im Fall 2 (Abschattung des Sterns lediglich durch die zwischen dem Stern und r liegende und mit r' bezeichnete Fläche) sowie

$$\bar{\bar{\beta}}_c(r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_c} d\Omega \, e^{-\bar{\tau}''} \, e^{-\bar{\tau}'} \, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \tag{7.45}$$

im Fall 3 (Sternabschattung durch beide Resonanzflächen r' und r'').

7.1.7 Näherungen

Bei der Durchführung der dr'-Integration in den Fällen 1 und 3 werden zwei geringe Näherungen gemacht. Es handelt sich um Vernachlässigungen von Abschattungseffekten, welche nur in bestimmten, sehr kleinen Intervallen des gesamten Gültigkeitsbereiches des Ortes r auftreten.

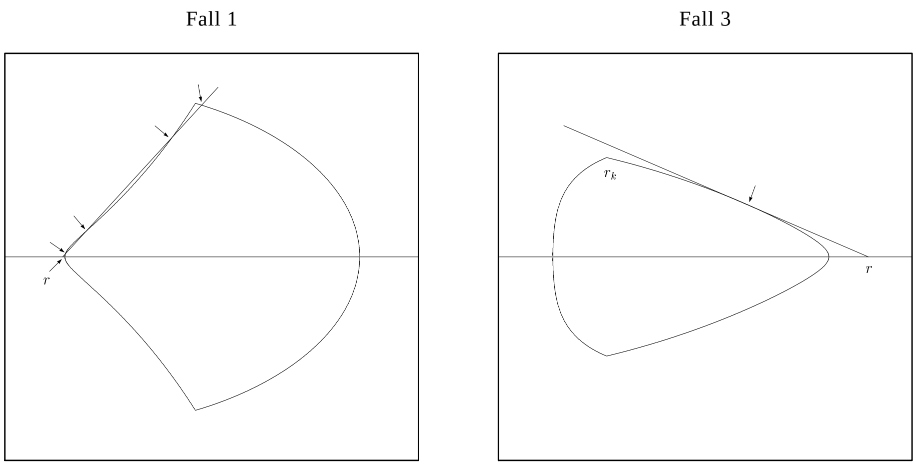

Abbildung 7.8: Näherungen im Fall 1 und 3. Beide Panels sind im Sinne besserer Erkennbarkeit der beschriebenen Effekte horizontal gestreckt worden. Fall 1: ein Photon kann das Resonanzflächensystem bis zu vier Mal passieren, es kommt also gemeinsam mit dem Resonanzort r selbst zur Fünfpunktkopplung. Diese seltenen Fälle werden vernachlässigt und immer als Dreipunktkopplung approximiert. Fall 3: die zusätzliche Extinktion durch die sternferne Teilresonanzfläche wirkt eigentlich erst ab dem Ort des Kinks, also ab dem Ort des Zusammentreffens beider Teilflächen. Ein durch r verlaufendes Photon kann jedoch in einigen Fällen die Resonanzfläche bereits passieren bevor die besagte Extraextinktion eingeschaltet wird. Diese Vor-Abschattung wird ebenfalls vernachlässigt und die Abschattung durch die sternferne Resonanzfläche immer erst bei ab r_k wirksam.

Die erste Approximation betrifft Fall 1. Wie in Abbildung 7.8 links dargestellt, kommt es, wenn sich r sehr nahe vor dem ersten Kink r_k im Windgeschwindigkeitsgesetz befindet, zu einer solchen Geometrie, dass ein durch r verlaufender Sichtstrahl die Resonanzflächen bis zu vier Mal schneidet. Ein in Richtung der eingezeichneten geraden Linie propagierendes Photon erführe demnach zusammen mit dem Ort r selbst eine Fünfpunktkopplung.

Die einzelnen Kopplungsorte (die Schnittpunkte der Photonflugrichtung mit den Resonanzflächen) sind in Abbildung 7.8 links durch kleine Pfeilsymbole verdeutlicht. Wir vernachlässigen diese multiresonanten Kopplungen und nehmen stets Dreipunktkopplung an.

Eine zweite Näherung wird im Fall 3 vollzogen und ist in Abbildung 7.8 rechts skizziert. Befindet sich r in dieser Situation unmittelbar hinter dem zweiten Kink im Windgeschwidigkeitsgesetz, so kann ein durch r verlaufendes Photon die Resonanzfläche bereits passieren (kleiner Pfeil), noch bevor die Integration den Kinkort r_k erreicht hat. Da wir das Einschalten der zusätzlichen Extinktion durch die sternfernere Teilfläche erst bei r_k zulassen wollen, vernachlässigen wir diesen ebenfalls kleinen Vor-Abschattungseffekt und nehmen stets an, dass die Abschattung erst ab dem Ort des Zusammentreffens beider Subflächen stattfindet.

Beide Abbildungen 7.8 zeigen aus Gründen der Übersichtlichkeit nur den jeweils interessierenden Ausschnitt. Sie sind außerdem in horizontaler Richtung gestreckt dargestellt, um die beschriebenen Effekte deutlicher zeigen zu können. Die Stärke der gemachten Approximationen wird durch die Darstellung in Abbbildung 7.8 also überproportional dramatisiert. Der Leser möge dazu die unverzerrten Bilder der Sequenz in Abbildung B.6 im Anhang B.1 betrachten, um sich von der Geringfügigkeit der Vernachlässigungen zu überzeugen.

7.2 Iteration von S(r)

7.2.1 Λ - Iteration

Die in (7.39) bis (7.41) bereitgestellten Gleichungen zur Berechnung der Quellfunktionen $S(r)$ in allen drei Fällen können mittels Division durch $\beta(r)$ in eine Form gebracht werden, in welcher links vom Gleichheitszeichen nur noch die gesuchte Quellfunktion am Aufpunkt r steht und rechts ein Konglomerat aus anderen Größen nebst $S(r')$. Schreibt man für alle beteiligten Terme und Größen außer den beiden Quellfunktionen ein einziges neues Symbol Λ, so nehmen die drei Formeln eine einheitliche Gestalt an

$$S(r) = \Lambda \cdot S(r')\,. \tag{7.46}$$

Dieser kompakte Ausdruck lässt sich in einfacher Weise zur Iteration der gesuchten Quellfunktion verwenden, wenngleich sich hinter Λ ein Ausdruck beliebiger Komplexität verbergen kann. Wegen des gebräuchlichen Symbols für den Iterationsoperator wird diese Klasse von Verfahren *Lambda-Iteration* genannt.

Es wird ein geeigneter Startwert $S(r')$ für alle Kopllungspunkte r' benötigt. Diese Anfangsfunktion wird im ersten Iterationsschritt in mathematischem Sinne mit dem Λ-Operator gefaltet und das Ergebnis $S(r)$ dieser Faltung stellt den neuen Wert für $S(r')$ im nächsten Iterationsschritt dar. Der Vorgang wird mehrfach wiederholt. Konvergenzeigenschaften des Λ-Operators vorausgesetzt, ändert sich $S(r)$ nach endlicher Zahl von

Iterationen nicht mehr signifikant, sodass sein momentaner Wert als konvergierte Quellfunktion angesehen werden kann.

7.2.2 Das Programm *siter.f90*

Eine der größten Aufgaben dieser Diplomarbeit stellte die Programmierung des gesamten Verfahrens für die Iteration der Quellfunktion dar. Ergebnis dieser Bemühungen ist das in FORTRAN 90 geschriebende Programm *siter.f90*, dessen Quellcode im Anhang C.4 widergegeben ist.

Es implementiert die im obigen Abschnitt beschriebene klassische Λ-Iteration. Komplexere Verfahren, wie beispielsweise die sogenannte *accelerated lambda iteration* (ALI) werden nicht benötigt, denn *siter.f90* konvergiert im sinnvollen Parameterraum wegen der strikten Disjunktheit aller Resonanzflächen schnell und zuverlässig. Wir waren durchaus überrascht, dass bereits nach drei bis vier Iterationsschritten die von uns geforderte Genauigkeit von 1 % erreicht wurde.

Das Programm ist darauf ausgelegt, ein nichtmonotones Geschwindigkeitsfeld $v(r)$ sowie eine Dichteschichtung $\rho(r)$ als Input entgegenzunehmen, um damit die Quellfunktion $S(r)$ mittels besagter Λ-Iteration zu gewinnen. Beim gegenwärtigen Stand unserer Untersuchungen werden das Geschwindigkeits- und Dichtefeld noch im Programm selbst definiert (siehe auch Kapitel 9). Wie in allen bisherigen Ausführungen wird eine sphärisch symmetrische Abströmung von Materie angenommen, welche sich in einem 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetz bewegt. Das abbremsende Gebiet liegt zwischen $r = 2$ und $r = 3$, davor und dahinter herrscht lineare Beschleunigung. Das implementierte Gesetz ist in (5.17) formuliert und in Abbildung 5.8 dargestellt. Der Algorithmus benötigt außer $v(r)$ und $\rho(r)$ sowie der genannten Voraussetzungen keine weiteren Annahmen. Eine wichtige Beschränkung ist jedoch, dass nur Geschwindigkeitsgesetze mit zwei Knicken akzeptiert werden, eine Abfrage (Zeile 173 im Quellcode) stellt dies sicher. Wir haben viele solcher Sicherheitsabfragen zum Zwecke eines reibungslosen und verlässlichen Programmablaufs eingestreut, doch gewiss ist es mit endlichem Aufwand nicht möglich, alle Eventualitäten auf diese Weise abzufangen.

Der programmierte Algorithmus setzt den in dieser Arbeit entwickelten Dreipunktformalismus zur geometriefreien Berechnung der Quellfunktion und Linienkraft um. Variablensubstitution $d\mu \to dr'$ ist gemäß der Kapitel 7.1.5 und 7.1.6 implementiert ebenso wie die genaue Fallunterscheidung laut Kapitel 7.1.4. Außerdem wird die Abschattung des Sterns durch die eventuell zwischen ihm und dem Resonanzort r liegenden Flächen sowie die gegenseitige Abschattung der Resonanzflächen untereinander in aller Konsequenz berücksichtigt. Auf einem in seiner Feinheit definierbaren Gitter (wir haben in den Ergebnisrechnungen im Kapitel 8 1000 Gitterpunkte für die Auflösung von drei Sternradien gewählt) führt das Programm alle Berechnungen durch.

Der Quellcode gliedert sich in ein Hauptprogramm sowie einzelne Functions und Subroutinen. Im Hauptprogramm werden diese Subroutinen nacheinander aufgerufen. Beinahe die einzige logische Struktur im Hauptprogramm besteht aus dem Überbau der Iterationsschleife in den Zeilen 71 bis 76.

Nachdem in den Subroutinen *init* und *wind* alle Inputvariablen initiert, das Windgeschwindigkeitsgesetz und die Dichteschichtung definiert wurden sowie ein später sehr hilfreicher, aus mehreren Variablen zusammengesetzter Vorfaktor berechnet wird (Zeile 149), ermittelt als erste „Routine ohne Vorwissen“ *kink* die Zuordnung der beiden Kinks im Geschwidigkeitsgesetz zu ihren korrespondierenden Gitterpunkten. Ferner wird darin der ansonsten in *wind* bestimmte Geschwidigkeitsgradient `dvdr(r)` an den beiden Kinks umdefiniert.

Die beiden Subroutinen *resor* und *resol* bestimmen mit dieser Information zu jedem Paar aus Aufpunkt r und einem Kopplungspunkt r' den dazwischenliegenden, zweiten Resonanzort r'' in radialer (*resor*) bzw. lateraler (*resol*) Richtung. Vor allem die laterale Berechnung ist erwähnenswert, denn hier werden die *genauen* Tripel (nicht radial approximiert) von koppelnden Orten unter Ausnutzung einer nichttrivialen Symmetrie in sehr findiger Weise für zwei Fälle gleichzeitig konsistent bestimmt.

taustar berechnet die optische Tiefe der stellaren Verdunkelung durch dazwischenliegende Resonanzflächen in radialer Näherung, wobei ein Faktor eingeführt wird, der den Anteil der durch Resonanzflächen verdunkelten Sternscheibe beschreibt (Zeilen 515 bis 519). Anschließend ermittelt *escape* die Entweichwahrscheinlichkeiten $\beta(r)$ und $\beta_c(r)$, wie sie im Abschnitt 7.1.4 formuliert sind. Ein Winkelintegral mit einer Auflösung von 100 Winkelsegmenten (Zeile 106) wird berechnet, wobei die Integration über die halbe Hemisphäre mitsamt der Sternscheibe verläuft. Am Rand der Sternscheibe wird mit zwei extrem fein aufgelösten Sichtstrahlen sichergestellt, dass dieser Rand gut erkannt wird, damit β_c keine Beiträge von außerhalb des Sterns erhält (Zeilen 212 bis 222). *escape* bedient sich der Function *convoy1*, welche (ebenso wie *convoy2*) die optischen Tiefen τ in β_c bzw. im Integralkern der Resonanzkopplung bestimmt. Diese beiden Functions greifen ihrerseits auf eine weitere namens *esc* zurück und sie bestimmt die zum gegebenen τ gesuchten Entweichwahrscheinlichkeiten. Im Falle sehr kleiner Werte verwendet *esc* eine Taylorreihenentwickung bis zur vierten Ordnung (Zeile 486).

Um nach aller Vorarbeit mit der Iteration der Quellfunktion beginnen zu können, gewinnt die Subroutine *source* einen ersten Startwert für $S(r')$ in (7.46). Drei verschiedene Methoden sind dabei programmiert, jedoch erscheint uns nur Option Nummer 1 (`iso = 1` in Zeile 104) mit ihrem $S = I_* \beta_c/\beta$ sinnvoll. Die letzte große Aufgabe vor der eigentlichen Iteration erledigt die Routine *kern*, in welcher der komplexe Formalismus für den Rybicki-Hummerschen Integralkern (Zusammenführung der Resonanzbedingung mit der Konstanz des Impactparameters bei r und r') - jedoch generalisiert für unseren Fall der Dreipunktkopplung - umgesetzt wird.

Mit der in *kern* bestimmten Matrix `ker(i,j)` mit i und j als Code-Repräsentationen für r und r' berechnet die Subroutine *iteration* schließlich zu jedem Wert $S(r)$ das Integral

$\int dr'\, ker(r,r') \cdot S(r')$. Alles links vom Multiplikationszeichen entspricht folglich dem in (7.46) eingeführten Λ-Operator. Die Iteration wird beendet, sobald sich aufeinanderfolgende Iterationsschritte um weniger als einen voreingestellten Genauigkeitswert (Zeile 107) voneinander unterscheiden. Eine Meldung wird in die Fehlerdatei geschrieben, sollten zwischen zwei Iterationsschritten zu große Korrekturen auftreten (Zeile 578).

Ist die Iteration der Quellfunktion konvergiert und hat sie eine Maximalzahl von Iterationen nicht überschritten, wird mittels *gline* die Strahlungskraft im Verhältnis zur Linienkraft in klassicher Einpunkt-Sobolevnäherung berechnet. *finish* sorgt zuletzt für ein ordnungsgemäßes Programmende, indem sie die Daten (Gitterpunkt i, Ort r, Geschwindigkeit $v(r)$, iterierte Quellfunktion $S(r)$, Anfangsquellfunktion $S_0(r)$, Linienkraft-Korrekturfaktor $g_{cor}(r)$) in das Datenfile schreibt (Zeile 615) und alle geöffneten Dateien schließt.

Kapitel 8

Ergebnisse

Mit Hilfe des im Zuge dieser Diplomarbeit programmierten Algorithmus wurde die Quellfunktion $S(r)$ berechnet. Durch Iteration der im Kapitel 7 hergeleiteten Gleichungen konnte $S(r)$ im Verlauf von maximal 4 Iterationen bis zur verlangten Genauigkeit von 1 % bestimmt werden. Anschließend wurde die Linienstrahlungskraft $g_l(r)$ bestimmt. Auf den folgenden Seiten stellen wir die gewonnenen Ergebnisse dar und interpretieren sie kritisch.

8.1 Quellfunktion $S(r)$ für eine Linie

Wir stellen zunächst ausführlich die Ergebnisse der Iteration der Quellfunktion $S(r)$ dar, welche mittels des im Zuge dieser Diplomarbeit programmierten FORTRAN 90-Programmes *siter.f90* durchgeführt wurde.

Abbildung 8.1 stellt in in zwei Fällen den Verlauf der initialen Quellfunktion $S_0(r)$ (gestrichelte Linie) als auch der iterierten, konvergierten Quellfunktion $S(r)$ (durchgezogene Linie) als Funktion der Entfernung r vom Sternmittelpunkt dar. Bei zwei verschiedenen Werten des im Programm freien Parameters kv, welcher der Opazität κ entspricht, wurde jeweils die Startquellfunktion $S_0(r)$ mittels $S_0 = \beta_c/\beta$ berechnet und anschließend iteriert.

Im oberen Panel von Abbildung 8.1 sind $S_0(r)$ und $S(r)$ bei sehr kleiner Opazität des Windgases dargestellt ($kv = 10^{-2}$). Ganz offensichtlich hat bei diesen geringen Opazitäten die nichtlokale Strahlungskopplung im betrachteten sphärisch symmetrischen und nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld keinerlei Wirkung. Das verwundert nicht, weil der gesamte Wind nahezu transparent ist und keine Streuung von Photonen stattfindet. Aus diesem Grunde gibt es auch keine radiativ miteinander koppelnden Orte, alle Photonen propagieren völlig ungehindert durch den gesamten Wind.

Die Start-Quellfunktion $S_0(r)$ und die iterierte Quellfunktion $S(r)$ haben einen identischen Verlauf. S_0 wird mittels

$$S_0 = \frac{\beta_c}{\beta} \tag{8.1}$$

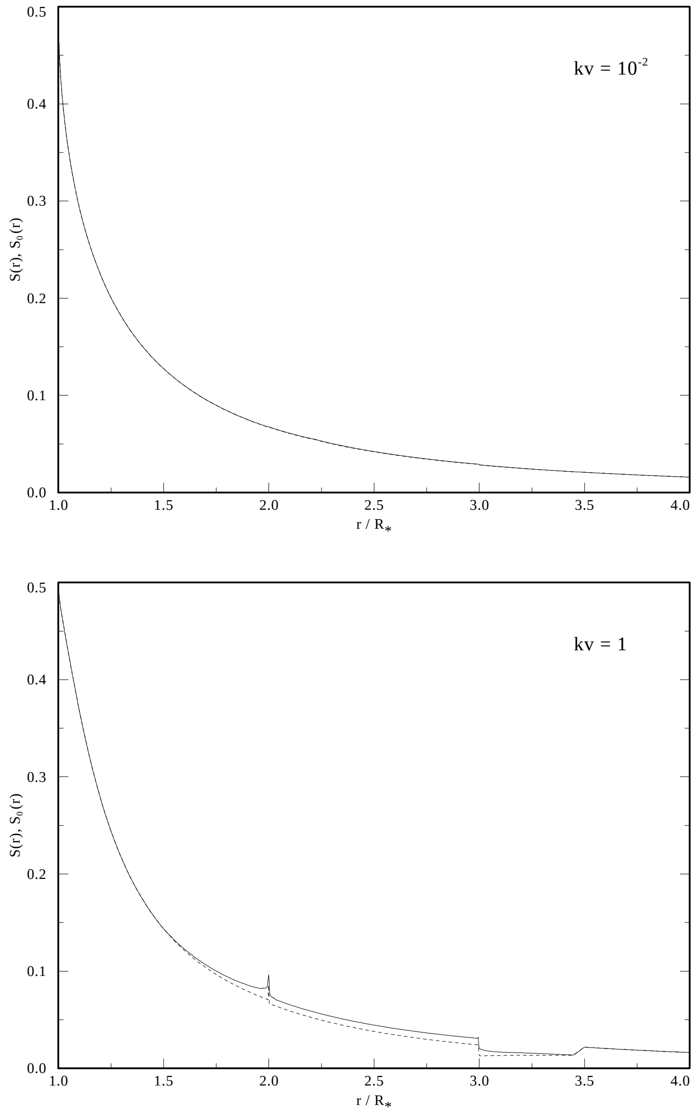

Abbildung 8.1: Die iterierte Quellfunktion $S(r)$ bei zwei verschiedenen Werten des Parameters kv (entspricht κ). Geplottet sind jeweils die iterierte, konvergierte Quellfunktion $S(r)$ (durchgezogene Linie) sowie die initiale Quellfunktion $S_0(r)$ (gestrichelte Linie).

berechnet und mit den Ausdrücken für β_c aus (7.19) sowie β aus (7.20) ergibt sich

$$S_0 = \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_c} d\Omega \, e^{-\bar{\tau}''} \, e^{-\bar{\tau}'} \, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right) \Bigg/ \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} d\Omega \, \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right) . \tag{8.2}$$

Unter Beachtung von $\tau = \kappa \, \eta$ wissen wir, dass mit $\kappa \to 0$ auch $\tau \to 0$ geht. Deswegen liefern die beiden Exponentialfunktionen in β_c eins. Ferner wissen wir aus (4.18) und (4.19), dass $(1 - e^{-\tau})/\tau$ gegen 1 geht, falls $\tau \ll 1$. Damit bleibt in (8.2) das folgende

Verhältnis von Winkelintegralen übrig

$$S_0 = \frac{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_c} d\Omega}{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} d\Omega} = \frac{\frac{1}{4\pi}\,\Omega_c}{\frac{1}{4\pi}\,4\pi} = \frac{\Omega_c}{4\pi}\,. \tag{8.3}$$

Dieses Ergebnis entspricht jedoch exakt dem *dilution factor* W aus (6.32). Demnach fällt die Quellfunktion im Fall eines optisch sehr dünnen Windes mit dem Verdünnungsfaktor W ab.

Im unteren Panel ist die Situation für eine höhere Opazität ($kv = 1$) abgebildet. Die erste Beobachtung ist, dass sich hierbei $S(r)$ von $S_0(r)$ unterscheidet, jedoch – wie zu erwarten war – nur im Kopplungsbereich des zugrunde liegenden Windgeschwindigkeitsgesetzes (s. Abbildung 5.8), also bei $1.5 < r < 3.5$.

Die Tatsache, dass S höher ist als die Anfangsquellfunktion S_0 lässt sich konsistent dadurch erklären, dass durch die erhöhte Opazität die Gasatome nun einen gewissen Anteil der durch sie hindurch propagierenden Photonen streuen können. Diese Streuung findet ausschließlich in den hauchdünnen Resonanzflächen statt und diese stellen daher neben dem Stern zusätzliche Lichtquellen dar. So kann man in Abbildung 8.1 (unten) beobachten, dass beim ersten Kopplungspunkt ($r = 1.5$) beginnend die iterierte Quellfunktion bis zum Ort des ersten Kinks (bei $r = 2$) gegenüber S_0 ansteigt. Dies lässt sich leicht durch einen Blick auf die Bilder $r = 1.51$ bis $r = 1.93$ in der Bildsequenz B.6 im Anhang B.1 verstehen. Mit zunehmender Annäherung an den Ort des ersten Kinks wächst die jenseits des Ortes r gelegene Resonanzfläche. Ihr Beitrag zur Quellfunktion am Ort r wird demnach immer größer und r erfährt neben der intrinsischen Beleuchtung durch den Stern auch Illumination von den leuchtenden Resonanzflächen.

Sobald r den Ort des Kinks bei $r = 2$ überschritten hat (das entspricht in etwa Bild $r = 2.07$ in Abbildung B.6), befindet sich ein Teil des Resonanzflächensystems zwischen ihm und dem Stern, sodass der Stern abgeschattet wird. Wir erwarten also unmittelbar hinter dem Kink in der Quellfunktion $S(r)$ einen Sprung nach unten. Tatsächlich ist ein solcher in Abbildung 8.1 bei $r = 2$ erkennbar.

Zwischen den Kinks spüren Atome am Ort r die Beleuchtung durch zwei Resonanzflächen und den Stern selbst, wobei eine der Flächen diesen weiterhin abschattet. Die konvergierte Quellfunktion fällt in diesem Bereich parallel zur initialen Quellfunktion S_0. Offenbar halten sich in diesem Gebiet die zusätzlichen Beleuchtungen mit der abfallenden Leuchtkraft des Sterns genau die Waage, wohlgemerkt auf einem höheren Niveau als bei der reinen Beleuchtung durch den Stern.

Die nächste interessante Erkenntnis offenbart sich am Ort des zweiten Kinks bei $r = 3$. Wie man den Bildern $r = 2.91$ sowie $r = 3.05$ aus Abbildung B.6 entnehmen kann, verschwindet am zweiten Kink die sternabgewandt liegende Teilresonanzfläche und befindet sich anschließend zusammen mit der den Stern bereits abschattenden ersten Fläche zwischen dem Stern und r. Am Resonanzort selbst wird der Stern durch beide Flächen gleichzeitig verdunkelt. Obgleich die Resonanzflächen auch in diesem Fall Leuchtquellen darstellen, ist klar, dass sie niemals mehr Licht zum Ort r hin streuen können, als sie ihm durch Absorption des Sternlichtes vorenthalten. Es ist daher auch am zweiten Kink ein Sprung der Quellfunktion $S(r)$ nach unten zu vermuten. Die Ergebnisse der Simulation sind mit den Erwartungen konsistent.

Im letzten Abschnitt des radiativ gekoppelten Bereiches zwischen dem zweiten Kink ($r = 3$) und dem letzten Kopllungspunkt im Wind ($r = 3.5$) verringert sich der Einfluss der zwischen r und dem Stern liegenden Resonanzflächen, sodass sich die Quellfunktion wieder langsam der Startapproximation nähert. Auffällig ist dabei, dass im allerletzten Teilstück des Resonanzbereiches (ca. $3.4 < r < 3.5$) das Anwachsen von $S(r)$ erkennbar schneller vonstatten geht als seit der Überschreitung des zweiten Kinks. Ein Blick auf die letzten vier Bilder der Bildsequenz B.6 macht den Grund dafür klar: nach Überschreitung des zweiten Kinks bei $r = 3$ verändert sich zunächst die Form der gesamten Resonanzfläche, ihre laterale Ausdehnung und damit ihre Abschattungsfähigkeit hingegen bleiben über einen gewissen Bereich fast konstant. Erst in den letzten Bruchstücken des Kopplungsbereiches schrumpft das Resonanzflächensystem auch lateral und lässt somit mehr Sternlicht ungehindert zum Ort r gelangen. Aus diesem Grund steigt die Quellfunktion am Ort r wieder an.

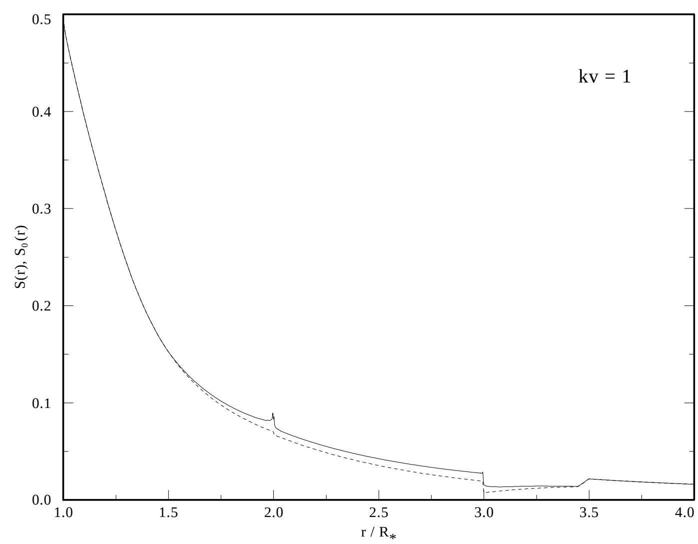

Abbildung 8.2: Die iterierte Quellfunktion $S(r)$ mit angenommener Dichtefunktion $\rho(r) = 1/\{r^2\, v(r)\}$ sowie die entsprechende Startquellfunktion $S_0(r)$. Opazitätsparameter $kv = 1$.

Im eben diskutierten Modell wurde die radiale Dichteschichtung mittels $\rho(r) = 1/r^2$ berechnet. Wir haben auch eine alternative Dichtefunktion $\rho(r) = 1/\{r^2\, v(r)\}$ untersucht und stellen den Verlauf der damit iterierten Quellfunktion $S(r)$ sowie ihrer Startapproximation $S_0(r)$ in Abbildung 8.2 dar.

Der Opazitätsparameter kv hat weiterhin den Wert 1. Ein Vergleich mit Abbildung 8.1 beweist die recht kleinen Konsequenzen der Wahl einer von beiden Dichtefunktionen. Nichtsdestotrotz gibt es qualitative Unterschiede. Unter anderem senkt sich $S_0(r)$ bei $\rho(r) = 1/\{r^2\, v(r)\}$ am zweiten Kink ($r = 3$) merklich stärker ab als im Falle der geschwindigkeitsunabhängigen Dichteverteilung.

Wir diskutieren hier weiterhin die Ergebnisse mit dem ersten Dichteverlauf $\rho(r) = 1/r^2$. Sehr interessant ist die relative Änderung der iterierten Quellfunktion $S(r)$ gegenüber ihrer Startnäherung $S_0(r)$ im gesamten Kopllungsbereich. Abbildung 8.3 zeigt hierzu die prozentuale Abweichung $100 \cdot \{S(r) - S_0(r)\}/S_0(r)$ als Funktion des Ortes r. Diese Darstellung unterstreicht nochmals das weiter oben Gesagte und man sieht, wie die relative Abweichung beider Quellfunktionen bis zum ersten Kink deutlich anwächst. Anschließend springt sie stark nach unten, um im gesamten Gebiet zwischen beiden Kinks nahezu linear anzuwachsen. Zwar haben S und S_0 in diesem Beireich einen parallelen Verlauf, jedoch nimmt die absolute Höhe ihrer Werte ab. Deswegen steigt die relative Abweichung weiter an.

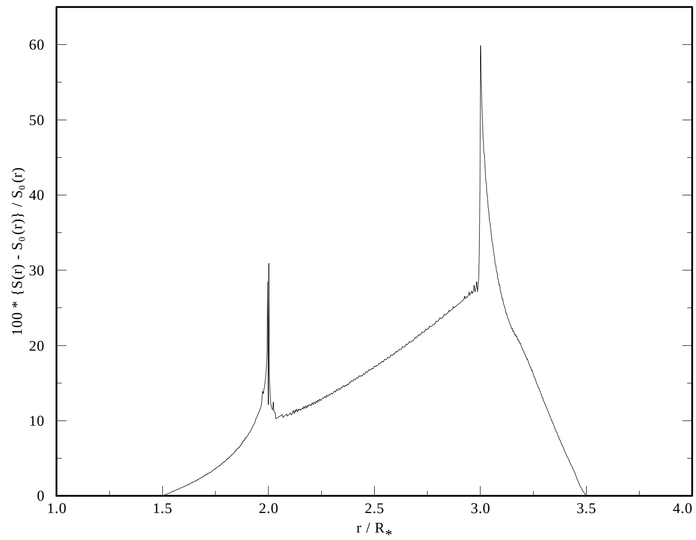

Abbildung 8.3: Prozentuale Abweichung von $S(r)$ gegenüber $S_0(r)$. Im gesamten Kopllungsbereich $1.5 < r < 3.5$ liegt die iterierte, konvergierte Quellfunktion $S(r)$ über der Anfangsquellfunktion $S_0(r)$.

Der hohe Peak von $(S - S_0)/S_0$ am zweiten Kink ist eine Folge des in Abbildung 8.1 erkennbaren, in S und S_0 unterschiedlich starken Sprungs nach unten. Die anschließende Wiederannäherung beider Quellfunktionen bewirkt den steilen Abfall der relativen Abweichung jenseits des zweiten Kinks. Insgesamt weist die mittels *siter.f90* berechnete, radiativ gekoppelte Quellfunktion $S(r)$ Abweichungen von bis zu 50 % gegenüber der gewöhnlichen Sobolevtheorie mit Einpunktkopplung auf.

8.2 Linienstrahlungskraft g_l

Mit bekannter Quellfunktion $S(r)$ ist die Berechnung der Linienkraft $g(r)$ möglich. Wir haben hierbei eine Kalkulation des Verhältnisses von $g(r)$ im Regime der double surfaces gegenüber der Linienkraft bei Einpunktkopplung und radialer Näherung gewählt, um eine saubere Schnittstelle für den späteren Anschluss des Programmes an die numerische Hydrodynamik zu ermöglichen. Diese liefert bisher die Kraft $g_{rad}^{single}(r)$, sodass ihre Korrektur vermöge des hier berechneten Faktors sinnvoll erscheint.

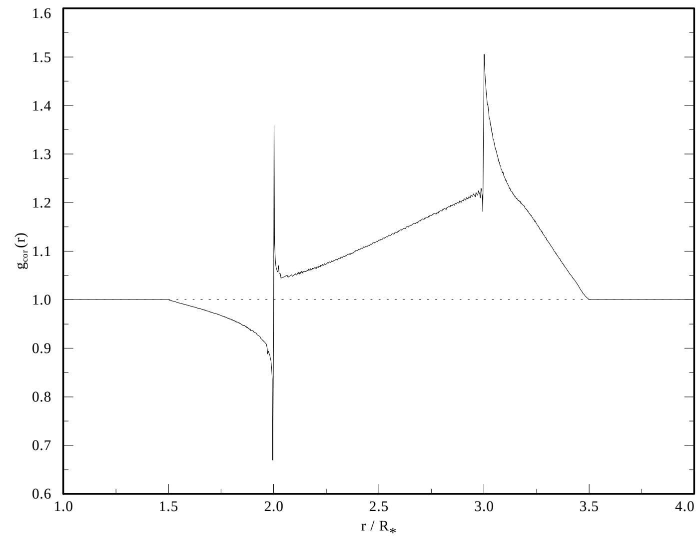

Abbildung 8.4: Korrekturfaktor $g_{cor}(r)$ der Linienkraft $g_l(r)$ als Funktion von r . Die Korrekturen sind gegenüber der radial genäherten Linienkraft bei Einpunktkopplung gemeint. Opazitätsparameter $kv = 1$.

Abbildung 8.4 stellt den Verlauf der berechneten Linienkraft $g(r)$ als Korrekturgröße $g_{cor}(r)$ über r dar. Die Vergleichskraft ist auf eins normiert. Es zeigt sich, dass die vorhandene Kraft zwischen erstem Kopllungspunkt und erstem Kink geringer wird. Sie springt unmittelbar hinter dem ersten Kink nach oben und liefert einen zusätzlichen beschleunigenden Beitrag bis zum Ende des Kopplungsbereichs. Ihr absolutes Maximum erreicht die neuberechnete Kraft kurz vor bzw. direkt am zweiten Kink, denn dort ist die relative Änderung der iterierten Quellfunktion gegenüber $S_0(r)$ am größten.

Die in 8.4 erkennbaren, extrem schmalen Peaks an beiden Kinks weisen auf die nichtsobolevsche Natur des Quellfunktionproblems an den Orten der Kinks hin. Es war durchaus zu erwarten, dass an Knicken im Geschwindigkeitsfeld, also an Unstetigkeiten in dv/dr, Effekte auf Längenskalen auftreten, die kleiner sind als die Sobolevlänge L. Die in (4.1) niedergeschriebene Beziehung kann am Kink mangels eines definierbaren Geschwindigkeitsgradienten dv/dr nicht erfüllt werden. Damit fällt die grundlegendste Annahme der Sobolevnäherung - die endliche, jedoch sehr kleine Dicke der Sobolevzone - unter Umständen weg.

Alle erhaltenen und hier dargestellten Ergebnisse sind - soviel kann behauptet werden - konsistent mit den theoretischen Vorhersagen und können als sehr zufriedenstellend bezeichnet werden. Sie scheinen vielversprechendes Potential des in dieser Arbeit weiterentwickelten Formalismus sowie des programmierten Codes zu offenbaren.

8.3 Quellfunktion und Linienkraft für viele Linien

Die in Abschnitt 8.1 dargestellten Ergebnisse beschreiben die Quellfunktion $S(r)$ sowie die Linenkraft $g(r)$ für genau eine treibende Linie, gelten also bei einem festen Wert von κ. Offensichtlich hängt auch die Quellfunktion selbst von κ ab, denn wie man in Abbildung 8.1 gut erkennen kann, verändert sich der Verlauf der Anfangs-Quellfunktion $S_0(r)$ bei Variation des Programmparameters kv (er entspricht κ).

Um die Quellfunktion im Regime von vielen treibenden Linien zu erhalten, sollte man an alle mit der Opazität behafteten Größen κ als Index schreiben und den Iterationsalgorithmus für jeden Wert von κ (idealerweise für eine gesamte Linienverteilungsfunktion $N(\kappa)$) durchführen. Die Beiträge jeder einzelnen Opazität aus der Linienliste würden dann summiert werden. Ebenso muss bei der Behandlung der Strahlungskraft verfahren werden. Allgemein formuliert lautet die Summenformel für die totale Linienkraft

$$g_L(r) = \sum_{i=1}^{n} g_{l_i}(r)\, S_i(r) \tag{8.4}$$

mit i als Listenindex der Opazität und $S_i(r)$ der für das jeweilige i separat iterierten Quellfunktion am Ort r. Mit n sei eine (willkürliche) maximale Opazität aus der Linienverteilungsfunktion $N(\kappa)$ bezeichnet.

Unsere gegenwärtigen Arbeiten zu diesem Thema sind fortgeschritten, jedoch noch nicht in allen Punkten konsistent. Wir verzichten deshalb auf ihre Veröffentlichung an dieser Stelle.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Motivation und Zielsetzung

In den letzten Jahren häuften sich Hinweise, dass die radial abströmenden, durch Linienstrahlungsdruck beschleunigten Winde heißer, massereicher Sterne nichtmonotone Geschwindigkeitsfelder haben können. Nach anfänglicher Beschleunigung bremst der Wind über einen breiten Radiusbereich ab und erreicht sodann höhere Geschwindigkeiten durch die wieder ansteigende Beschleunigung.

In stark beschleunigten Winden mit monotonem Geschwindigkeitsfeld können Photonen wegen der Dopplerschen Rotverschiebung nur in einem engen radialen Bereich, der sogenannten Resonanzfläche, in einer Spektrallinie gestreut werden. In einem nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld kommt es dagegen zu Mehrfachstreuung zwischen gegebenenfalls weit entfernten Orten und damit zu nichtlokaler Strahlungskopplung.

Diese Mehrfachkopplung wird in bisherigen hydrodynamischen Simulationen der Winde massereicher Sterne nicht berücksichtigt. Jedoch formulierten Rybicki und Hummer (1978, RH im Folgenden) einen Formalismus, mit dem die Strahlungs-Quellfunktion bei wechselseitiger Beleuchtung von Resonanzflächen durch Iteration bestimmt werden kann. Dies wird von den Autoren insbesondere für den Fall von Zweipunktkopplung in monoton fallenden Geschwindigkeitsfeldern explizit entwickelt.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit sollte der RH-Formalismus auf den Fall von Dreipunktkopplung in monoton wachsenden Geschwindigkeitsfeldern mit breitem Abbremsbereich erweitert und in einem FORTRAN-Programm für künftige hydrodynamische Simulationen bereitgestellt werden. Es werden nur radiale Geschwindigkeitsfelder $v(r)$ der Form Beschleunigung-Abbremsung-Beschleunigung betrachtet. Sphärische Symmetrie wird vorausgesetzt. Die beiden Übergänge zwischen Beschleunigung und Abbremsung werden als echte Knicke in $v(r)$ angenommen, wie auch in numerischen Simulationen gefunden. Solche Geschwindigkeitsgesetze mit zwei Abknickpunkten werden 2-Kink-Gesetze genannt.

9.2 Diese Arbeit

In der vorliegenden Diplomarbeit wurden folgende Aufgaben und Fragestellungen bearbeitet.

1. Es wurden zwei Verfahren programmiert, welche die Geometrie von Resonanzflächen für beliebige Geschwindigkeitsfelder (nicht nur 2-Kink-Gesetze) bestimmen. Hiermit könnte bereits die RH-Iteration der Quellfunktion nach Winkelintegration der Strahlungsintensität durchgeführt werden.

2. Nach genauem Studium der Resonanzflächengeometrie zeigte sich jedoch, dass die Winkelintegration wie bereits bei RH in ein radiales Ortsintegral umgewandelt werden kann. *Alle* Radien, die hierbei auftreten (z.B. Integrationsgrenzen, Beginn der Abschattung einer Resonanzfläche durch eine andere), können analytisch berechnet werden, ohne die vollständige Resonanzfläche zu kennen. Die geometriefreie Formulierung des Iterationsschemas kann somit von Zweipunktkopplung (RH) direkt auf Dreipunktkopplung (diese Arbeit) erweitert werden.

3. Im Gegensatz zur universellen „Fisch“topologie der Zweipunktkopplung kommt es bei Dreipunktkopplung zu zwei verschiedenen Geometrien: der 8-Topologie sowie der 0-Topologie mit disjunktem Kopplungs-Aufpunkt. Die Kopplungstripel werden unter Ausnutzung von Symmetrien konsistent bestimmt (siehe z.B. Zeile 302 im Quellcode von *siter.f90* (siehe Anhang C.4): `ire(ire(i,1),1) = min(i,j)`). Wie beim RH-Fisch gibt es zwei Resonanzpunkte nahe der azimutalen Richtung, jedoch drei Resonanzpunkte nahe der radialen Richtung.

4. Ein wesentlicher neuer Aspekt dieser Arbeit zur Dreipunktkopplung ist die Behandlung der Abschattung einer Resonanzfläche durch eine andere. Trivialerweise kann dies bei Zweipunktkopplung nicht auftreten.

4a. Wir konnten zeigen, dass diese Abschattung beim Radius des ersten bzw. zweiten Knickes von $v(r)$ einsetzt. Diese *Kinks* sind Eigenschaften des radialen v-Feldes und Kenntnis der Resonanzflächengeometrie ist eben nicht erforderlich.

4b. Wir konnten den RH-Formalismus auf den Fall eines zwischen dem Resonanzort r und seinem Kopplungspunkt r' liegenden Abschattungspunktes r'' erweitern. Die optische Tiefe bei r'' wird durch einen Nullstellen-Suchalgorithmus und Ausnutzung einer nichttrivialen Symmetrie der Kopplungsmatrix bestimmt.

5. Der Iterationsalgorithmus für die Quellfunktion $S(r)$ wurde in FORTRAN 90 programmiert und findet sich als Quellcode *siter.f90* in Anhang C.4. Das Programm nimmt als Input das Geschwindigkeitsfeld $v(r)$ und die Dichteschichtung $\rho(r)$ des Windes auf einem diskreten Gitter $r(i)$ entgegen und liefert als Output die konsistente Strahlungskraft des Windes bei Dreipunktkopplung. Man beachte die Einschränkung auf 2-Kink-Geschwindigkeitsfelder; für allgemeine n-Punkt-Kopplung ist nach unserem heutigen

Kenntnisstand noch keine geometriefreie Formulierung möglich.

6. Mit diesem Programm *siter.f90* wurden die Quellfunktion $S(r)$ und die Linienkraft (pro Masse) $g(r)$ im Falle von Dreipunktkopplung berechnet. Die Änderungen gegenüber S und g der gewöhnlichen Sobolevtheorie bei Einpunktkopplung liegen für starke Linien $(kv = 1)$ zwischen 0 und +50 % für S sowie zwischen −20 % und +50 % für g.

9.3 Ausblick

Dank Diplomarbeit sind Mittel bereitgestellt, künftig hydrodynamische Simulationen von Sternwinden mit Mehrfachkopplung durchzuführen. Dies sollten die nächsten Schritte sein:

1. Die Linienkraft muss für ein statistisches Ensemble von Spektrallinien formuliert werden, welches den Wind treibt. Diese Arbeit ist größtenteils abgeschlossen, aber noch nicht in `siter.f90` implementiert.

2. Das aktuelle $v(r,t)$ einer zeitabhängigen hydrodynamischen Windsimulation wird im allgemeinen kein 2-Kink-Geschwindigkeitsfeld sein, sondern kann mehrere Abbremsbereiche haben. Hier ist ein geeigneter Näherungsalgorithmus zu entwickeln, der das aktuelle Geschwindigkeitsfeld unter Beibehaltung der wesentlichen Physik in 2-Kink-Form bringt, womit dann die Quellfunktion iteriert werden kann. Diese Aufgabe ist nicht trivial, weil der Output von *siter.f90*, die Strahlungskraft, nur mit dem genäherten 2-Kink-Geschwindigkeitsfeld konsistent ist, nicht aber mit dem aktuellen $v(r,t)$ der hydrodynamischen Simulation.

3. Das Ausbreitungsverhalten von „Plateaus“ (der eingebürgerte Name für nahezu horizontale Abbremsbereiche) im Geschwindigkeitsfeld des Windes soll studiert werden. Plateaus treten regelmäßig in Windsimulationen auf und sind ein Aspekt des fundamentalen strahlungsakustischen Modes des Windes, der sogenannten Abbottwellen. Ein teilweise ungelöstes Problem der liniengetriebenen Winde ist die beobachtete *langsame* Propagation der sogenannten *discrete absorption components* durch ungesättigte P Cygni Linienprofile. Es sollte untersucht werden, ob Mehrfachstrahlungskopplung zur Klärung der langsamen Propagation beitragen kann.

4. Noch fundamentaler ist die Frage, wie sich die kritische Natur der Winde bei Mehrfachkopplung darstellt. Liniengetriebene Winde durchlaufen einen kritischen Punkt, an dem die Machzahl für Abbottwellen eins wird, ganz analog zur Strömung durch die Lavaldüse, zum Sonnenwind und zu magnetischen Winden von Akkretionsscheiben (mit dem Alfvénpunkt und den kritischen Punkten des langsamen und schnellen magnetosonischen Modes). Am kritischen Punkt verlieren Wellen die Möglichkeit, mit der Windbasis zu „kommunizieren“. Die stationäre Massenverlustrate des Windes muss unterhalb des kritischen Punktes reguliert werden, weil sie oberhalb desselben nicht mehr korrigiert werden

kann (zumindest nicht durch lineare Wellen). Behält diese Aussage ihre Gültigkeit, wenn es zu instantaner (oder, in Realität, wenigstens sehr schneller) Strahlungskopplung zwischen Mehrfachresonanzorten kommt? Wenn Photonen also von großen Entfernungen zu Resonanzflächen nahe der Windbasis zurückgestreut werden und Information übertragen können? Man beachte hierbei, dass die Wellengeschwindigkeit des Strahlungsmodes wie schon die Alfvéngeschwindigkeit prinzipiell wenig mit der Lichtgeschwindigkeit korreliert, sondern sehr viel kleiner als diese sein kann.

5. Schließlich soll der hier vorgestellte Formalismus mit dem in vielen Aspekten komplementären SSF-Formalismus von Owocki (1991) und EISF-Formalismus von Owocki & Puls (1996) verglichen und mit diesen gekoppelt werden. Im SSF- und EISF-Formalismus wird bei der Berechnung der optischen Tiefe τ keine Sobolevnäherung angenommen, sondern τ durch Mehrfachresonanzen hindurch numerisch exakt aufsummiert. Im SSF-Formalismus wird dann zur Berechnung der Strahlungskraft eine rein lokale, sobolevsche Quellfunktion benutzt. Im EISF-Formalismus wird τ (nach Durchlaufen von Mehrfachresonanzen) zur Berechnung von Entweichwahrscheinlichkeiten und damit der Quellfunktion herangezogen. Jedoch wird S nicht iteriert, die Streuung der Photonen zwischen den Resonanzorten folglich nicht berücksichtigt. Im RH-Formalismus wird dagegen eine konsistente Quellfunktion mittels Iteration bestimmt, doch wird τ (trotz Mehrfachkopplung) sowie das Frequenzintegral innerhalb der Linie nur in Sobolevnäherung berechnet. Eine Kopplung von SSF/EISF mit dem hier vorgestellten Formalismus scheint also naheliegend.

Anhang A

Verwendete Konstanten

Die folgenden physikalischen Konstanten, Größen und Dimensionen fanden bei den in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Berechnungen Verwendung.

SI-Einheiten	Gauß'sche Einheiten	
$G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m^3/\,kg\,s^2}$	$6.673 \cdot 10^{-8}$ $\mathrm{cm^3/\,g\,s^2}$	Gravitationskonstante
$k = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K	$1.381 \cdot 10^{-16}$ erg/K	Boltzmann-Konstante
$m_H = 1.674 \cdot 10^{-27}$ kg	$1.674 \cdot 10^{-24}$ g	Masse des Wasserstoffatoms
$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$ kg	$1.673 \cdot 10^{-24}$ g	Masse des Protons
$\sigma_T = 6.653 \cdot 10^{-29}$ $\mathrm{m^2}$	$6.653 \cdot 10^{-25}$ $\mathrm{cm^2}$	Thomson-Wirkungsquerschnitt
$M_* = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg	$1.989 \cdot 10^{33}$ g	Masse der Sonne
$R_* = 6.960 \cdot 10^{8}$ m	$6.960 \cdot 10^{10}$ cm	Radius der Sonne

Anhang B

Quasianalytische Resonanzflächensuche

B.1 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetz

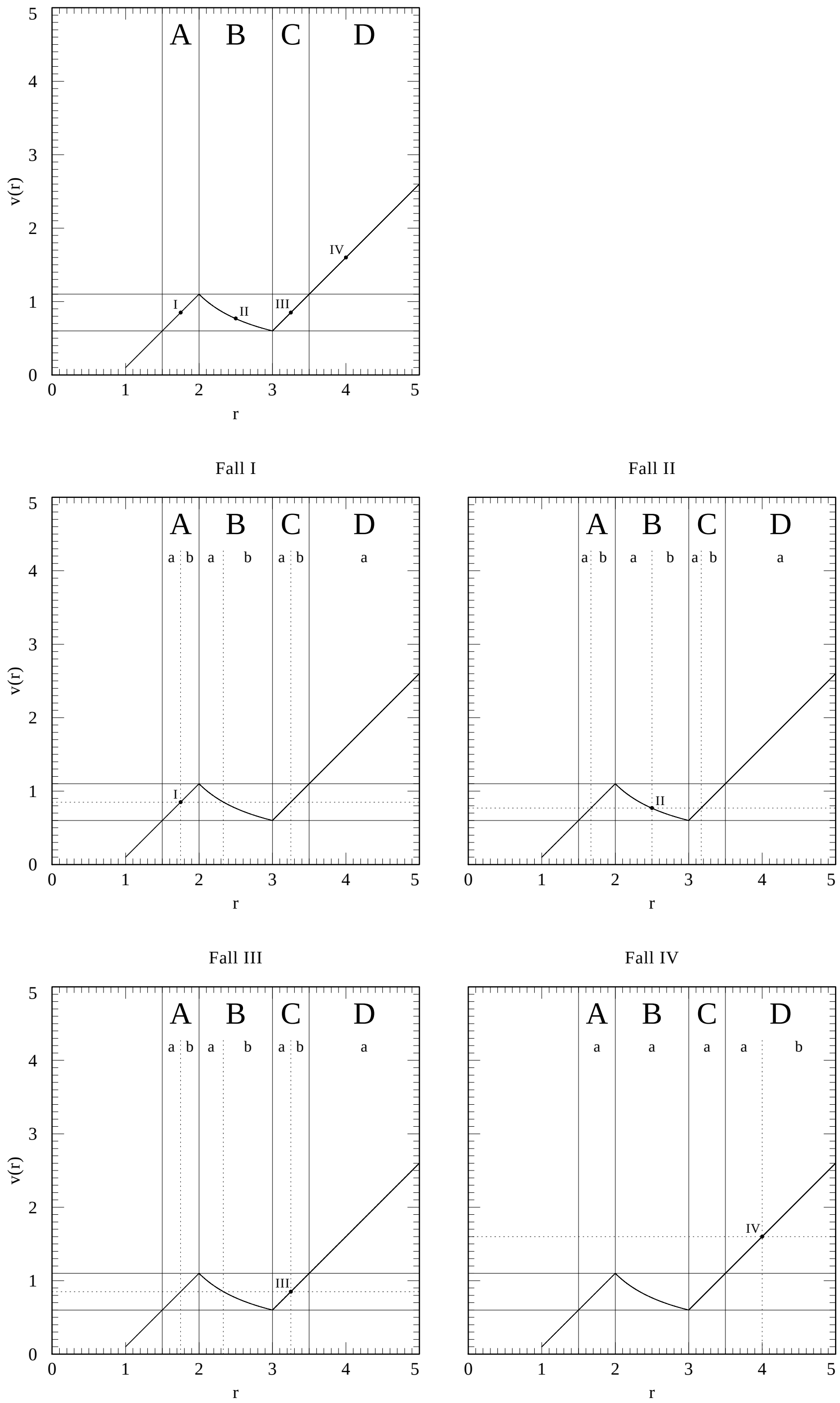

Abbildung B.1: Zur Untersuchung der Resonanzflächenabhängigkeit von r. Von links oben nach rechts unten zeigen die Panels: Einteilung in vier Bereiche A bis D mit den Orten I bis IV, Fall I, II, III und Fall IV.

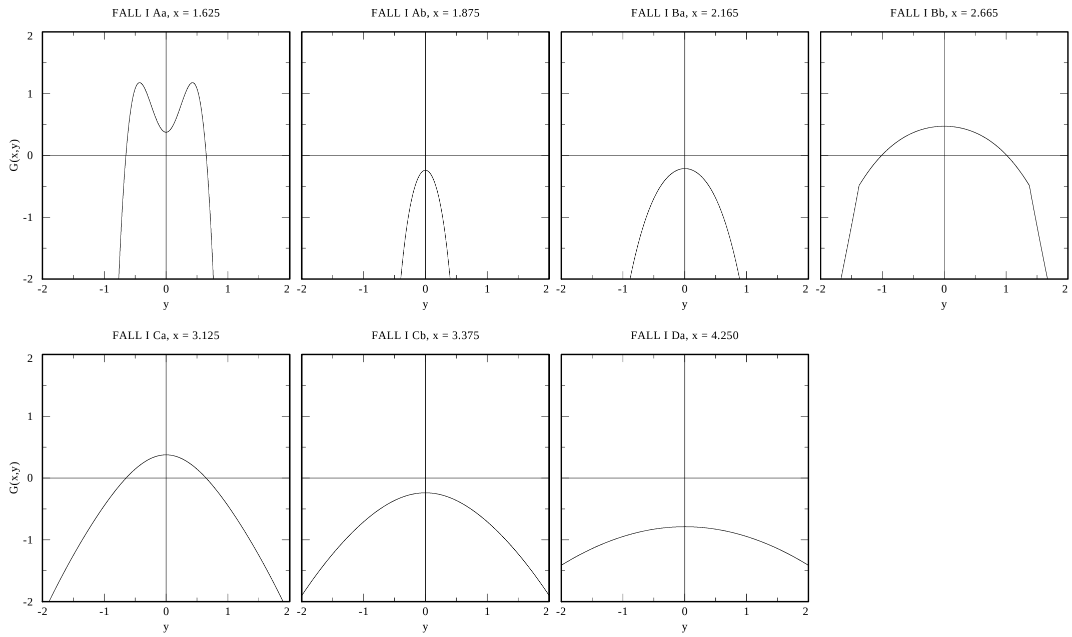

Abbildung B.2: Verlauf von G(x,y) mit 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetz. $r = I = 1.75$. x wird im Wind variiert.

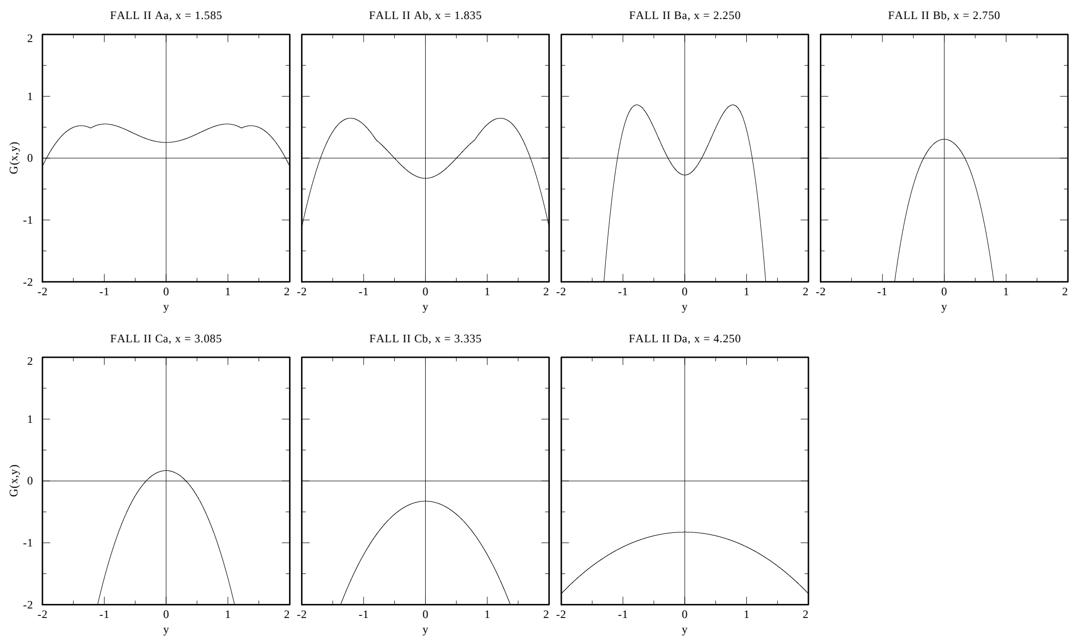

Abbildung B.3: Verlauf von G(x,y) mit 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetz. $r = II = 2.5$. x wird im Wind variiert.

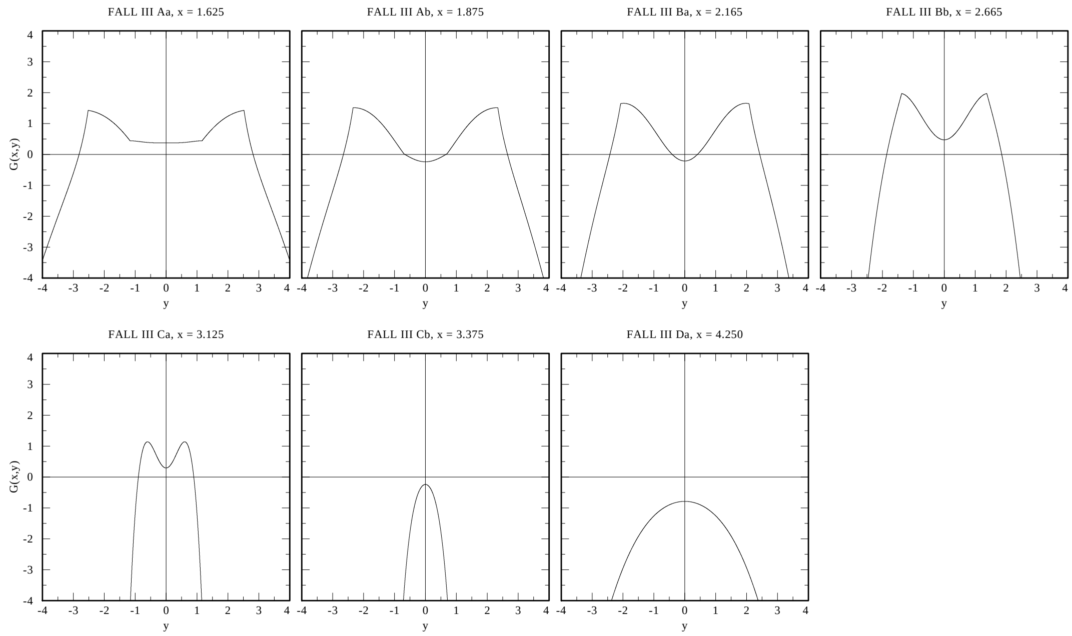

Abbildung B.4: Verlauf von G(x,y) mit 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetz. $r = III = 3.25$. x wird im Wind variiert.

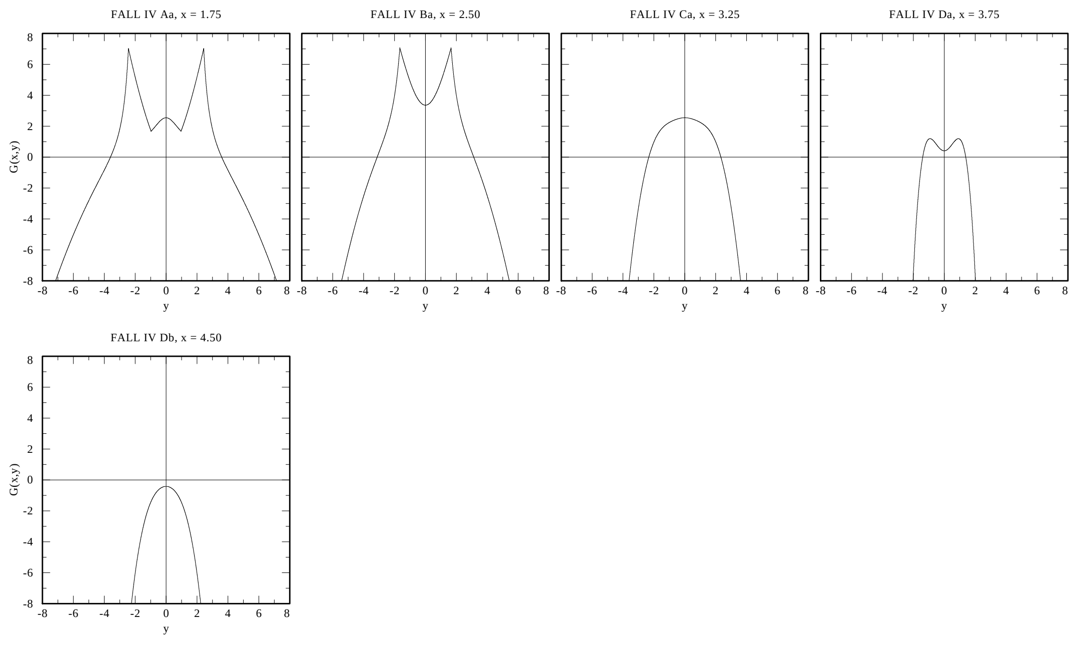

Abbildung B.5: Verlauf von G(x,y) mit 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetz. $r = IV = 4.0$. x wird im Wind variiert.

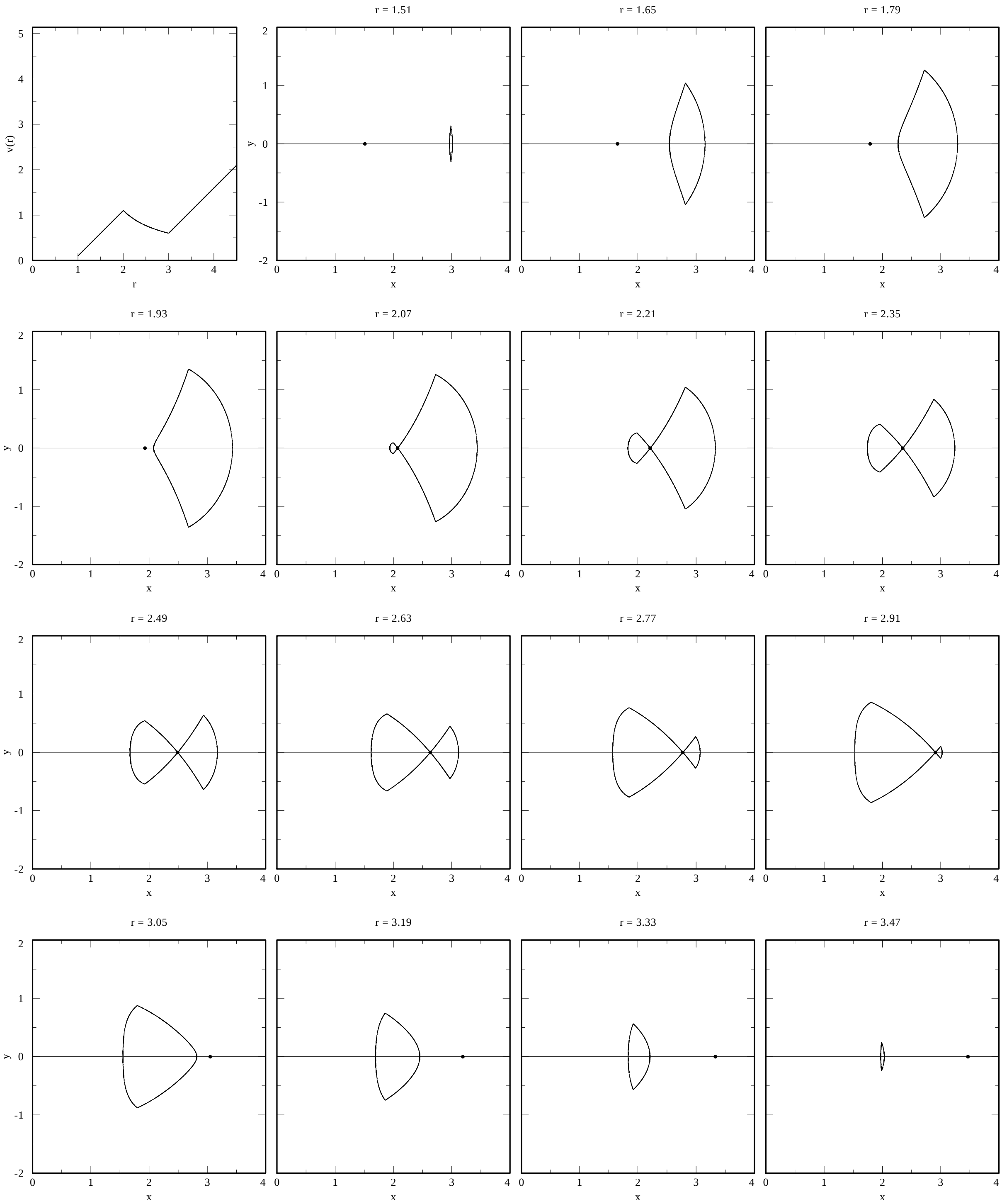

Abbildung B.6: Quasianalytische Resonanzfläche zum 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetz. Mit wachsendem r verändert sich die Topologie der Fläche. Die jeweilige Lage von r ist durch einen keinen Kreis markiert. Links oben: das zugrunde liegende Windgeschwindigkeitsgesetz.

B.2 4-Kink-Geschwindigkeitsgesetz

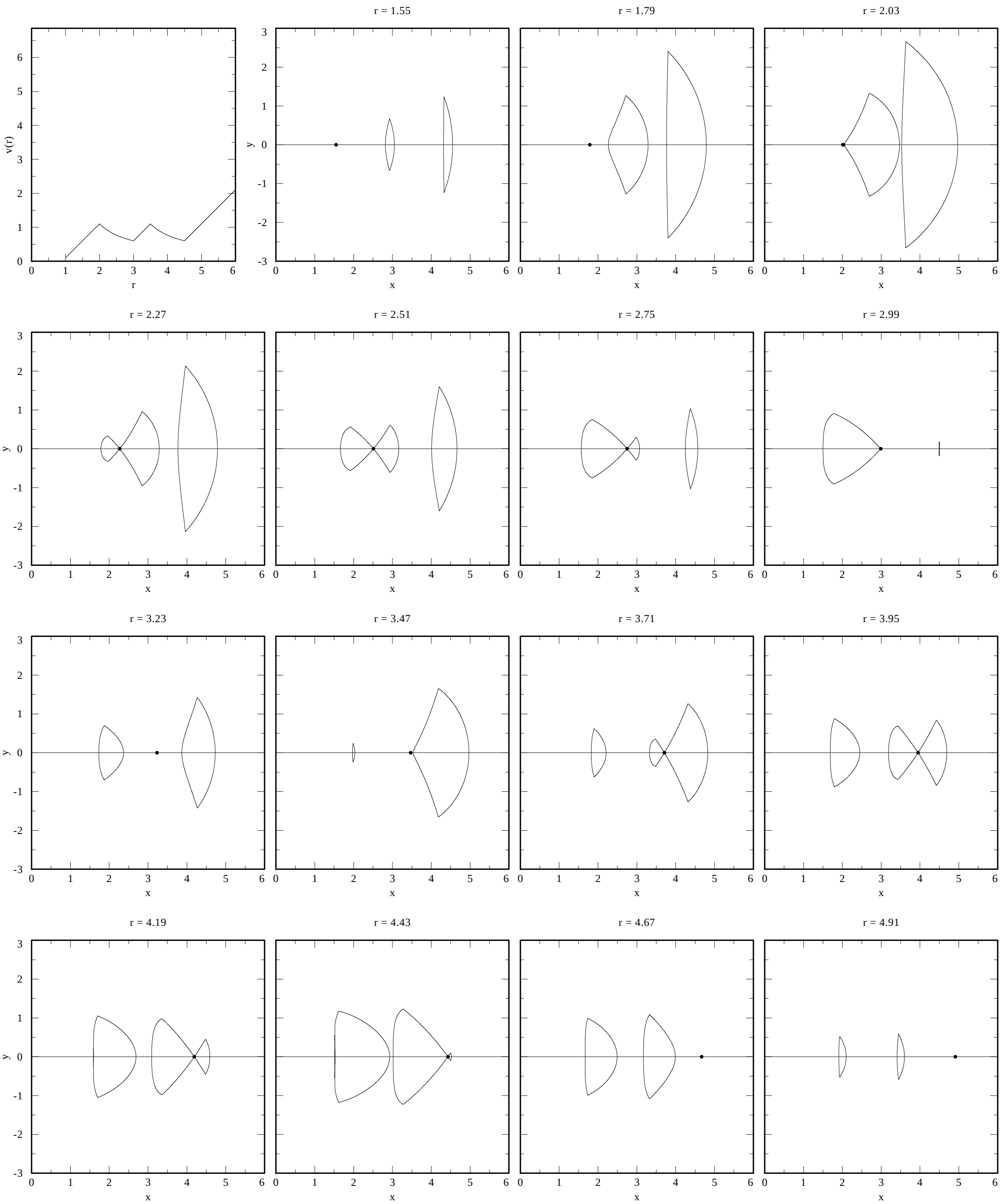

Abbildung B.7: Quasianalytische Resonanzfläche zum 4-Kink-Geschwindigkeitsgesetz. Mit wachsendem r verändert sich die Topologie der Fläche. Die jeweilige Lage von r ist durch einen keinen Kreis markiert. Links oben: das zugrunde liegende Windgeschwindigkeitsgesetz.

Anhang C

Programmlistings in FORTRAN 90

Alle nachfolgend aufgelisteten Quellcodes sind in FORTRAN 90 geschrieben. Es handelt sich um Programme, die ich in der vorliegenden Arbeit zur Durchführung der jeweiligen Berechnungen geschrieben und verwendet habe. Sie sind ausführlich kommentiert, werden jedoch in den betreffenden Kapiteln dieser Diplomarbeit näher erläutert.

C.1 parkerana.f90: Parkerscher Sonnenwind

Das Programm *parkerana.f90* berechnet für das Parkersche Sonnenwindproblem (2.21) zu jedem R ein passendes V, sodass P(V,R) = 0 gilt. Es findet demnach die Nullstellen der Funktion. Die Funktionsweise ist im Abschnitt 2.1.1 erläutert, außerdem ist der folgende Quelltext ausführlich kommentiert.

```
PROGRAM parkerana

!--------------------------------------------------------------------
! Findet die Loesung des Parkerschen Geschwindigkeitsgesetzes fuer
! den Sonnenwind bei festem Wert fuer R durch Intervallbisektion.
! Die fuer jedes R zu loesende Funktion ist
!
!  P(V,R) = V**2 - log(V**2) - 4*R_a/R - 4*log(R/R_a) + 3 = 0
!
! R_a bezeichnet den sog. Schallpunkt - den Ort des Uebergangs zu
! supersonischen Geschwindigkeiten.
!
! F"ur ein festes R sucht das Programm die Nullstelle von P, also
! einen Wert fuer V, der P(V,R) = 0 erfuellt.
!--------------------------------------------------------------------

IMPLICIT NONE
INTRINSIC ABS

! Deklarationen
REAL ra                      ! Ort des Schallpunktes in [r]
REAL rmin,rmax               ! r-Intervallgrenzen
REAL rres                    ! benoetigte r-Aufloesung
REAL r                       ! Laufvariable der v-Loop
REAL v_left,v_right,v_mid    ! v-Intervallgrenzen, Intervallmitte
REAL p_left,p_mid            ! linker/rechter Funktionswert von P
REAL nullstelle              ! gesuchte Nullstelle
REAL eps                     ! zulaessige Ungenauigkeit von v
REAL p                       ! Functions

! Initialisierung
ra = 2.25                    ! r_a = 2.25*R (folgt analytisch)
rmin = 1.0                   ! linke r-Intervallgrenze
rmax = 10.0                  ! rechte r-Intervallgrenze
rres = 0.01                  ! 100 Datenpunkte pro Sonnenradius
eps = 0.00001                ! Geforderte Genauigkeit der Loesungen

! Datenfile zum Schreiben oeffnen
OPEN(5,FILE='parkerana.data',STATUS='UNKNOWN')

!--- r-Loop
!--- Zu jedem r wird ein v gesucht, sodass P(V,r) = 0.
DO r=rmin,rmax,rres

  !--- Wahl der v-Intervallgrenzen
  IF (r < ra) THEN        ! falls unter dem Schallpunkt
    v_left = 0.1
    v_right = 1.0
  ELSE IF (r > ra) THEN   ! falls ueber dem Schallpunkt
    v_left = 1.0
    v_right = 20.0
  ELSE IF (r == ra) THEN  ! im Schallpunkt
    v_left = 1.
    v_right= 1.
  END IF

  !--- Nullstellensuche durch Intervallbisektion
  p_left = p(v_left,r,ra)
  DO WHILE (ABS(v_right - v_left) > eps)
```

```
      v_mid = 0.5 * (v_left + v_right)
      p_mid = p(v_mid,r,ra)
      IF (p_mid == 0.0) EXIT   ! Ausgang fuer exaktes Treffen von p=0.0
      IF (p_left * p_mid < 0.0) THEN
        v_right = v_mid
      ELSE
        v_left = v_mid
        p_left = p_mid
      END IF
    END DO

    nullstelle = 0.5 * (v_left + v_right)
    WRITE (5,*) r,nullstelle  ! Daten ins File schreiben
  END DO   ! Ende r-Loop

  !--- Datenfile schliessen, Programmende
  CLOSE(5)
  END PROGRAM parker

  !----------
  ! Functions
  !----------

  !--- Berechnet den Funktionswert von P aus uebergebenem
  !--- R und V sowie R_a
  FUNCTION p(mv,mr,mra)
  REAL mv,mr,mra
  p = mv**2 - log(mv**2) - 4.*mra/mr - 4.*log(mr/mra) + 3.
  END FUNCTION p
```

C.2 resoquasi.f90: Quasianalytische Resonanzflächensuche

Das Programm *resoquasi.f90* dient zur quasianalytischen Suche nach Resonanzflächen für ein vorgegebenes Geschwindigkeitsgesetz $v(r)$ und einen Resonanzort r. Das Programm, seine Funktionsweise und die damit gewonnenen Ergebnisse sind in Abschnitt 5.1 beschrieben.

```
PROGRAM resoquasi

!---------------------------------------------------------------------
! Berechnet die Nullstellen G(x,y) = 0 der Resonanzflaechenfunktion
!
!   G(x,y) = v^2(r)/v^2(r') + y^2/(r-x)^2 * (r^2/(x^2+y^2) - 1) - 1 = 0
!
! bei gegebenem radialen v(r) und gegebenem x.
! Verwendetes Verfahren zur Nullstellensuche: Intervallbisektion.
!---------------------------------------------------------------------

IMPLICIT NONE
INTRINSIC ABS

!--- Deklarationen
REAL eps,xres               ! zulaessige Abweichung, x-Aufloesung
REAL r,xmin,xmax            ! r, min./max. Wert der x-Loop
REAL y_left,y_right,y_mid   ! y-Intervallgrenzen, Intervallmitte
REAL x,rxdiff               ! Laufvariable x-Loop, Abstand von r zu x
REAL g_left,g_mid           ! linker/mittlerer Funktionswert von g
REAL nullstelle             ! Nullstelle
REAL lastnullstelle         ! vorherige Nullstelle
REAL ns,g,v                 ! Functions

!--- Initialisierung
eps  = 0.000001
r    = 1.34
xmin = 1.01                 ! 0.0 wg. Division durch 0. unmoeglich
xmax = 4.499                ! (willkuerliche) Obergrenze fuer x-Loop
xres = 0.001                ! 1000 Datenpunkte je Sternradius

!--- Datenfile zum Schreiben oeffnen
OPEN(5,FILE='resoquasi.data',STATUS='UNKNOWN')

!--- x-Loop. Zu jedem x wird ein y gesucht, welches
!--- die Bedingung G(x,y) = 0. erfuellt
lastnullstelle = 0.0        ! Zur Erkennung von Spruengen
DO x=xmin,xmax,xres
  rxdiff = ABS(r-x)         ! Abstand von r und x (fuer
                            ! skalenbedingte Intervallgrenzensuche)

  !--- Fall x = r bekannt
  IF (x == r) THEN          ! In dem Fall Nullstelle bei y=0.
    WRITE (5,*) x,0.
    EXIT
  END IF

  ! Nullstelle durch Function ns berechnen
  nullstelle = ns(x,r,rxdiff,eps)

  !--- Daten sparsam ins File schreiben. Parameter evtl. anpassen
  IF (nullstelle < 2.2) WRITE (5,*) x,nullstelle

  !--- Feinere Aufloesung um 0-Durchgaenge der Resonanzflaeche herum.
  IF (ABS(lastnullstelle-nullstelle) > 0.12) &
      CALL nsfine(x,xres,r,rxdiff,eps)

  lastnullstelle = nullstelle    ! Zur Erkennung von Spruengen
END DO   ! Ende x-Loop
```

```

!--- Datenfile schliessen, Programmende
CLOSE(5)
END PROGRAM resoquasi

!------------
! SUBROUTINES
!------------

!--- Im kleinen Intervall um die detektierte Stelle wird mit einer
!--- feineren x-Aufloesung nach Nullstellen gesucht.
SUBROUTINE nsfine(x,xres,r,rxdiff,eps)
IMPLICIT NONE
REAL x,x_fine,xres,r,rxdiff,eps,nullstelle,ns

! feine Aufloesung
DO x_fine=x-7.*xres,x+17.*xres,0.0001         ! Faktor 10 feiner
  nullstelle = ns(x_fine,r,rxdiff,eps)
  IF (nullstelle < 2.2) WRITE (5,*) x_fine,nullstelle
END DO

! sehr feine Aufloesung
DO x_fine=x-1.*xres,x+1.*xres,0.00001         ! Faktor 100 feiner
  nullstelle = ns(x_fine,r,rxdiff,eps)
  IF (nullstelle < 2.2) WRITE (5,*) x_fine,nullstelle
END DO

RETURN
END SUBROUTINE nsfine

!----------
! FUNCTIONS
!----------

!--- Berechnet die zum gegebenen x gehoerende Nullstelle von G
FUNCTION ns(x,r,rxdiff,eps)
REAL x,eps,rxdiff,y_left,y_right,y_mid,g_left,g_mid,ns

!--- y-Intervall festlegen
y_left = 0.                        ! waehle linke y-Intervallgrenze
y_right = y_left
DO WHILE (g(y_left,x,r)*g(y_right,x,r) > 0. .AND. y_right < 8.)
  y_right = y_right + 0.1*rxdiff   ! finde rechte y-Intervallgrenze
ENDDO

!--- Nullstellensuche durch Intervallbisektion
g_left = g(y_left,x,r)
DO WHILE (ABS(y_right - y_left) > eps)
  y_mid = 0.5 * (y_left + y_right)
  g_mid = g(y_mid,x,r)
  IF (g_mid == 0.0) EXIT   ! Ausgang fuer exaktes Treffen von g=0.0
  IF (g_left * g_mid < 0.0) THEN
    y_right = y_mid
  ELSE
    y_left = y_mid
    g_left = g_mid
  END IF
END DO

ns = 0.5 * (y_left + y_right)   ! gesuchte Nullstelle

END FUNCTION ns

!--- Berechnet G mit uebergebenem y, x und r
FUNCTION g(my,mx,mr)
REAL mx,my,mr,sq,vr2,vrprime2,vr,tiny
tiny = 0.0000001
sq = SQRT(mx**2 + my**2)
```

```
vr2 = v(mr)**2
vrprime2 = v(sq)**2
g = vr2 / (vrprime2+tiny) + &
    (my**2/((mr-mx)**2+tiny))*(mr**2/((mx**2+my**2)+tiny)-1.) - 1.
END FUNCTION g

!--- Berechnet die Windgeschwindigkeit am uebergebenen r
FUNCTION v(r)
REAL r,c1,c2,c3,tiny
tiny=0.0000001
! 1/r Geschwindigkeitsgesetz
v = 1. / (a+tiny)
END FUNCTION v
```

C.3 resonum.f90: Numerische Resonanzflächensuche

Das Programm *resonum.f90* sucht rein numerisch nach Resonanzflächen, die aus einem gegebenen Windgeschwindigkeitsgesetz resultieren, wobei der Ort r in Wind frei gewählt werden kann. Im Gegensatz zum weiter oben vorgestellten Programm *resoquasi.f90* werden hier nicht die Nullstellen einer Funktion gesucht, sondern es wird für jeden aufgelösten Punkt der $x-y$-Ebene überprüft, ob die Resonanzbedingung gilt, ob also die projizierten Geschwindigkeiten am Ort r' und am Ort r gleich sind. Die genaue Beschreibung der Methode findet der Leser im Abschnitt 5.2.

```
PROGRAM resonum

!-------------------------------------------------------------------
! Berechnet numerisch die Resonanzflaechen zum vorgegebenen Wind-
! geschwindigkeitsgesetz v(r).
!
! Methode: Ueberpruefe zu jedem Wertepaar (x,y), ob die projizierten
! Geschwindigkeiten bei r und r' "ubereinstimmen.
!
! Gestrichene Groessen erhalten im Code den Zusatz "1", z.B. r' = r1
!-------------------------------------------------------------------

IMPLICIT NONE

! Deklarationen
REAL r,x,y,dx,dy                      ! Laengen
REAL vr                               ! Geschwindigkeiten
REAL v,reso                           ! Funktionen
REAL pi,xmax,ymax,eps,tiny,resook     ! Sonstiges

! Initialisierung
pi   = 3.1415926                      ! Kreiszahl Pi
tiny = 1.0E-7
r    = 1.9                            ! Ort r im Wind
vr   = v(r,tiny)                      ! v(r) gemaess der Function v
xmax = 5.0                            ! max. Wert der x-Loop
ymax = xmax                           ! max. Wert der y-Loop
dx   = xmax / 5000.                   ! Aufloesung in x-Richtung
dy   = ymax / 5000.                   ! Aufloesung in y-Richtung
eps  = 2. * dx                        ! zulaessige Ungenauigkeit

! Datenfile zum schreiben oeffnen
OPEN (5,FILE='resonum.data',STATUS='unknown')

DO x = 0.001, xmax, dx                ! x scannen
  DO y = 0.001, ymax, dy              ! y scannen
    resook = reso(x,y,r,vr,pi,tiny,eps)   ! Liegt Resonanz vor?
    IF (resook == 1.) THEN            ! Falls ja: Daten schreiben
      WRITE (5,*) x,y
      EXIT
    END IF
  END DO                              ! Ende y-Loop
END DO                                ! Ende x-Loop

! Datenfile schliessen, Programmm beenden
CLOSE (5)
END PROGRAM resonum

!----------
! FUNCTIONS
!----------

!--- Entscheidet fuer jedes uebergebene r' (Wertepaar (x,y)),
!--- ob projizierte Geschwindigkeiten in r un r' gleich sind.
```

```
FUNCTION reso(x,y,r,vr,pi,tiny,eps)
IMPLICIT NONE

!--- Deklarationen
REAL x,x2,y,r,r1                      ! Laengen
REAL alfa,beta,beta1,gamma            ! Winkel
REAL vr,vrp,vr1,vr1p                  ! Geschwindigkeiten
REAL v                                ! Functions
REAL pi,tiny,eps,reso                 ! Sonstiges

!--- Initialisierung
reso = 0.                             ! Kontrollparameter

!--- Beginn der Berechnungen
r1   = SQRT(x**2 + y**2)              ! r' aus x und y
vr1  = v(r1,tiny)                     ! v(r') gemaess Function v
alfa = ACOS(x/r1)

IF (x <= r) THEN                      !--- falls x <= r
  x2    = r - x
  beta  = ATAN2(y,x2)
  gamma = alfa + beta
  vr1p  = vr1 * COS(gamma)            ! projiziertes v(r')
  vrp   = vr * COS(beta)              ! projiziertes v(r)
ELSE IF (x > r) THEN                  !--- falls x > r
  x2    = x - r
  beta1 = ATAN2(y,x2)
  beta  = pi - beta1
  gamma = pi - alfa - beta
  vr1p  = vr1 * COS(gamma)            ! projiziertes v(r')
  vrp   = vr * COS(beta1)             ! projiziertes v(r)
END IF

!--- Vergleich der projizierten Geschwindigkeiten
IF (abs((vrp-vr1p)*2./((vr1p+vrp)+tiny)) < eps) reso = 1.

END FUNCTION reso

!--- Berechnet v(r) am uebergebenen Ort r.
FUNCTION v(r,tiny)
IMPLICIT NONE
REAL r,tiny,v

v = 1. / (r+tiny)

END FUNCTION
```

C.4 siter.f90: Iteration der Quellfunktion $S(r)$

Das Programm *siter.f90* bildet eines der Kernstücke der Diplomarbeit und berechnet mittels klassicher Λ-Iteration die Quellfunktion $S(r)$ bei Vorhandensein eines 2-Kink-Geschwindigkeitsgesetzes und damit nichtlokaler, radiativer Kopplungen. Seine Funktionsweise ist im Abschnitt 7.2.2 beschrieben, doch auch die ausführlichen Kommentare im Quelltext dürften überaus hilfreich sein.

```
PROGRAM siter

!------------------------------------------------------------------------
! --  Generalized Sobolev method from Rybicki & Hummer 1978.
! --  Spherical symmetry is assumed throughout.
! --  The magical non-geometry algorithm from page 665
!     for 2-point coupling in a monotonically falling velocity law
!     is generalized to 3-point coupling for up-down-up velocity law
!     using a 3-case distinction.
! --  Major approximation left is in calculation of tau of
!     interwining resonance surface, shadowing light from further in/out.
! --  Radius is normalized to stellar radius.
!
! --  (p) R. Nikutta & A. Feldmeier 2003
!  Program history:
!  10 Apr 03  basic algorithm
!  14 Apr 03  first successful runs passed
!  15 Apr 03  extinction factor; separate kernel calc from iteration
!  16 Apr 03  subroutine hierarchy
!  17 Apr 03  beta integration improved
!  15 May 03  new escape prob. and kernel after line list integral
!  19 May 03  alpha-polynomials in kernel, instead of EXT(-tau)
!  21 May 03  three point resonance coupling r,r',r'' for extinction
!   5 Jun 03  consistent radial resonance triples for cases 1,2,3
!  13 Jun 03  error: include S_ka in int{N_ka}. 2nd convoy option wrong
!  15 Jun 03  S_coup > S_0, formerly < S_0. Error mu**4 in escape prob
!------------------------------------------------------------------------

IMPLICIT NONE
INTEGER ig
PARAMETER (ig = 1000)
LOGICAL done,isi
INTEGER h,i,j,k,ik1,ik2,ir1,ir2,ia,it,iso
INTEGER ire(ig,2),kre(ig,ig)
REAL kv,rr,rp,vr,vp,mu2,mul,acc,rma,aux,tmi,&
     rr2,rp2,vr2,vp2,qr,qp,yc,sum,sig,e3,tr,tp
REAL r(ig),v(ig),rho(ig),dr(ig),dvdr(ig),tas(ig),S(ig),S0(ig),&
     be(ig),bec(ig),muc(ig),gac(ig),fof(ig),cor(ig),exr(ig)
REAL ker(ig,ig),her(ig,ig)

! setup: fix all parameters in init
CALL init(iso,it,ia,kv,rma,yc,acc,mul,tmi,isi)

! velocity law and density stratification
CALL wind(ig,rma,r,muc,v,rho,dr,dvdr,fof)

! kink locations ik1,ik2
CALL kink(ig,v,dvdr,ik1,ik2)

! radial resonance triples (or singles) for v(r)
CALL resor(ig,v,ik1,ik2,ir1,ir2,ire)

! lateral resonance triples r,r',r''
CALL resol(ig,r,v,ik1,ik2,ir1,ir2,kre)

! obsolete routine for radial optical depth through resonance surface
CALL exrera(ig,ik1,ik2,ir1,ir2,ire,kv,rho,dvdr,exr)
```

```
! opt depth from r to star through intervening resonance surface
CALL taustar(ig,ik1,ik2,ir1,ir2,ire,kv,r,muc,rho,dvdr,tas)

! local escape probabilities beta and beta_core
CALL escape(ig,ia,kv,r,v,rho,dvdr,tas,be,bec,gac,muc,isi)

! start value for source function
CALL source(ig,iso,r,v,dvdr,muc,be,bec,yc,S,S0)

! r-r' coupling in spherical symmetry: Q,Q',tau,tau',ker
CALL kern(ig,ir1,ir2,ire,kre,kv,r,v,rho,dvdr,ker,her,tmi,isi)

! source function iteration
DO h = 1,it
  CALL iteration(ig,h,ir1,ir2,ire,kv,yc,mul,acc,r,dr,v,exr,&
                 rho,fof,be,bec,S,S0,ker,done,ik1,ik2)
  IF (done) EXIT
ENDDO

IF (done) THEN
  ! line force with 3-point-coupling
  CALL gline(ig,ir1,ir2,ire,kv,yc,r,fof,gac,S,her,cor)
  ! data output
  CALL finish(.TRUE.,ig,h,r,v,S,S0,cor)
ELSE
  CALL finish(.FALSE.,ig,h,r,v,S,S0,cor) ! not converged: exit
ENDIF

END PROGRAM siter

! ------------------------------------------------------------
SUBROUTINE init(iso,it,ia,kv,rma,yc,acc,mul,tmi,isi)
! parameter asignment
IMPLICIT NONE
LOGICAL isi
INTEGER iso,it,ia
REAL kv,rma,yc,acc,mul,tmi
OPEN (UNIT = 1, FILE = "siter.in", STATUS = "UNKNOWN")
OPEN (UNIT = 5, FILE = "siter.dat", STATUS = "UNKNOWN")
OPEN (UNIT = 6, FILE = "siter.err", STATUS = "UNKNOWN")
isi = .TRUE.  ! .TRUE. for single line, .FALSE. for CAK line list
tmi = 1.e-20  ! weak line limiter
kv  = 1.      ! central parameter kappa_0*v_th*rho_norm
yc  = 1.      ! core intensity
rma = 4.      ! maximum radius of atmosphere
iso = 1       ! start value S-fct.: (1) b_c/b, (2) opt thin, (3) E3-thick
it  = 20      ! maximum S-iteration number
ia  = 100     ! angle integration points in beta
acc = 1.01    ! accuracy level 1+eps to be reached
mul = 5.      ! maximum tolerated multiplier between iterations
IF (iso .NE. 1) WRITE (*,*) "use S .ne. b_c/b only for test purposes"
RETURN
END SUBROUTINE init

! ------------------------------------------------------------
SUBROUTINE wind(ig,rma,r,muc,v,rho,dr,dvdr,fof)
! reads in or calculates wind model. rho is normalized:
! rho/rho_norm, and rho_norm re-appars in k*v*rho_norm
IMPLICIT NONE
INTEGER ig,i
REAL rma,r(ig),muc(ig),v(ig),rho(ig),dr(ig),dvdr(ig),fof(ig)
! read in vs. calculate
IF (1 .EQ. 2) THEN
  DO i = 1,ig
    READ (1,*) r(i),v(i),rho(i)
  ENDDO
ELSE
```

```
    DO i = 1,ig
      ! 2-kink v-law
      r(i) = 1.+(rma-1.)*FLOAT(i)/FLOAT(ig)
      IF (r(i) .LE. 2.) THEN
        v(i) = 0.1+r(i)-1.
      ELSE IF ((r(i) .GT. 2.) .AND. (r(i) .LE. 3.)) THEN
        v(i) = 1./(r(i)-1.) + 0.1
      ELSE IF (r(i) .GT. 3.) THEN
        v(i) = 0.6+r(i)-3.
      ENDIF
      rho(i) = 1./r(i)**2
    ENDDO
  ENDIF
  ! velocity gradient and grid differential
  DO i = 1,ig-1
    dr(i) = r(i+1)-r(i)
    dvdr(i) = (v(i+1)-v(i))/dr(i)
  ENDDO
  dr(ig) = dr(ig-1)
  dvdr(ig) = dvdr(ig-1)
  ! mu_core and kernel forefactor
  DO i = 1,ig
    muc(i) = sqrt(1.-1./r(i)**2)
    fof(i) = dr(i)*r(i)**2*rho(i)
  ENDDO
  RETURN
  END SUBROUTINE wind

  ! ------------------------------------------------------------
  SUBROUTINE kink(ig,v,dvdr,ik1,ik2)
  ! determines grid indices ik1,ik2 of two kinks in v-law v(ig)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER ig,ik1,ik2,i,ico1,ico2
  REAL v(ig),dvdr(ig)
  ico1 = 0
  ico2 = 0
  DO i = 2,ig-1
    IF ((v(i-1) .LE. v(i)) .AND. (v(i) .GE. v(i+1))) THEN
      ico1 = ico1+1
      ik1 = i
    ENDIF
    IF ((v(i-1) .GE. v(i)) .AND. (v(i) .LE. v(i+1))) THEN
      ico2 = ico2+1
      ik2 = i
    ENDIF
  ENDDO
  IF ((ico1 .GT. 1) .OR. (ico2 .GT. 1)) STOP "too many kinks"
  IF (ik1 .GE. ik2) STOP "velocity law is not up-down-up"
  IF ((v(1) .GT. v(ik2)) .OR. (v(ig).LT. v(ik1))) &
    STOP "coupling points beyond mesh"
  IF (1.eq.2) THEN   ! enhance S-dip at kink
    dvdr(ik1) = 1.e-10
    dvdr(ik2) = 1.e-10
  ELSE   ! no S-dip, only discontinuity
    dvdr(ik1) = dvdr(ik1-1)
    dvdr(ik2) = dvdr(ik2-1)
  ENDIF
  RETURN
  END SUBROUTINE kink

  ! ------------------------------------------------------------
  SUBROUTINE escape(ig,ia,kv,r,v,rho,dvdr,tas,be,bec,gac,muc,isi)
  ! beta(r) and beta_c(r) from eq. (40) and (41) using Sobolev tau(mu)
  ! from (42). This is purely local (r, no r'). mu integral is from
  ! [0,1] instead [-1,1] since tau depends on mu**2 only.
  IMPLICIT NONE
  LOGICAL isi
  INTEGER ig,ia,iac,i,j
```

```
REAL kv,mu2,dmu,esc,au1,au2,au3,au4,au5,au6,convoy1,tmi
REAL r(ig),v(ig),rho(ig),dvdr(ig),tas(ig),be(ig),bec(ig),gac(ig),muc(ig)
be = 0.
bec = 0.
gac = 0.
WRITE (6,*) "The escape probabilities are:"
DO i = 1,ig
  au1 = kv*rho(i)
  au2 = dvdr(i)
  au3 = v(i)/r(i)
  iac = max(ia/3, int(ia*(1.-muc(i))))
  ! mu integral outside stellar disk
  dmu = 0.9999*muc(i)/FLOAT(ia-iac-2)
  DO j = 1,ia-iac-2
    mu2 = (FLOAT(j-1)*dmu)**2
    au4 = au1/ABS(mu2*au2+(1.-mu2)*au3)
    be(i) = be(i)+dmu*convoy1(au4,0.,tmi,isi)
  ENDDO
  ! 2 grazing rays
  dmu = 0.0001*muc(i)
  mu2 = (0.9999*muc(i))**2             ! 1. ray
  au4 = au1/ABS(mu2*au2+(1.-mu2)*au3)
  be(i) = be(i)+dmu*convoy1(au4,0.,tmi,isi)
  mu2 = muc(i)**2                      ! 2. ray
  au4 = au1/ABS(mu2*au2+(1.-mu2)*au3)
  au5 = convoy1(au4,tas(i),tmi,isi)
  be(i) = be(i)+dmu*convoy1(au4,0.,tmi,isi)
  bec(i) = 0.5*dmu*au5
  gac(i) = 0.5*dmu*muc(i)*au5
  ! mu integral over disk
  dmu = (1.-1.0001*muc(i))/FLOAT(iac)
  DO j = 1,iac
    au6 = 1.0001*muc(i)+FLOAT(j-1)*dmu
    mu2 = au6*au6
    au4 = au1/ABS(mu2*au2+(1.-mu2)*au3)
    au5 = convoy1(au4,tas(i),tmi,isi)
    be(i)  = be(i)  + dmu*convoy1(au4,0.,tmi,isi)
    bec(i) = bec(i) + 0.5*dmu*au5
    gac(i) = gac(i) + 0.5*dmu*au6*au5
  ENDDO
  IF (isi) THEN
    ! check for small numerical error
    IF ((be(i)-1. .GT. 5.e-5) .OR. (bec(i)-0.5 .GT. 5.e-5)) STOP "be > 1"
    be(i)  = MIN(be(i), 1.)
    bec(i) = MIN(bec(i), 0.5)
    gac(i) = MIN(gac(i), 0.25)
    WRITE (6,*) i,r(i),be(i),bec(i),gac(i)
  ENDIF
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE escape

! -----------------------------------------------------------
SUBROUTINE source(ig,iso,r,v,dvdr,muc,be,bec,yc,S,S0)
! start value for source function from purely local (no coupling)
! Sobolev theory. Always chose iso=1, since 1 pt locations are
! not altered by RH algorithm
IMPLICIT NONE
INTEGER ig,iso,i
REAL yc,sig,e3
REAL r(ig),v(ig),dvdr(ig),muc(ig),be(ig),bec(ig),S(ig),S0(ig)
IF (iso .EQ. 1) THEN
  S0 = yc*bec/be  ! array operation
ELSE IF (iso .EQ. 2) THEN
  DO i = 1,ig
    S0(i) = yc*0.5*(1.-muc(i))
  ENDDO
ELSE IF (iso .EQ. 3) THEN
```

```
    DO i = 1,ig
      ! S_sob = S_thin * (1 + sigma e3)/(1 + sigma/3)
      S0(i) = yc*0.5*(1.-muc(i))
      sig = ABS(r(i)/v(i) * dvdr(i) - 1.) !? check abs
      e3 = ((1. - muc(i)**3)/(1. - muc(i))) /3.
      S0(i) = S0(i) * ((1. + sig*e3)/(1. + sig/3.))
    ENDDO
  ENDIF
  S = S0
  DO i = 1, ig
    IF (S(i) .LT. 0.) STOP "negative start source function"
  ENDDO
  RETURN
  END SUBROUTINE source

  ! -----------------------------------------------------------
  SUBROUTINE resor(ig,v,ik1,ik2,ir1,ir2,ire)
  ! Determines radial grid indices of resonance triples of v(r),
  ! and ir1,ir2 for first and last coupling location. Output
  ! ire(i,2): 0 or 2 resonance indices for each grid index i
  IMPLICIT NONE
  INTEGER ig,i,ik1,ik2,ir1,ir2,j,in
  INTEGER ire(ig,2)
  REAL vi,vj,vjj
  REAL v(ig)
  ire = 0
  DO i = 1,ig
    in = 0
    vi = v(i)
    DO j = 1,ig-1
      IF (j.eq.i) CYCLE   ! caution: don't cycle if j+1=i
      vj = v(j)
      vjj = v(j+1)
      IF (((vj .GE. vi) .AND. (vjj .LT. vi)) .OR. &
          ((vj .LE. vi) .AND. (vjj .GT. vi))) THEN
        ! case 1
        in = in+1
        ire(i,in) = j
        IF (in .EQ. 2) THEN
          ! full case 2
          ire(ire(i,1),1) = min(i,j)
          ire(ire(i,1),2) = max(i,j)
          ! full case 3
          ire(j,1) = min(i,ire(i,1))
          ire(j,2) = max(i,ire(i,1))
        ENDIF
      ENDIF
    ENDDO ! j
    IF (in .EQ. 1) THEN
      IF ((ire(i,1).NE.ik1).AND.(ire(i,1).NE.ik2).AND. &
                 (i.NE.ik1).AND.(i.NE.ik2)) STOP "only 1 resonance"
      ELSE IF (in .EQ. 2) THEN
        IF (ire(i,1) .GT. ire(i,2)) STOP "wrong index ordering"
      ELSE IF (in .GT. 2) THEN
        STOP "more than 2 radial resonance couplings"
      ENDIF ! in
  ENDDO ! i
  ! determine first and last coupling location
  DO i = 1,ig
    IF (ire(i,1) .NE. 0) THEN
      ir1 = i
      EXIT
    ENDIF
  ENDDO
  DO i = ig,1,-1
    IF (ire(i,1) .NE. 0) THEN
      ir2 = i
      EXIT
```

```
  ENDIF
ENDDO
! kinks couple to first and last coupling location
ire(ik1,1) = ik1
ire(ik1,2) = ir2
ire(ik2,1) = ir1
ire(ik2,2) = ik2
! to maintain consistent pairs, do the same for ir1,ir2
ire(ir1,1) = ik2
ire(ir1,2) = ik2-1  ! degeneracy of reso surface to a spot is not treated
ire(ir2,1) = ik1
ire(ir2,2) = ik1-1
WRITE (6,*) "The resonance triples are:"
DO i = 1,ig
  WRITE (6,*) i,ire(i,1),ire(i,2)
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE resor

! -----------------------------------------------------------
SUBROUTINE resol(ig,r,v,ik1,ik2,ir1,ir2,kre)
! Determines coupling matrix kre(i,j) of those resonance points
! r''(k) that lie between resonance points r(i) and r'(j). For
! case 1 only, since kre(i,j)=kre(j,i) holds for case 3, and no
! mutual extinction occurs for case2. Note that i < kre < j.
IMPLICIT NONE
INTEGER ig,i,j,k,ik1,ik2,ir1,ir2
INTEGER kre(ig,ig)
REAL r(ig),v(ig),tes1,tes2,tes3
kre = -1   ! no 3-pt coupling, e.g. case 2
DO i = ir1,ik1-1
  DO j = ir2,ik2+1,-1
  tes1 = (r(j)/v(j)-r(i)/v(i))/(r(j)-r(i))
    DO k = ik1,ik2-1   ! ik2 actually, shortened because of 2 testers
      tes2 = (r(k)/v(k)-r(i)/v(i))/(r(k)-r(i))
      tes3 = (r(k+1)/v(k+1)-r(i)/v(i))/(r(k+1)-r(i))
      IF (((tes2 .LE. tes1) .AND. (tes3 .GT. tes1)) .OR. &
          ((tes2 .GE. tes1) .AND. (tes3 .LT. tes1))) THEN
        kre(i,j) = k
        EXIT   ! pick k closest to i for 5-point coupling
      ENDIF
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE resol

! -----------------------------------------------------------
SUBROUTINE kern(ig,ir1,ir2,ire,kre,kv,r,v,rho,dvdr,ker,her,tmi,isi)
! r-r' resonance coupling in spherical symmetry, using (i) resonance
! condition and (ii) p=const: eq (66). 2-D arrays for Q, Q', tau, tau'
! (eq. 67), and kernel function (eq. 70). Only for such combinations
! (r,r') that are coupled; else imaginary root due to .not.(i) above.
IMPLICIT NONE
LOGICAL isi
INTEGER ig,ir1,ir2,i,j,k
INTEGER ire(ig,2),kre(ig,ig)
REAL kv,rr,rr2,rp,rp2,rpp,rpp2,vr,vr2,vp,vp2,vpp,vpp2,tr,tp,tpp, &
     qr,qp,qpp,au1,au2,au3,convoy2,tmi
REAL r(ig),v(ig),rho(ig),dvdr(ig)
REAL ker(ig,ig),her(ig,ig)
ker = -1.
her = -1.
DO i = ir1,ir2
  rr = r(i)
  vr = v(i)
  rr2 = rr*rr
  vr2 = vr*vr
```

```
  DO j = ire(i,1),ire(i,2)
    IF (i .EQ. j) THEN
      ker(i,j) = 0.
      her(i,j) = 0.
    ELSE
      rp = r(j)
      vp = v(j)
      rp2 = rp*rp
      vp2 = vp*vp
      au1 = rp2*vr2-rr2*vp2
      qr =  (rr*dvdr(i)*(rp2-rr2)*vp2+vr*rp2*(vr2-vp2))/rr/au1
      qp = -(rp*dvdr(j)*(rr2-rp2)*vr2+vp*rr2*(vp2-vr2))/rp/au1
      tr = kv*rho(i)/ABS(qr)
      tp = kv*rho(j)/ABS(qp)
      au2 = (rp2-rr2)*au1
      ! check whether mu^2 > 0 in (65)
      IF (au2 .LT. 0.) STOP "imaginary root: not a coupling point"
      ! r'' extinction: use symmetry kre(i,j)=kre(j,i) for case 3 (j < i)
      tpp = 0.
      k = kre(min(i,j),max(i,j))
      IF (k.ne.-1) THEN
        rpp = r(k)
        vpp = v(k)
        rpp2 = rpp*rpp
        vpp2 = vpp*vpp
        qpp = (rpp*dvdr(k)*(rr2-rpp2)*vr2+vpp*rr2*(vpp2-vr2)) &
             /(rpp*(rr2*vpp2-rpp2*vr2))
        tpp = kv*rho(k)/ABS(qpp)
      ENDIF
!     tpp = 0.   !? to test exr for radial tau, uncomment this line
      ! kernel after integration over line list with alpha=1/2
      au3 = convoy2(tr,tp,tpp,tmi,isi)
      ker(i,j) = au3 / SQRT(au2)
      her(i,j) = au3 *vp/(-au1)
    ENDIF ! i=j
  ENDDO ! j
ENDDO ! i
! test for kernel dip
DO i = 3,ig-2
   IF (((ker(i,i-2) .LT. ker(i,i-1)) .AND. (ker(i,i-2) .NE. -1.)) &
  .OR. ((ker(i,i+2) .LT. ker(i,i+1)) .AND. (ker(i,i+2) .NE. -1.)))&
   WRITE (6,*) "no kernel dip at i = ", i,(ker(i,i-3+j),j=1,5)
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE kern

! -----------------------------------------------------------
FUNCTION convoy1(a,c,tmi,isi)
! tau-compound in beta-core. See convoy2. alpha=1/2. a=tau, c=tau''
IMPLICIT NONE
LOGICAL isi
REAL a,c,tmi,convoy1,esc
IF (isi) THEN
  convoy1 = esc(a)*EXP(-c)
ELSE
  a=max(a,tmi)
  convoy1 = (SQRT(a+c)-SQRT(c))/a
ENDIF
RETURN
END FUNCTION convoy1

! -----------------------------------------------------------
FUNCTION convoy2(a,b,c,tmi,isi)
! tau-compound in resonance kernel. For one single line: local eating
! rate times resonance surface production rate times extinction at
! intervening resonance surface. Second form is after integration over
! CAK line distribution function for alpha=1/2. a=tau, b=tau', c=tau''
IMPLICIT NONE
```

```
LOGICAL isi
REAL a,b,c,tmi,convoy2,esc
IF (isi) THEN
  convoy2 = esc(a)*esc(b)*EXP(-c)
ELSE
  a = max(a,tmi)
  b = max(b,tmi)
  convoy2 = (SQRT(a+c)+SQRT(b+c)-SQRT(a+b+c)-SQRT(c))/(a*b)
ENDIF
RETURN
END FUNCTION convoy2

! ----------------------------------------------------------
FUNCTION esc(x)
! [1-e(-x)]/x, including series expansion for numerically inaccurate x->0
IMPLICIT NONE
REAL x,esc
IF (x .GT. 0.01) THEN
  esc = (1.-EXP(-x))/x
ELSE
  esc = 1.-x/2.*(1.-x/3.*(1.-x/4.))
ENDIF
RETURN
END FUNCTION esc

! ----------------------------------------------------------
SUBROUTINE taustar(ig,ik1,ik2,ir1,ir2,ire,kv,r,muc,rho,dvdr,tas)
! Calculates opt depth tas for stellar occulation by intervening
! resonance surface in an approximate fashion. By contrast, the
! mutual extinction of resonace surfaces is treated exactly,
! by determining r'' in "resol" and tau'' in "kern". In the
! following, the r' dependency is dropped by using an average
! r', and calculating tau-radial only.
IMPLICIT NONE
INTEGER ig,ir1,ir2,ik1,ik2,i,j,imi,ima
INTEGER ire(ig,2)
REAL kv,rr,rp,rk,oc,r(ig),muc(ig),rho(ig),dvdr(ig),tas(ig)
tas = 0.
DO i = ir1,ir2
  imi = ire(i,1)
  ima = ire(i,2)
  ! no case 1
  IF ((i .GT. imi) .AND. (i .LT. ima)) THEN   ! case 2
    tas(i) = kv*rho(imi)/ABS(dvdr(imi))
  ELSE IF (i .GE. ima) THEN                   ! case 3
    rr = r(i)
    rp = r(imi)
    rk = r(ik1)
    IF (rr .LT. rp) STOP "this is not case 3"
    ! occultation factor
    oc = (1.-(rr-rp)/SQRT(rr*rr-2.*rr*rp+rk*rk))/(1.-muc(i))
    IF (oc .GT. 1.) oc = 1.   ! star fully occulted
    tas(i) = -log((1.-oc) + oc*EXP(-kv*rho(imi)/ABS(dvdr(imi)) &
                               -kv*rho(ima)/ABS(dvdr(ima))))
  ENDIF
ENDDO ! i
RETURN
END SUBROUTINE taustar

! ----------------------------------------------------------
SUBROUTINE exrera(ig,ik1,ik2,ir1,ir2,ire,kv,rho,dvdr,exr)
! Obsolete routine: calculates extinction due to shadowing
! of one reso surface by another. Only radial tau is calculated,
! and j serves only for case 1,2,3 distinction. This is now
! replaced by (i,j,k) coupling matrix giving tau''.
IMPLICIT NONE
INTEGER ig,ik1,ik2,ir1,ir2,i,j,imi,ima
INTEGER ire(ig,2)
```

```
REAL kv,rho(ig),dvdr(ig),exr(ig)
exr = 1.
RETURN
DO i = ir1,ir2
  imi = ire(i,1)
  ima = ire(i,2)
  DO j = 1,ig
    ! resonance surface shadowing: no case 2
    IF ((i .LE. imi) .AND. (j .GT. ik2)) THEN        ! case 1
      exr(i) = EXP(-kv*rho(imi)/ABS(dvdr(imi)))
    ELSE IF ((i .GE. ima) .AND. (j .LT. ik1)) THEN   ! case 3
      exr(i) = EXP(-kv*rho(ima)/ABS(dvdr(ima)))
    ENDIF
  ENDDO ! j
ENDDO ! i
END SUBROUTINE exrera

! ----------------------------------------------------------
SUBROUTINE iteration(ig,h,ir1,ir2,ire,kv,yc,mul,acc,r,dr,v,exr,&
                     rho,fof,be,bec,S,S0,ker,done,ik1,ik2)
! Generalization of R&H 1978 eqs. (68, 70) for 2-point coupling
! to cases 1,2,3 for 3-point coupling. For each S(r), calculate
! int dr'*ker(r,r')*S(r')
IMPLICIT NONE
LOGICAL done
INTEGER ig,ir1,ir2,h,i,j,ik1,ik2
INTEGER ire(ig,2)
REAL kv,yc,mul,acc,sum,aux
REAL r(ig),dr(ig),v(ig),exr(ig),rho(ig),fof(ig),&
     be(ig),bec(ig),S(ig),S0(ig)
REAL ker(ig,ig)
done = .TRUE.
DO i = ir1,ir2
  sum = 0.
  DO j = ire(i,1),ire(i,2)   ! radial resonance locations r' for this r
    aux = ker(i,j)
    IF (aux .EQ. -1.) STOP "rr and rp not coupled"
    sum = sum + fof(j)*aux*S(j)*exr(i) !? obsolete: exr=1, see exrera
  ENDDO ! j
  aux = S(i)
  S(i) = (bec(i)*yc + 0.5*kv*sum) / be(i)
  ! check whether too big change in S
  aux = S(i)/aux
  aux = MAX(aux,1./aux)
  IF (aux .GT. mul) WRITE (6,*) "bad ",h,i,aux
  ! set accuracy flag "done"
  IF (done) done = aux .LE. acc
  ! write out selected values of S changes
  IF (mod(i,ig/10).eq.0) WRITE (6,*) "dS/S ",h,i,0.5*kv*sum/be(i)/S(i)
ENDDO ! i
RETURN
END SUBROUTINE iteration

! ----------------------------------------------------------
SUBROUTINE gline(ig,ir1,ir2,ire,kv,yc,r,fof,gac,S,her,cor)
! line force correction factor g_double_ang/g_single_rad,
! for single vs. CAK line distribution and 3-point-coupling.
IMPLICIT NONE
INTEGER ig,i,j,ir1,ir2
INTEGER ire(ig,2)
REAL kv,yc,sum,r(ig),fof(ig),gac(ig),S(ig),cor(ig)
REAL her(ig,ig)
cor = 1.
DO i = ir1,ir2
  sum = 0.
  DO j = ire(i,1),ire(i,2)
    sum = sum + 0.5*kv*fof(j)*S(j)*her(i,j)
  ENDDO
```

```
  cor(i) = 1. + sum/gac(i)*yc
ENDDO
END SUBROUTINE gline

! -----------------------------------------------------------
SUBROUTINE finish(done,ig,h,r,v,S,S0,cor)
! terminates program in orderly fashion
IMPLICIT NONE
LOGICAL done
INTEGER ig,h,i
REAL r(ig),v(ig),S(ig),S0(ig),cor(ig)
IF (done) THEN
  DO i = 1,ig
    WRITE (5,'(i5,5(2x,es13.5e2))') i,r(i),v(i),S(i),S0(i),cor(i)
  ENDDO
  WRITE (*,*) "accuracy reached globally"
ELSE
  WRITE (*,*) "accuracy not reached"
ENDIF
CLOSE (1)
CLOSE (5)
CLOSE (6)
STOP
RETURN
END SUBROUTINE finish
```

Anhang D

Literaturverzeichnis

Babel, J., *Multi-component radiatively driven winds from A and B stars. I. The metallic wind of a main sequence A star*, A&A 301:823, 1995

Brandt, J.C., Cassinelli, J.P., *Interplanetary Gas. XI. An Exospheric Model of the Solar Wind*, Icarus 5:47, 1966

Bresolin, F., Gieren, W., Kudritzki, R.-P., Pietrzyński, G., Przybilla, N., *Spectroscopy of Blue Supergiants in the Spiral Galaxy NGC 300*, ApJ 567:277-288, 2002

Bromm, V., Kudritzki, R.-P., Loeb, A., *Generic Spectrum and Ionization Efficiency of a Heavy Initial Mass Function for the First Stars*, ApJ 552:464-472, 2001

Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H., *Taschenbuch der Mathematik*, 3. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997

Cassinelli, J.P., *Stellar Winds*, Annual Review of A&A 17:275-308, 1979

Castor, J.I., Abbott, D.C., Klein, R.I., *Radiation-Driven Winds In Of Stars*, ApJ 195:157-174, 1975

Chamberlain, J.W., *Interplanetary Gas. II. Expansion of a Model Solar Corona*, ApJ 131:47, 1960

Cannon, C.J., Thomas, R.N., *The origin of stellar winds - Subatmospheric nonthermal storage modes versus radiation pressure*, ApJ 211:910-925, 1977

Chapman, C.J., *High Speed Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000

Chandrasekhar, S., *Radiative Transfer*, Dover Publications, Inc., New York, 1960

Cohen, D.H., Cassinelli, J.P., Waldron, W.L., *ASCA X-Ray Spectroscopy of the Unusual B0 V Star tau Scorpii*, ApJ 488:397, 1997

Cranmer, S.R., Owocki, S.P., *Hydrodynamical Simulations of Corotating Interaction Regions and Discrete Absorption Components in Rotating O-Star Winds*, ApJ 462:469, 1996

Feldmeier, A., *Zeitabhängige Struktur und Energietransfer der Winde heißer, massereicher Sterne*, Dissertationsschrift, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1993

Feldmeier, A., Puls, J., Reile, C., Pauldrach A.W.A., Kudritzki, R.-P., Owocki, S.P., *Shocks and Shells in Hot Star Winds*, Astrophysics and Space Science 233:293-299, 1995

Feldmeier, A., *The Line-Driven Instability In Sobolev Approximation*, A&A 332:245-250, 1998

Feldmeier, A., Shlosman, I., *Runaway Of Line-Driven Winds Toward Critical And Overloaded Solutions*, ApJ 532:125-128, 2000

Feldmeier, A., Shlosman, I., *Abbott Wave-triggered Runaway in Line-driven Winds from Stars and Accretion Disks*, ApJ 564:385-394, 2002

Feldmeier, A., *Hydrodynamics of astrophysical winds driven by scattering in spectral lines*, Habilitationsschrift, Universität Potsdam, 2002

Feldmeier, A., Skripte und Mitschriften von Vorlesungen gehalten an der Universität Potsdam: *Hydrodynamics (Ma < 1) of Atmospheres (WS 2000/2001), Gas Dynamics (Ma > 1) of Atmospheres (SS 2001), Computational Fluid Dynamics (WS 2001/2002), Hydrodynamik in der Astronomie (Machzahlen < 1) (SS 2002), Gasdynamik in der Astronomie (Machzahlen > 1) (WS 2002/2003), Wirbel und Akkretionsscheiben (SS 2003)*

Friend, D.B., Abbott, D.C., *The theory of radiatively driven stellar winds. III - Wind models with finite disk correction and rotation*, ApJ 311:701-707, 1986

Gayley, K.G., *An Improved Line-Strength Parameterization in Hot-Star Winds*, ApJ 454:410-419, 1995

Habbal, S.R., Tsinganos, K., *Multiple transonic solutions with a new class of shock transitions in steady isothermal solar and stellar winds*, Journal of Geophysical Research, 88:1965-1975, 1983

Hamann, W.-R., *The expanding envelope of Zeta Puppis - A detailed UV-line fit*, A&A 84:342-349, 1980

Hamann, W.-R., Koesterke, L., *The nitrogen spectra of Wolf-Rayet stars. A grid of models and its application to the Galactic WN sample*, A&A 333:251-263, 1998

Hamann, W.-R., Koesterke, L., *Spectrum formation in clumped stellar winds: consequences for the analyses of Wolf-Rayet spectra*, A&A 335:1003-1008, 1998

Hamann, W.-R., Koesterke, L., *WN stars in the LMC: Parameters and atmospheric abundances*, A&A 360:647-655, 2000

Hamann, W.-R., Vorlesungsskript und Mitschriften zur Zyklusvorlesung an der Universität Potsdam: *Physik der Sternatmoshphären*

Henrichs, H.F., Hammerschlag-Hensberge, G., Howarth, I.D., Barr, P., *Episodic mass loss and narrow lines in gamma Cassiopeiae and in other early-type stars*, ApJ 268:807-824, 1983

Hillier, D.J., Miller, D.L., *The Treatment of Non-LTE Line Blanketing in Spherically Expanding Outflows*, ApJ 496:407, 1998

Howk, J.C., Cassinelli, J.P., Bjorkman, J.E., Lamers, H.J.G.L.M., *Stagnation and Infall of Dense Clumps in the Stellar Wind of τ Scorpii*, ApJ 534:348-358, 2000

Hubeny, I., *Accelerated Lambda Iteration*, The Atmospheres of Early-Type Stars, Proceedings of a Workshop Organized Jointly by the UK SERC's Collaborative Computational Project No. 7 and the Institut für Theoretische Physik und Sternwarte, University of Kiel Held at the University of Kiel, Germany, 18-20 September 1991, Edited by U.Hebner & C.S. Jeffery, Spinger-Verlag, S. 377-392, 1992

Hummer, D.G., Rybicki, G.B., *Radiative Transfer In Spherically Symmetric Systems. The Conservative Grey Case*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 152:1-19, 1971

Hummer, D.G., Rybicki, G.B., *The Formation Of Spectral Lines*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 9:237, 1971

Hummer, D.G., *Line Formation in Expanding Atmospheres (review Paper)*, Be and Shell Stars: IAU Symposium no. 70 (Merrill-McLaughlin Memorial Symposium) held at Bass River, Massachusetts, U.S.A., 15-18 September 1975. Edited by Arne Slettebak. International Astronomical Union. Symposium no. 70, Dordrecht, Holland; Boston: D. Reidel Pub. Co., S. 281, 1976

Hunger, K., Groote, D., *Fractionated stellar wind and the H/He abundance anomalies in Bp stars*, A&A 351:554-558, 1999

Israelian, G., Musaev, F., *On the variable spectrum of HD 45677 (FS Canis Majoris)*, A&A 328:339-342, 1997

Israelian, G., Chentsov, E., Musaev, F., *The inhomogeneous circumstellar envelope of Rigel (beta Orionis A)*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 290:521-532, 1997

Kaper, L., Henrichs, H.F., Nichols, J.S., Snoek, L.C., Volten, H., Zwarthoed, G.A.A., *Long- and short-term variability in O-star winds. I. Time series of UV spectra for 10 bright O stars*, A&A Supplement 116:257-287, 1996

Kaufer, A., Stahl, O., Gäng, T., Gummersbach, C.A., Kovács, J., Mandel, H., Szeifert, T., *Long-term spectroscopic monitoring of BA-type supergiants. I. H_α line-profile variability*, A&A 305:887, 1996

Krticka, J., Kubát, J., *Isothermal two-component stellar wind of hot stars*, A&A 359:983-990, 2000

Kudritzki, R.-P., Hummer, D.G., *Quantitative spectroscopy of hot stars*, Annual Review of A&A 28:303-345, 1990

Kudritzki, R.-P., Lennon, D.J., Puls, J., *The wind momentum - luminosity relation of early type supergiants*, Astronomische Gesellschaft Abstract Series, 10:42, 1994

Kudritzki, R.-P., Puls, J., Lennon, D.J., Venn, K.A., Reetz, J., Najarro, F., McCarthy, J.K., Herrero, A., *The wind momentum-luminosity relationship of galactic A- and B-supergiants*, A&A 350:970-984, 1999

Kudritzki, R.-P., Puls, J., *Winds from Hot Stars*, Annual Review of A&A, 38:613-666, 2000

Lamb, D.Q., Reichart, D.E., *Gamma-Ray Bursts as a Probe of the Very High Redshift Universe*, ApJ 536:1-18, 2000

Lamers, H.J.G.L.M., Rogerson, J.B., Jr., *The expanding envelope of Tau SCO (B0 V)*, A&A 66:417-430, 1978

Langer, N., Hamann. W.-R., Lennon, M., Najarro, F., Pauldrach, A.W.A., Puls, J., *Towards an understanding of very massive stars. A new evolutionary scenario relating O stars, LBVs and Wolf-Rayet stars*, A&A 290:819-833, 1994

Leitherer, Leão, J.R.S., Heckman, T.M., Lennon, D.J., Pettini, M., Robert, C., *Ultraviolet Line Spectra of Metal-poor Star-forming Galaxies*, ApJ 550:724-736, 2001

Lucy, L.B., *The Formation of Resonance Lines in Extended and Expanding Atmospheres*, ApJ 163:95, 1971

Maeder, A., Meynet, G., *Tables of isochrones computed from stellar models with mass loss and overshooting*, A&A Supplement Series 89:451-467, 1991

Maeder, A., Meynet, G., *The Evolution of Rotating Stars*, Annual Review of A&A 38:143-190, 2000

Massa, D., Fullerton, A.W., Hutchings, J.B., Morton, D.C., Sonneborn, G., Willis, A.J., Bianchi, L., Brownsberger, K.R., Crowther, P.A., Snow, T.P., York, D.G., *The Detection of Wind Variability in Magellanic Cloud O Stars*, ApJ 538:47-50, 2000

Mihalas, D., *Stellar Atmospheres*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1970

Mullan, D.J., *Corotating interaction regions in stellar winds*, ApJ 283:303-312, 1984

Oey, M.S., *Stellar Content of Superbubble H II Regions in the Large Magellanic Cloud*, ApJ 465:231, 1996

Owocki, S.P., Castor, J.I., Rybicki, G.B., *Time-Dependent Models Of Radiatively Driven Stellar Winds. I. Nonlinear Evolution Of Instabilities For A Pure Absorption Model*, ApJ 335:914-930, 1988

Owocki, S.P., *A Smooth Source Function Method for Including Scattering in Radiatively Driven Wind Simulations*, Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models, Proceedings of the Advanced Research Workshop, Trieste, Italy, Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., S.235, 1991

Owocki, S.P., Puls, J., *Nonlocal Escape-Integral Approximations For The Line Force In Structured Line-Driven Stellar Winds*, ApJ 462:894-907, 1996

Owocki, S.P., Puls, J., *Ion Runaway Instability in Low-Density, Line-driven Stellar Winds*, ApJ 568:965-978, 2002

Parker, E.N., *Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields*, ApJ 128:664, 1958

Parker, E.N., *Theory Of Solar Wind*, Solar Particles and Sun-Earth Relations. Proceedings from the 8th International Cosmic Ray Conference, 1:175, 1963

Pauldrach, A.W.A., Kudritzki, R.-P., Puls, J., Butler, K., Hunsinger, J., *Radiation-driven winds of hot luminous stars. 12: A first step towards detailed UV-line diagnostics of O-stars*, A&A 283:525-560, 1994

Pauldrach, A.W.A., Lennon, M., Hoffmann, T.L., Sellmaier, F., Kudritzki, R.-P., Puls, J., *Realistic Models for Expanding Atmospheres*, Boulder-Munich II: Properties of Hot, Luminous Stars, edited by Ian Howarth, ASP Conference Series vol. 131 (San Francisco), S. 258, 1998

Pauldrach, A.W.A., Hoffmann, T.L., Lennon, M.,*Radiation-driven winds of hot luminous stars. XIII. A description of NLTE line blocking and blanketing towards realistic models for expanding atmospheres*, A&A 375:161-195, 2001

Peters, G.J., *The Development and Behavior of an Active Region on/near the Photosphere of the B2e Star μ Centauri*, Astrophysical Journal Letters 502:59, 1998

Petrenz, P., Puls, J., *2-D non-LTE models of radiation driven winds from rotating early-type stars. I. Winds with an optically thin continuum*, A&A 358:956-992, 2000

Porter, J.M., Skouza, B.A., *On the decoupling and reaccretion of low density, line-driven winds*, A&A 344:205-210, 1999

Prinja, R.K., Howarth, I.D., *Narrow absorption components and variability in ultraviolet P Cygni profiles of early-type stars*, ApJ Supplement Series 61:357-418, 1986

Prinja, R.K., Howarth, I.D., *Opacity enhancements in the stellar wind of 68 Cygni - Not 'shells' or 'puffs'*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 233:123-156, 1988

Proga, D., Stone, J.M., Drew, J.E., *Radiation-driven winds from luminous accretion discs*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 295:595, 1998

Puls, J., Owocki, S.P., Fullerton, A.W., *On the synthesis of resonance lines in dynamical models of structured hot-star winds*, A&A, 279:457-476, 1993

Rybicki, G.B., Hummer, D.G., *A Generalization Of The Sobolev Method For Flows With Nonlocal Radiative Coupling*, ApJ 219:654-675, 1978

Schulz, N.S., Canizares, C.R., Huenemoerder, D., Lee, J.C., *X-Ray Line Emission from the Hot Stellar Wind of θ Orionis C*, ApJ 545:135-139, 2000

Springmann, U., Pauldrach, A.W.A., *Radiation-driven winds of hot luminous stars. XI - Frictional heating in a multicomponent stellar wind plasma and decoupling of radiatively accelerated ions*, A&A 262:515-522, 1992

Unsöld, A., Baschek, B., *Der neue Kosmos*, dritte, erweiterte Auflage, Springer-Verlag, 1981

Velli, M., *From supersonic winds to accretion: Comments on the stability of stellar winds and related flows*, ApJ Letters 432:55-58, 1994

Wegner, M., *Hydrodynamische Simulationen instabiler strahlungsdruckgetriebener Winde massereicher Sterne*, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1999

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Diplomarbeit „Strahlungskopplung in nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldern der Winde massereicher Sterne“ von mir selbständig angefertigt wurde und dass ich keine weiteren Hilfsmittel und Quellen als die angegebenen verwendet habe.

Potsdam, den 17. Juni 2003

Robert Nikutta

Danksagung

Ich danke vor allem meinem Kollegen und Betreuer dieser Diplomarbeit, Priv.-Doz. Dr. Achim Feldmeier, der mir diese nicht nur ermöglicht, sondern auch in einer unglaublich engagierten Weise betreut hat. Seine Geduld und viele Hilfe waren von unschätzbarer Bedeutung für das Gelingen dieser Arbeit.

Ferner möchte ich Prof. Dr. Wolf-Rainer Hamann für seine fachliche Unterstützung und stets scharfsinnigen Tips danken sowie die Chance, bereits im frühen Studium erste Schritte in der Astrophysik machen zu können.

Erwähnen möchte ich außerdem die freundliche Atmosphäre in der Astrophysik der Universität Potsdam. Dafür danke ich allen Kolleginnen und Kollegen, auch ehemaligen. Ganz besonders Frau Andrea Brockhaus für ungebrochene Hilfsbereitschaft, gute Ratschläge und mehr als einen Rettungsanker in der Not.

Drea, Dir danke ich vom Herzen dafür, dass Du immer an das Gute in mir glaubst. Deine Unterstützung, Deine Aufbaukünste und das Wissen um Dein Vertrauen sind meine treibende Kraft schlechthin.

Robert Nikutta