Spektralanalysen von WC-Sternen in der LMC

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
in der Wissenschaftsdisziplin Astrophysik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Potsdam

von
Götz Gräfener

Potsdam, im April 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Wolf-Rayet-Sterne (WR-Sterne) sind massive, entwickelte Sterne, deren Spektren die Signatur eines extremen Massenverlusts zeigen ($\sim 10^{-5}$-10^{-4} $M_\odot$ yr^{-1}). Die Leuchtkräfte von WR-Sternen liegen bei $\sim 10^5 L_\odot$. Die Spektren weisen stark verbreiterte Emissionslinien auf (1000-3000 km/s), die den Reaktionsprodukten des CNO-Zyklus (Spektraltyp WN) bzw. des Heliumbrennens (Spektraltypen WC und WO) entsprechen. In dieser Arbeit werden WR-Sterne vom Spektraltyp WC untersucht, deren Spektren durch starke Emissionslinien von Kohlenstoff, Helium und Sauerstoff dominiert sind. Das entspricht der Elementzusammensetzung von Material, das bereits Helium-Brennprozessen ausgesetzt war.

Durch die Modellierung der Atmosphären und den Vergleich von synthetischen Spektren mit Beobachtungen, ist eine empirische Bestimmung der grundlegenden stellaren Parameter von WR-Sternen möglich. Bestimmte stellare Parameter können nur über Modellrechnungen gewonnen werden. So wird bei WR-Sternen die eigentliche "Sternoberfläche" durch den optisch dicken Sternwind verdeckt. Darüber hinaus liegt das Flußmaximum im fernen UV, einem Spektralbereich, der selbst durch Satellitenbeobachtungen nur schwer zugänglich ist. Aufgrund der starken Expansion sind die Atmosphären sehr ausgedehnt ($\rho \propto r^{-2}$), und es bilden sich komplexe Ionisationsschichtungen aus. Verschiedene spektrale Signaturen entstehen somit in unterschiedlichen räumlichen Bereichen.

In diesem Kapitel sollen die grundsätzlichen Fragestellungen bezüglich der untersuchten Objekte erläutert werden. Dazu wird in Abschnitt 1.1 auf den Entwicklungsstand und die Klassifikation von WR-Sternen, in Abschnitt 1.2 auf den WR-Massenverlust und in Abschnitt 1.3 auf die Besonderheiten der WC-Sterne in der Großen Magellanschen Wolke (LMC) eingegangen.

In den folgenden Kapiteln wird zunächst die Modellierung von WR-Atmosphären beschrieben. Dazu werden in Kapitel 2 die Grundlagen des Non-LTE-Strahlungstransports erklärt, und in Kapitel 3 deren Implementation in das Atmosphärenprogramm. Danach werden in Kapitel 4 die Ergebnisse von Standardanalysen diskutiert. Zum Abschluß werden in Kapitel 5 Modellrechnungen vorgestellt, bei denen die Elemente der Eisengruppe ($\sim 10^7$ Spektrallinien) im Rahmen der Opacity-Sampling-Methode berücksichtigt werden.

1.1 Wolf-Rayet-Sterne

WR-Sterne werden auf der Basis der Verhältnisse von Linienstärken unterschiedlicher Ionen in Spektraltypen eingeteilt (Smith 1968; Smith et al. 1996). Frühe Typen repräsentieren dabei Sterne, die hoch angeregte Ionen zeigen, späte Typen diejenigen mit niedrigen Ionisationsstufen. WN-Sterne zeigen Emissionslinien der Elemente H, He und N. Sie werden entsprechend der Linienverhältnisse von He I/He II und N III/N IV/N V in frühe Typen (WNE: WN 3 - WN 6) und späte Typen (WNL: WN 7 - WN 9) eingeteilt. Sterne von Typ WNL zeigen häufig noch Wasserstoff an ihrer Oberfläche, was für frühe Typen (WNE) unüblich ist. WC/WO-Sterne zeigen demgegenüber Emissionslinien von He, C und O und werden in die Untertypen WC 4 bis WC 9 bzw. WO 1 bis WO 4 eingeteilt. Die Einteilung richtet sich nach den Verhältnissen He I/He II und C III/C IV bzw. O V/O VI, je nachdem, ob die Emissionslinien von Kohlenstoff (WCE: WC 4 - WC 6, WCL: WC 7 - WC 9) oder Sauerstoff (WO) dominieren. Darüber hinaus ist noch eine Unterteilung in Sterne mit starken (WNE-s, WC-s) und schwachen Emissionslinien (WNE-w, WC-w) üblich.

Diese Einteilung spiegelt wahrscheinlich auch den Entwicklungsweg von WR-Sternen wieder, deren chemische Oberflächenzusammensetzungen denjenigen im Kern eines massereichen Sterns im Zuge seiner Entwicklung entsprechen. In der Phase des zentralen Wasserstoffbrennens wird Wasserstoff im CNO-Zyklus zu Helium umgesetzt. Die Gleichgewichtshäufigkeit von 1.5 % Stickstoff (für galaktische Sterne) entspricht dabei dem an der Oberfläche von WN-Sternen beobachteten Wert. In dieser Brennphase entspricht das Häufigkeitsmuster im Kern also in etwa den Oberflächenhäufigkeiten von WNL-Sternen, die ja auch Wasserstoff zeigen. Ist der gesamte Wasserstoff verbraucht, liegt ein Kern mit WNE-Häufigkeit vor, in dem nach der Zwischenphase des Wasserstoff-Schalenbrennens das zentrale He-Brennen zündet. Dabei entsteht in der Reaktion $3\alpha \rightarrow {}^{12}\mathrm{C}$ Kohlenstoff. Mit zunehmender C-Häufigkeit gewinnt der Prozeß ${}^{12}\mathrm{C} + \alpha \rightarrow {}^{16}\mathrm{O}$ immer mehr an Bedeutung, und führt schließlich zur Bildung von Sauerstoff. Die resultierenden He/C/O Verhältnisse werden mit den Oberflächenhäufigkeiten in der WC/WO Phase identifiziert.

Die konvektiven Kerne massereicher Sterne zeigen die obigen Häufigkeitsmuster. Durch die konvektive Durchmischung sind sie chemisch homogen. Mit fortschreitender Entwicklung wird der Kern kleiner, und hinterläßt ein tiefenabhängiges Häufigkeitsprofil, das der oben beschriebenen Häufigkeitssequenz von außen nach innen entspricht. Nach dem Conti-Szenario (Conti 1976) werden die äußeren, wasserstoffreichen Schichten durch Massenverlust in Entwicklungsphasen vor dem WR-Stadium abgetragen, bis die WR-Häufigkeitsmuster an der Sternoberfläche auftreten. Der starke WR-Massenverlust führt dann weiter zu einer Entwicklung entlang der oben beschriebenen Sequenz ($\mathrm{WNL} \rightarrow \mathrm{WNE} \rightarrow \mathrm{WC} \rightarrow \mathrm{WO}$). Der genaue Verlauf dieser Sequenz ist allerdings noch nicht geklärt. Abb. 1.1 zeigt Entwicklungsrechnungen, die auf dem beschriebenen Szenario aufbauen, im Vergleich zu Ergebnissen aus der quantitativen Spektroskopie.

Neben dem Conti-Szenario sind auch weitere Entstehungskanäle für WR-Sterne denkbar. So kann die wasserstoffreiche Hülle eines Sterns z.B. auch durch Wechselwirkung in engen Doppelsternsystemen abgetragen werden. Generell kristallisiert sich in letzter Zeit mehr und mehr die zentrale Bedeudung der Rotation für die Entwicklung massereicher Sterne heraus. So ist ein Eintritt in die WN-Phase durch rotationsinduzierte Mischprozesse sogar schon während des zentralen Wasserstoffbrennens denkbar (Langer & Heger 1998; Maeder 1998). Weiterhin wird

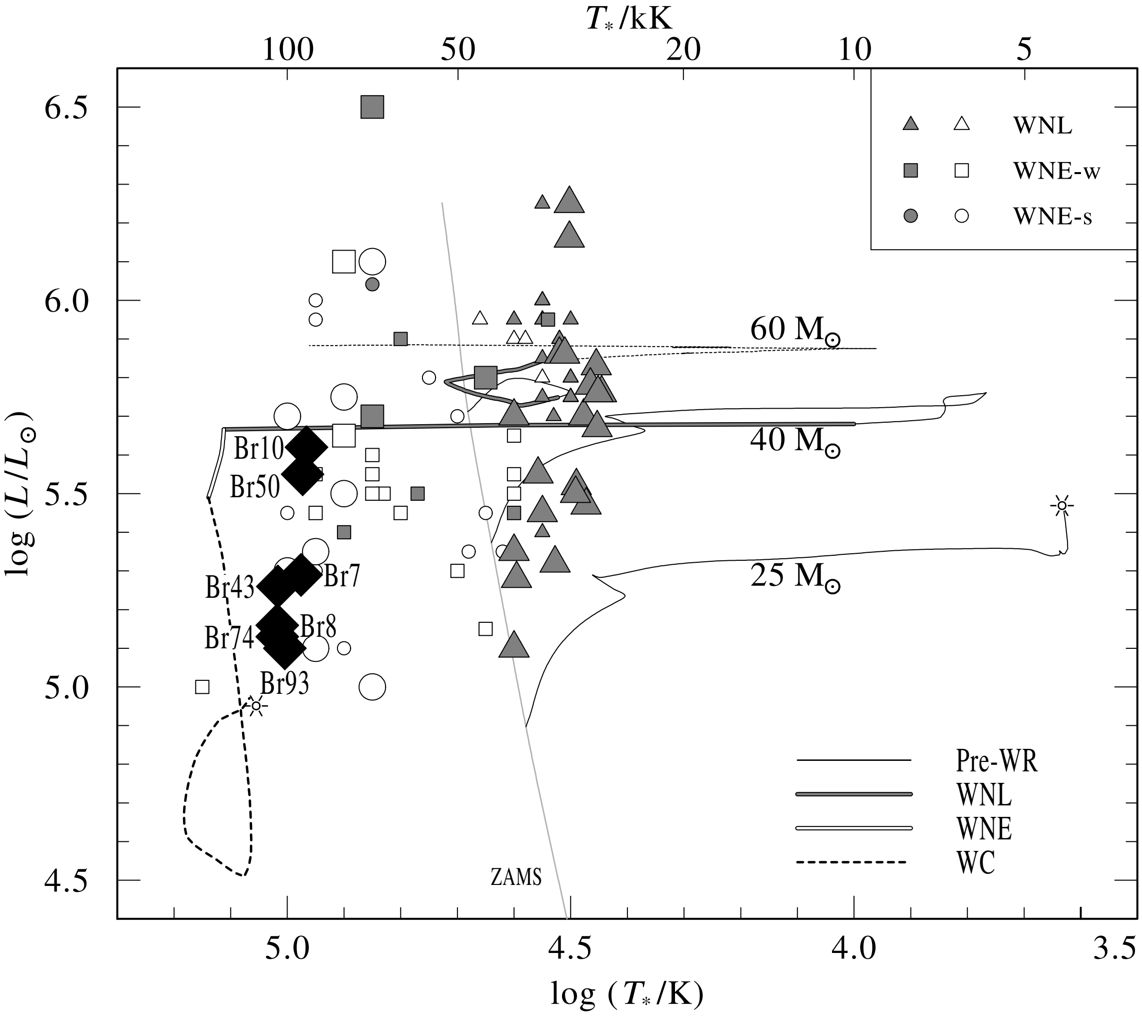

Abbildung 1.1: WR-Sterne im HRD aus Hamann et al. (1999); Kleine Symbole beziehen sich auf Galaktische WN-Sterne, große Symbole auf WN-Sterne in der LMC (Hamann & Koesterke 1999; Crowther & Smith 1997; Koesterke et al. 1991) und große schwarze Symbole auf WC/WO-Sterne in der LMC (Gräfener et al. 1998; Gräfener et al. 1999). Bei WN-Sternen wird zwischen solchen mit (grau) und ohne (weiß) Nachweis von Wasserstoff an der Oberfläche unterschieden. Zum Vergleich sind die Nullalter-Hauptreihe (ZAMS) und Entwicklungsrechnungen von Schaller et al. (1992) für 25 und 40 $M_{\odot}$ und Langer et al. (1994) für 60 $M_{\odot}$ dargestellt.

Rotation nahe der kritischen Rotationsgeschwindigkeit für instabile Phasen mit stark erhöhtem Massenverlust verantwortlich gemacht (Langer 1998).

Hat ein Stern das WC-Stadium erreicht, schreitet seine Entwicklung unabhängig von der Vorgeschichte mit abnehmender Masse (wegen des WR-Massenverlusts), und somit auch mit abnehmender Leuchtkraft fort. Dabei nimmt die (C+O)-Häufigkeit stetig zu. Ein WC-Stern besteht aus einem konvektiven Kern, der von einer ausgedehnten radiativen Hülle geringer Masse umgeben ist. Da die Zeitskala für das Abtragen dieser Hülle klein im Verhältnis zur Brennzeitskala des Sterns ist, bildet sich im Sterninnern ein nahezu homogenes chemisches Profil aus (Langer 1989b).

Durch eine Analyse von WC-Spektren werden in Kapitel 4 dieser Arbeit Parameter wie Leuchtkraft, Masse, Radius und chemische Oberflächenzusammensetzung für ein repräsentatives Sample von WC-Sternen bestimmt. Da die Entwicklung von WC-Sternen im wesentlichen durch die Größe und Zusammensetzung des stellaren Kerns bei Eintritt in die WR-Phase bestimmt wird, ist durch den Vergleich mit Entwicklungsrechnungen eine Einschränkung von Parametern möglich, die die Größe der konvektiven Kerne in Entwicklungsrechnungen bestimmen (Massenverlust vor dem WR-Stadium, genaue Behandlung der Konvektion). Darüber hinaus läßt die Analyse der beobachteten Häufigkeiten Rückschlüsse auf das Verhältnis der verschiedenen Reaktionen am Helium-Brennprozess zu.

1.2 WR-Massenverlust

Die Bestimmung der Massenverlustraten von WR-Sternen ist einerseits wegen der Auswirkungen auf die Sternentwicklung in der WR-Phase von Interesse, andererseits läßt eine Untersuchung der Abhängigkeit von anderen stellaren Parametern Rückschlüsse auf den Antriebsmechanismus der WR-Winde zu. Aufgrund der großen Leuchtkraft von WR-Sternen liegt die Annahme nahe, daß Strahlungsdruck als treibende Kraft für die WR-Winde verantwortlich ist. Eine Bestätigung dieser Annahme auf quantitativer Ebene ist aber bislang fehlgeschlagen. Das Hauptproblem besteht darin, daß der Windeffizienzfaktor $\eta = \dot{M} v_\infty / (L_\star / c)$, der das Verhältnis von mechanischem Windimpuls zum Impuls des Strahlungsfeldes angibt, für WR-Sterne sehr hohe Werte annimmt. Empirisch ermittelte Werte liegen im Bereich $\eta = 5 - 50$ (Hamann & Koesterke 1998; Koesterke & Hamann 1995; Gräfener et al. 1998). Das bedeutet, daß im Mittel jedes Photon zahlreichen Streuprozessen ausgesetzt sein muß, damit der erforderliche Impuls auf den Wind übertragen werden kann.

Zur Untersuchung solcher multiplen Streuprozesse wurde von Springmann (1994) ausgehend von einer rein statistischen Linienverteilung die Windbeschleunigung für ein WR-Modell mit einer Monte-Carlo-Methode berechnet. Die Resultate zeigen, daß die hohen beobachteten Effizienzfaktoren η prinzipiell erreicht werden können. Die dafür erforderlichen hohen Liniendichten deuten auf ein mehrfaches Umschlagen der vorherrschenden Ionisationsstufen hin, wie es in WR-Modellatmosphären durchaus auftritt. Springmann & Puls (1998) erreichen mit realistischen Liniendaten und einer grob genäherten Ionisationsschichtung Werte von $\eta \simeq 10$ für WN-Modelle.

In einen Non-LTE-Code werden multiple Streuprozesse erstmals von Schaerer und Schmutz berücksichtigt (Schaerer & Schmutz 1994; Schmutz 1997). Dabei verwenden die Autoren das in der Kieler Arbeitsgruppe entwickelte Non-LTE-Strahlungstransportprogramm zur Berechnung der Besetzungszahlen von Wasserstoff und Helium, und behandeln die Streuung an den Spektrallinien der Eisengruppenelemente ebenfalls im Rahmen Monte-Carlo-Methode. Die Ionisationsschichtung für die Eisengruppenelemente wird dabei abgeschätzt. In Verbindung mit der Absenkung der ermittelten Massenverlustraten durch eine Berücksichtigung von Inhomogenitäten, wird in den Außenbereichen der WR-Atmosphären ein Geschwindigkeitsfeld berechnet, das konsistent zur Beschleunigung durch den Strahlungsdruck auf Spektrallinien ist. Der Vergleich mit beobachteten Helium-Linienprofilen zeigt eine deutlich bessere Übereinstimmung, als er mit den sonst verwendeten Standard-Geschwindigkeitsgesetzen erreicht wird.

In der vorliegenden Arbeit werden die Linienübergänge der Eisengruppenelemente ($\sim 10^7$ Linienübergänge) im Rahmen der Opacity-Sampling-Methode mit korrektem Strahlungstransport behandelt. Im Verglich zu Monte-Carlo-Verfahren entfallen damit Unsicherheiten bezüglich der Anregungsbedingungen und der Ermittlung der Windbeschleunigung.

1.3 WC-Sterne in der LMC

WR-Sterne in der LMC sind aus mehreren Gründen besonders gut für spektroskopische Analysen geeignet. Durch die bekannte Entfernung und die geringe interstellare Extinktion ist ein direkter Vergleich von Modellflüssen mit der Beobachtung möglich, und Schwierigkeiten bezüglich der Definition des Kontinuums werden minimiert. Damit wird eine sehr zuverlässige Bestimmung von stellaren Parametern (besonderes von Leuchtkräften) möglich. Durch den Einsatz des Hubble-Space-Teleskops wird trotz der großen Entfernung ($50\,\mathrm{kpc} = 1.6\,10^5$ Lichtjahre) ein hohes Signal-zu-Rausch Verhältnis und eine sehr genaue Kalibrierung der beobachteten Strahlungsflüsse erreicht.

Im Rahmen der gängigen Theorie sind in der LMC wichtige Unterschiede bezüglich der Entwicklung massereicher Sterne im Vergleich zur Galaxis zu erwarten. Da OB-Sterne bei niedrigen Metallizitäten wie in der LMC ($Z = 0.008$) einen geringeren Massenverlust aufweisen (Maeder 1991), werden die äußeren, wasserstoffreichen Schichten bei Sternen in der LMC langsamer abgetragen als bei ihren Gegenstücken in der Galaxis. Demnach erreichen weniger LMC-Sterne das WC-Stadium. Diese WC-Sterne entstammen einem kleineren Anfangsmassenbereich, und zeigen aufgrund der längeren Brenndauer ein größeres Verhältnis der Brennprodukte Kohlenstoff und Sauerstoff zu Helium an ihrer Oberfläche.

Tatsächlich unterscheiden sich die WR-Populationen in der LMC und der Galaxis bezüglich der Anzahl von WN- zu WC-Sternen und der Verteilung der WC-Subtypen. Das Verhältnis WC/WN liegt in der LMC bei etwa 0.2 gegenüber einem Wert von 1 in der Galaxis. Zudem beobachtet man in der LMC nur frühe WC-Typen (hauptsächlich WC 4), wohingegen späte Typen (WC 7- WC 9) in der Galaxis sehr häufig vorkommen (Conti & Vacca 1990). Für eine Klärung der Frage, ob ein Zusammenhang zwischen den Oberflächenhäufigkeiten von WC-Sternen und dem beobachteten Spektraltyp besteht, sind Spektralanalysen der frühen Typen in der LMC sehr hilfreich.

Kapitel 2

Non-LTE-Strahlungstransport

In WR-Atmosphären werden die Besetzungswahrscheinlichkeiten der atomaren Energieniveaus wesentlich durch das Strahlungfeld bestimmt, und können daher nicht unter Annahme von lokalem thermischen Gleichgewicht (LTE) durch eine Temperatur beschrieben werden. Stattdessen wird das Strahlungsfeld in dieser Arbeit simultan mit den Ratengleichungen für das statistische Gleichgewicht (Stationarität der atomaren Besetzungsverhältnisse) und des radiativen Gleichgewichts (Konstanz des Strahlungsflusses) berechnet. Dabei werden alle relevanten Emissions-, Absorptions- und Streuprozesse berücksichtigt. Im folgenden werden die Gleichungssysteme, die diese Problemstellung für eine sphärisch-symmetrisch expandierende Sternatmosphäre bestimmen, erklärt. Eine umfassende Beschreibung der Grundlagen des Strahlungstransports in Sternatmosphären ist in Mihalas (1978) zu finden.

Die atmosphärischen Dichte-, Geschwindigkeits-, und Temperaturschichtungen werden in dieser Arbeit nicht hydrodynamisch selbstkonsistent berechnet, da der eigentliche Antriebsmechanismus für den starken WR-Massenverlust noch nicht bekannt ist. Stattdessen werden Dichte und Geschwindigkeit in parametrisierter Form vorgegeben. Die Elektronentemperatur wird zusammen mit den atomaren Besetzungszahlen durch die Forderung nach radiativem Gleichgewicht bestimmt. Die thermodynamischen Beiträge zum Energiegleichgewicht werden vernachlässigt, da WR-Atmosphären stark strahlungsdominiert sind.

Generell muß das hier behandelte Problem in zwei Teilen formuliert werden. Einerseits kann das Strahlungsfeld in Abhängigkeit vom Ort und der Frequenz für gegebene Materialkoeffizienten (Emissivität η, Opazität κ und Elektronentemperatur T_{e}) unter Anwendung der Strahlungstransportgleichung berechnet werden. Zur Berechnung der Materialkoeffizienten ist die Kenntnis der atomaren Besetzungszahlen notwendig. Ist andererseits das Strahlungsfeld gegeben, und sind somit die Raten für strahlungsinduzierte Prozesse bekannt, können die Besetzungszahlen und die Temperatur unter Anwendung der Gleichungen des statistischen- und radiativen Gleichgewichts berechnet werden. Im folgenden werden diese Gleichungssysteme beschrieben.

In Abschnitt 2.1 wird zunächst die Strahlungstransportgleichung für unterschiedliche Geometrien erklärt. Danach wird auf die speziellen Randbedingungen für Sternatmosphären eingegangen (Abschnitt 2.1.4) und schließlich die spezielle Form der Transportgleichung für die Momente des Strahlungsfeldes beschrieben (Abschnitt 2.1.5). Es folgt die Aufstellung der Gleichungen des statistischen- (Abschnitt 2.2) und des radiativen Gleichgewichts (Abschnitt 2.3).

2.1 Die Strahlungstransportgleichung

Zur Charakterisierung des Strahlungsfeldes wird die spezifische Intensität I_ν bei der Frequenz ν in Richtung $\vec{l}$ folgendermaßen definiert.

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu\,(\vec{l}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\nu = I_\nu\,\mu\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\nu \tag{2.1}$$

Dabei ist $\mathrm{d}E_\nu$ die Strahlungsenergie, die pro Frequenzintervall $\mathrm{d}\nu$ und pro Zeitintervall $\mathrm{d}t$ aus dem Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ durch eine Fläche $\mathrm{d}A$ hindurchtritt, die in Richtung $\vec{n}$ orientiert ist. $\mu = \vec{l}\cdot\vec{n}$ ist die Projektion der Richtung dieser Fläche auf die Ausbreitungsrichtung. Für gegebene Emissions- und Absorptionskoeffizienten (η und κ) gilt in einem nichtbewegten kartesischen Bezugssystem die Strahlungstransportgleichung in folgender Form

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}z} = \eta_\nu - \kappa_\nu\,I_\nu \tag{2.2}$$

mit dem Wegelement $\mathrm{d}z$ in Ausbreitungsrichtung. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \tag{2.3}$$

mit der Quellfunktion $S_\nu = \eta_\nu/\kappa_\nu$ und der optischen Tiefe $\mathrm{d}\tau_\nu = \kappa_\nu\,\mathrm{d}z$, läßt sich für gegebene η_ν und κ_ν die Intensität entlang z integrieren. Mit einem gegebenen Randwert $I_\nu(z_0)$ lautet die "Formale Lösung" von Gleichung (2.3)

$$I_\nu(z) = I_\nu(z_0)\,e^{-\tau_\nu(z_0,z)} + \int_{\tau_\nu(z_0,z)}^{0} S_\nu\,e^{-\tau'_\nu}\,\mathrm{d}\tau'_\nu \tag{2.4}$$

$$\tau_\nu(z_1,z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \kappa_\nu\,\mathrm{d}z \tag{2.5}$$

2.1.1 Kohärente Streuung

Die einfache Form der obigen Gleichung gilt nur für feste η_ν und κ_ν. Sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten der atomaren Energieniveaus bekannt (z.B. durch Angabe einer Temperatur), läßt sich der Strahlungstransport durch wahre Absorptions- und Emissionsprozesse auf diese Art beschreiben. Bei der Berücksichtigung von Streuprozessen, wie der Streuung an freien Elektronen (Thomsonstreuung), bekommt die Gleichung jedoch die Form einer Integrodifferentialgleichung. Nimmt man an, daß Photonen an freien Elektronen kohärent und isotrop gestreut werden, bekommen η_ν und κ_ν die Form

$$\kappa_\nu = \kappa_\nu^{\mathrm{true}} + \kappa_{\mathrm{th}} \tag{2.6}$$

$$\eta_\nu = \eta_\nu^{\mathrm{true}} + \kappa_{\mathrm{th}}\frac{1}{4\pi}\oint I_\nu\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.7}$$

mit den wahren Emissions- und Absorptionskoeffizienten η_ν^{true} und $\kappa_\nu^{\mathrm{true}}$ und der Thomson-Opazität

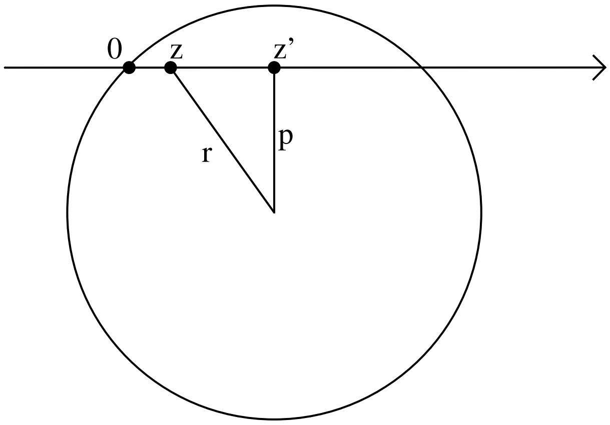

Abbildung 2.1: In sphärischer Geometrie wird zu den Koordinaten (r, p) übergegangen (Gleichung 2.9). Dazu wird die Ableitung entlang der z-Achse in Gleichung (2.2) auf diese Koordinaten transformiert (Gleichung 2.11).

$$\kappa_{\rm th} = n_{\rm e}\, \frac{8\pi}{3}\, r_o^2 = n_{\rm e}\, \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi m_{\rm e} c^2} \right)^2 . \tag{2.8}$$

2.1.2 Sphärische Geometrie

In sphärischer Geometrie wird zu den Koordinaten (r, p) übergegangen. Der Impaktparameter p gibt dabei die minimale Entfernung des betrachteten Strahls vom Zentrum, und r die Radialkoordinate des betrachteten Aufpunkts an. Der Vektor $\vec{n}$ in Gleichung (2.1) wird in radialer Richtung definiert, so daß $\mu = \vec{l} \cdot \vec{n}$ die radiale Projektion der Ausbreitungsrichtung des betrachteten Strahls angibt. Entsprechend Abb. 2.1 gilt

$$r(z, p) = \sqrt{(z - z')^2 + p^2},\ \mu(z, p) = \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + p^2}} \tag{2.9}$$

Für die Koordinatentransformation in das System (r, p) werden folgende Ableitungen benötigt

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \mu,\ \frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{1 - \mu^2}{r} \tag{2.10}$$

Die Ableitung der Intensität in Ausbreitungsrichtung wird damit

$$\frac{{\rm d}I_\nu}{{\rm d}z} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r}\mu + \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu}\frac{1 - \mu^2}{r} \tag{2.11}$$

und mit Gleichung (2.2) erhält man die Strahlungstransportgleichung in sphärischer Geometrie

$$\mu\frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} = \eta_\nu - \kappa_\nu I_\nu \tag{2.12}$$

2.1.3 Sphärische Expansion

Für expandierende Atmosphären ist eine Beschreibung im mitbewegten Koordinatensystem (comoving frame, CMF) vorteilhaft, da die Materialkoeffizienten in diesem System richtungsunabhängig sind (Dopplereffekt). Die Intensität I_ν wird dazu im CMF definiert (siehe Gleichung 2.1). Da lediglich kleine Geschwindigkeiten im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit betrachtet werden sollen (im Bereich von $0.01\,c$ für WR-Atmosphären), können relativistische Effekte vernachlässigt werden (Mihalas et al. 1976a; Mihalas et al. 1976b). Eine Herleitung der Transportgleichung mit einer Lorentztransformation aller Größen im CMF kann z.B. in Baschek et al. (1997) nachgelesen werden. Berücksichtigt man nur den Dopplereffekt, muß eine Koordinatentransformation zwischen der Frequenz ν_{obs} im Beobachtersystem und ν im CMF durchgeführt werden.

$$\nu(r,\mu) = \nu_{\text{obs}} \left(1 + \mu \frac{v(r)}{c}\right) \tag{2.13}$$

Da in dieser Arbeit für die Linienverbreiterung eine konstante Verbreiterungsgeschwindigkeit v_{D} angenommen wird (siehe Gleichung (3.24)), ist es für die spätere Anwendung vorteilhaft, zur dimensionslosen Frequenz x in Einheiten der Dopplergeschwindigkeit v_{D} überzugehen, die differentiell definiert wird

$$\mathrm{d}x = \frac{v_{\text{D}}}{c} \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} \tag{2.14}$$

Für den Absolutwert von x erhält man mit $x = 0$ bei der Bezugsfrequenz ν_{ref}

$$x = \frac{v_{\text{D}}}{c} \ln \frac{\nu}{\nu_{\text{ref}}} \tag{2.15}$$

Zur Berechnung von x im CMF für eine gegebene Frequenz ν_{obs} im Beobachtersystem setzt man nun in Gleichung (2.15) $\nu_{\text{ref}} = \nu_{\text{obs}}$. Wegen $\frac{\nu}{\nu_{\text{obs}}} \approx 1$ erhält man dann mit ν aus Gleichung (2.13)

$$x = \frac{v_{\text{D}}}{c} \left(\frac{\nu}{\nu_{\text{obs}}} - 1\right) = \mu \frac{v(r)}{v_{\text{D}}} = \mu\, V(r) \tag{2.16}$$

mit den Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \mu \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}, \; \frac{\partial x}{\partial \mu} = V \tag{2.17}$$

Dabei ist $V(r) = v(r)/v_{\text{D}}$. Diese Ableitungen sind unabhängig von der gewählten Bezugsfrequenz. Mit Gleichung (2.11) ergibt sich deshalb für die Ableitung entlang z in Ausbreitungsrichtung

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r}\mu + \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu}\frac{1-\mu^2}{r} + \frac{\partial I_\nu}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\mu + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{1-\mu^2}{r}\right) \tag{2.18}$$

und man erhält mit Gleichung (2.2) die Transportgleichung für sphärische Expansion im CMF

$$\mu\frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} + \left((1-\mu^2)\frac{V}{r} + \mu^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\partial I_\nu}{\partial x} = \eta_\nu - \kappa_\nu I_\nu \tag{2.19}$$

2.1.4 Randbedingungen für Sternatmosphären

Die Sternatmosphäre wird als der Bereich der Oberflächenschichten eines Sterns definiert, in dem das emergente Spektrum des Sterns entsteht, also eine Abstrahlung von Photonen stattfindet. Das bedeutet, daß Strahlung und Materie in diesem Bereich entkoppeln, und das Strahlungsfeld nicht mehr dem Planck-Strahlungsfeld entspricht. Zur Lösung von Gleichung (2.19) müssen Randwerte für die von innen bzw. außen einlaufende Intensität vorgegeben werden. In diese Randwerte gehen grundlegende Parameter des zu betrachtenden Sterns ein.

Die relevanten Parameter für die Randbedingungen sind die Leuchtkraft $L_\star$ und der stellare Radius $R_\star$. Dabei wird die Leuchtkraft normalerweise durch eine Effektivtemperatur $T_\star$ angegeben, die der Temperatur eines Schwarzen Körpers mit der Leuchtkraft und dem Radius des betrachteten Sterns entspricht.

$$T_\star = \left(\frac{L_\star}{4\pi\,\sigma\,R_\star^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{2.20}$$

Am inneren Rand wird die einlaufende Intensität im Rahmen der Diffusionsnäherung vorgegeben (Abschnitt 2.1.4). Das ist dann möglich, wenn der innere Rand so tief im Innern des Sterns definiert ist, daß das einlaufende Strahlungsfeld im Grenzfall starker Kopplung (Strahlungdiffusion) beschrieben werden kann. Der äußere Rand der Atmosphäre muß hingegen so weit außen gewählt werden, daß Rückstreueffekte klein genug sind, um auf einfache Weise berücksichtigt werden zu können (Abschnitt 2.1.4). Sind die einlaufenden Strahlungsfelder an beiden Rändern gegeben, kann Gleichung (2.19) integriert werden.

Diffusionsnäherung am inneren Rand

Zur Berechnung von $I_\nu(\mu)$ bei der Radialkoordinate R für große optische Tiefen definiert man die radiale optische Tiefe $\mathrm{d}\tau = \kappa_\nu \mathrm{d}r$, mit $\tau(R) = 0$. Mit $\mathrm{d}z = \mathrm{d}r/\mu$ (Gleichung 2.10) ergibt Gleichung (2.4) für große τ

$$I_\nu(\mu) = \int_0^\infty S_\nu(\tau)\, e^{-\tau/\mu}\, \mathrm{d}(\tau/\mu) \tag{2.21}$$

Entwicklung von S um R ergibt

$$\begin{aligned} I_\nu(\mu) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n S_\nu}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_R \tau^n\, e^{-\tau/\mu}\,\mathrm{d}(\tau/\mu) &= \sum_{n=0}^\infty \left.\frac{\mathrm{d}^n S_\nu}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_R \frac{\mu^n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^\infty \mu^n \left.\frac{\mathrm{d}^n S_\nu}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_R \end{aligned} \tag{2.22}$$

Für große κ kann die Reihenentwicklung abgebrochen werden.

$$I_\nu(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left.\frac{\mathrm{d}^n S_\nu}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{\kappa_\nu^n} \left.\frac{\mathrm{d}^n S_\nu}{\mathrm{d}r^n}\right|_R = S_\nu + \frac{\mu}{\kappa_\nu} \left.\frac{\mathrm{d}S_\nu}{\mathrm{d}r}\right|_R \tag{2.23}$$

Am inneren Rand einer Sternatmosphäre ist das Strahlungsfeld thermisch, also ist $S_\nu = B_\nu$ mit dem Planck-Strahlungsfeld B_ν.

$$I_\nu = B_\nu + \frac{\mu}{\kappa_\nu}\frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}r},\ J_\nu = B_\nu,\ H_\nu = \frac{1}{3\kappa_\nu}\frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}r} \tag{2.24}$$

Zur Vorgabe einer bestimmten Leuchtkraft am inneren Rand integriert man nun den Fluß über die Frequenz, und erhält

$$\mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu \,\mathrm{d}\nu = -\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}\nu = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\left(\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}T}\mathrm{d}\nu\right) \tag{2.25}$$

Mit der Definition für die Rosseland gemittelte Opazität κ_R

$$\frac{1}{\kappa_\mathrm{R}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}T}\,\mathrm{d}\nu}{\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}T}\,\mathrm{d}\nu} \tag{2.26}$$

wird daraus

$$\mathcal{F} = -\frac{16}{3}\frac{\sigma T^3}{\kappa_\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \tag{2.27}$$

Adjustiert man $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ so, daß ein bestimmter Sollfluß erreicht wird, erhält man aus Gleichung (2.24) die einlaufende Intensität am inneren Rand.

Rückstreuung am äußeren Rand

Die rückgestreute Intensität am äußeren Rand wird in dieser Arbeit entweder vernachlässigt ($I^- = 0$), oder unter Annahme einer quadratisch abfallenden Quellfunktion und Dichteschichtung bei konstanter Opazität berechnet. Dazu wird die Opazität κ_B und die Quellfunktion S_B am äußeren Rand r_B entweder direkt am äußeren Randpunkt berechnet, oder von innen her extrapoliert. Die Optische Tiefe von einem Aufpunkt r ins Unendliche ist unter diesen Annahmen

$$\tau(r) = \int_r^\infty \kappa_\mathrm{B}\frac{r_\mathrm{B}^2}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = \frac{\kappa_\mathrm{B} r_\mathrm{B}^2}{r} \tag{2.28}$$

und mit $\tau_B = \tau(r_B)$ läßt sich die Quellfunktion dann folgendermaßen schreiben.

$$S(r) = S_\mathrm{B}\frac{r_\mathrm{B}^2}{r^2} = S_\mathrm{B}\frac{\tau(r)^2}{\tau_\mathrm{B}^2} \tag{2.29}$$

So erhält man für die rückgestreute Intensität

$$I^-(r_\mathrm{B}) = \int_0^{\tau_\mathrm{B}} S_\mathrm{B}\frac{\tau^2}{\tau_\mathrm{B}^2}\,e^{\tau-\tau_\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\tau = S_\mathrm{B}\left(1 - \frac{2}{\tau_\mathrm{B}} + \frac{2}{\tau_\mathrm{B}^2} - \frac{2\,e^{-\tau_\mathrm{B}}}{\tau_\mathrm{B}^2}\right) \tag{2.30}$$

2.1.5 Die Momentengleichungen

Durch eine Integration der Transportgleichung über den Winkel μ erhält man eine Formulierung, in der die Winkelabhängigkeit des Strahlungsfeldes separiert ist, und der Streuterm verschwindet. Wird diese Formulierung in einem iterativen Verfahren verwendet, muß der winkelabhängige Strahlungstransport nicht bei jeder Iteration gelöst werden. Damit wird neben der konsistenten Behandlung der Thomsonstreuung eine erhebliche Ersparnis an Rechenzeit erreicht.

Die Momente des Strahlungfeldes

Die Momente des Strahlungsfeldes sind folgendermaßen definiert:

$$[J_\nu,\, H_\nu,\, K_\nu,\, N_\nu] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[1,\, \mu,\, \mu^2,\, \mu^3] I_\nu \, d\mu \tag{2.31}$$

Für das 0. und das 1. Moment besteht ein direkter Zusammenhang zur Energiedichte und zum Fluß des Strahlungsfeldes

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu,\ \mathcal{F}_\nu = 4\pi\, H_\nu \tag{2.32}$$

Die Eddingtonfaktoren $f = K/J$ und $g = N/H$ sind i.a. schwach variierende Größen, die z.B. für den Grenzfall eines Isotropen Strahlungsfeldes ($I(\mu) = \mathrm{Const.}$, wie in den Innenbereichen einer Sternatmosphäre) die Werte

$$f = \frac{1}{3},\ g = \frac{1}{2} \tag{2.33}$$

annehmen, und für ein nach außen gerichtetes Strahlungsfeld ($I(\mu) = I_0\, \delta(1-\mu)$, wie in den Außenbereichen einer Sternatmosphäre)

$$f = 1,\ g = 1 \tag{2.34}$$

Formulierung der Momentengleichungen

Integriert man die Transportgleichung (2.19) über μ und definiert $\tilde{H} = r^2 H_\nu$, $\tilde{J} = r^2 J_\nu$, $\tilde{S} = r^2 S_\nu$, erhält man die 0. Momentengleichung

$$0.: \ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial r} + \left(\frac{V}{r} - \frac{d\,V}{d\,r}\right)\frac{\partial (f\tilde{J})}{\partial x} - \frac{V}{r}\frac{\partial \tilde{J}}{\partial x} = \kappa_\nu(\tilde{S} - \tilde{J}) \tag{2.35}$$

Durch vorherige Multiplikation von Gleichung (2.19) mit μ ergibt sich die 1. Momentengleichung

$$1.: \ \frac{\partial (f\tilde{J})}{\partial r} + \frac{3f-1}{r}\tilde{J} + \left(\frac{V}{r} - \frac{d\,V}{d\,r}\right)\frac{\partial (g\tilde{H})}{\partial x} - \frac{V}{r}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -\kappa_\nu\, \tilde{H} \tag{2.36}$$

Mit dem Sphärizitätsfaktor q

$$\frac{\partial \ln(r^2 q)}{\partial r} = \frac{3f-1}{fr} \tag{2.37}$$

erhält man schließlich für die 1. Momentengleichung

$$1.: \ \frac{\partial(qf\tilde{J})}{q\partial r} + \left(\frac{V}{r} - \frac{dV}{dr}\right)\frac{\partial(g\tilde{H})}{\partial x} - \frac{V}{r}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -\kappa_\nu \tilde{H} \tag{2.38}$$

Unter der Annahme isotroper Streuung an freien Elektronen gilt für die Emissivität und die Opazität in Gleichung (2.19) mit dem Streuterm aus Gleichung (2.7)

$$\eta_\nu = \eta_\nu^{\mathrm{true}} + \kappa_{\mathrm{th}} J_\nu,\ \kappa_\nu = \kappa_\nu^{\mathrm{true}} + \kappa_{\mathrm{th}} \tag{2.39}$$

Der Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.35) kann damit folgendermaßen umgeschrieben werden

$$\kappa_\nu(S_\nu - J_\nu) = \eta_\nu - \kappa_\nu J_\nu = \eta_\nu^{\mathrm{true}} + \kappa_{\mathrm{th}} J_\nu - \left(\kappa_\nu^{\mathrm{true}} + \kappa_{\mathrm{th}}\right) J_\nu = \eta_\nu^{\mathrm{true}} - \kappa_\nu^{\mathrm{true}} J_\nu \tag{2.40}$$

der Streuterm $\kappa_{\mathrm{th}} J_\nu$ fällt somit unter der Annahme isotroper Streuung aus den Momentengleichungen heraus.

2.2 Statistisches Gleichgewicht

Bei vorgegebenem Strahlungsfeld werden die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten durch die Gleichungen des statistischen Gleichgewichts bestimmt. Setzt man stationäre Anregungsbedingungen voraus, muß die Summe der Zugänge zu einem Energieniveau i der Summe der Abgänge entsprechen.

$$n_i \sum_{j\neq i}^{N} P_{ij} - \sum_{j\neq i}^{N} n_j P_{ji} = 0 \tag{2.41}$$

dabei ist N die Summe der Energieniveaus, n_i die Besetzungswahrscheinlichkeit von Niveau i und P_{ij} die Übergangsrate von i nach j. Die Übergangsraten setzen sich aus spontanen (A_{ij}), strahlungsinduzierten ($B_{ij}\,\bar{J}_{ij}$) und stoßinduzierten Prozessen (C_{ij}) zusammen.

$$P_{ij}(\vec{n}, \bar{J}_{ij}) = A_{ij} + B_{ij}\,\bar{J}_{ij} + C_{ij}(\vec{n}) \tag{2.42}$$

Die $\bar{J}_{ij}$ sind über eine Profilfunktion $\phi(\nu)$ gemittelte Strahlungsintensitäten, die die Frequenzabhängigkeit des betrachteten Prozesses beinhalten

$$\bar{J}_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} J_\nu \phi_{ij}(\nu)\,\mathrm{d}\nu \tag{2.43}$$

Für gegebene $\bar{J}_{ij}$ erhält man damit ein Gleichungssystem von der Form

$$\vec{n} \cdot \mathcal{P}(\vec{n}, \bar{\mathcal{J}}) = \vec{b} \tag{2.44}$$

Durch die Nebenbedingung $\sum_{ij} P_{ij} = 0$ wird dieses Gleichungssystem allerdings singulär, so daß eine Spalte der Matrix P_{ij} durch die Forderung nach konstanter Teilchenzahl $\sum_{i=1}^{N} n_i = 1$ ersetzt werden muß. Die genaue Form der Übergangskoeffizienten hängt von der Art und Weise der Berücksichtigung der entsprechenden Prozesse ab. In Abschnitt 3.2 wird darauf genau eingegangen.

2.3 Radiatives Gleichgewicht

Unter radiativem Gleichgewicht ist die Bedingung zu verstehen, daß pro Volumenelement genausoviel Strahlungsenergie emittiert wird wie absorbiert wird, also keine Nettoaufheizung bzw. -Abkühlung stattfindet. Die pro Volumen, Frequenz und Zeiteinheit emittierte Energie ist $\frac{4\pi}{c}\eta_\nu$, und die entsprechende absorbierte Energie $\frac{4\pi}{c}\kappa_\nu J_\nu$. Damit entspricht die Forderung nach radiativem Gleichgewicht

$$\int_0^\infty (\eta_\nu - \kappa_\nu J_\nu)\, \mathrm{d}\nu = 0 \tag{2.45}$$

Im statischen Fall (also ohne ein Geschwindigkeitsfeld) ist diese Forderung äquivalent zur Forderung nach der Konstanz des integrierten Strahlungsflusses (Abschnitt 2.3.1). Im bewegten Fall leistet das Strahlungsfeld Arbeit, da durch den Strahlungsdruck Impuls vom Strahlungsfeld auf die Materie übertragen wird. In Abschnitt 2.3.2 wird gezeigt, daß die Annahme von radiativem Gleichgewicht im CMF zu einer Konstanz des Energieflusses einschließlich der vom Strahlungsfeld pro Zeiteinheit geleisteten Arbeit führt. Für rein durch Strahlungsdruck getriebene Winde führt die Annahme von radiativem Gleichgewicht im CMF also zu einer Konstanz des Gesamtenergieflusses.

$$L = L_{\mathrm{rad}}(r) + \dot{M}\frac{v(r)^2}{2} \tag{2.46}$$

2.3.1 Radiatives Gleichgewicht im statischen Fall

Ohne das Vorhandensein eines Geschwindigkeitsfeldes sind die Emissions- und Absorptionskoeffizienten isotrop. Integriert man Gleichung (2.12) über μ und multipliziert mit r^2, erhält man

$$\frac{\partial(r^2 H_\nu)}{\partial r} = r^2(\eta_\nu - \kappa_\nu J_\nu) \tag{2.47}$$

Integriert man nun über ν, erhält man für die Leuchtkraft L

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\partial(r^2 \mathcal{F}_\nu)}{\partial r}\, \mathrm{d}\nu = 16\pi^2 \int_0^\infty \frac{\partial(r^2 H_\nu)}{\partial r}\, \mathrm{d}\nu = 16\pi^2 r^2 \int_0^\infty (\eta_\nu - \kappa_\nu J_\nu)\, \mathrm{d}\nu \tag{2.48}$$

Die Forderung nach radiativem Gleichgewicht führt somit zur Flußkonstanz $\frac{\partial L}{\partial r} = 0$.

2.3.2 Radiatives Gleichgewicht im CMF

Fordert man in einer bewegten Atmosphäre radiatives Gleichgewicht im CMF, führt dies im Allgemeinen zu $\frac{\partial L}{\partial r} \neq 0$. Wie im folgenden erläutert wird, handelt es sich bei der linken Seite von Gleichung (2.45) um die zeitliche Komponente des Vierer-Kraftdichtevektors G für das Strahlungsfeld. Der Wert von $\frac{\partial L}{\partial r}$ im Beobachtersystem läßt sich dann mittels einer Lorentztransformation berechnen.

Bezüglich der Lorentztransformation in ein Bezugssystem 0 gelten folgende Beziehungen für die Größen des Strahlungsfeldes (Mihalas & Mihalas 1984)

$$I_\nu = (\nu/\nu_0)^3 I_\nu^0,\ \eta = (\nu/\nu_0)^2\eta^0,\ \kappa = (\nu_0/\nu)\kappa^0 \tag{2.49}$$

In sphärischer Symmetrie gelten mit der Geschwindigkeit in radialer Richtung ($\mu = 1$) die folgenden Beziehungen für $\mathrm{d}\nu$, $\mathrm{d}\mu$ und $\mathrm{d}\phi$ ($\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\Omega$, siehe Gleichung(2.1)).

$$\mathrm{d}\nu = (\nu/\nu_0)\mathrm{d}\nu_0,\ \mathrm{d}\mu = (\nu_0/\nu)^2\mathrm{d}\mu_0,\ \mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\phi_0 \tag{2.50}$$

Damit erhält man die Invariante

$$\nu\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega = \nu\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\phi = \nu_0\mathrm{d}\nu_0\mathrm{d}\mu_0\mathrm{d}\phi_0 = \nu_0\mathrm{d}\nu_0\mathrm{d}\Omega_0 \tag{2.51}$$

Das Integral über den Vektor $\frac{\nu}{c}[1,\ \vec{n}]$ (Photonimpuls$/h$) multipliziert mit den Invarianten $\nu\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega$ und der Differenz von $\kappa\, I/\nu^2$ und η/ν^2 ergibt wieder einen Vektor, und zwar den Kraftdichtevektor G. Legt man im Fall von sphärischer Symmetrie die 1. räumlichen Koordinate in radiale Richtung, ist $n_1 = \mu$, und man erhält für die 2. und 3. räumliche Komponente von G aus Symmetriegründen den Wert 0.

$$G = \int_0^\infty \frac{1}{c}\oint [1,\ \vec{n}]\ (\kappa_\nu I_\nu - \eta_\nu)\,\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu = \frac{2\pi}{c}\int_0^\infty\int_{-1}^1 [1,\ \mu,\ 0,\ 0]\ (\kappa_\nu I_\nu - \eta_\nu)\,\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu \tag{2.52}$$

Im CMF (Index 0) sind κ_ν^0 und η_ν^0 isotrop, und es ergibt sich aus Gleichung (2.52)

$$G_0^0 = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty \left(\kappa_\nu^0 J_\nu^0 - \eta_\nu^0\right)\,\mathrm{d}\nu \tag{2.53}$$

$$G_1^0 = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty \kappa_\nu^0 H_\nu^0\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{c}\int_0^\infty \kappa_\nu^0 \mathcal{F}_\nu^0\,\mathrm{d}\nu = f_{\mathrm{rad}} \tag{2.54}$$

Die Komponente G_1^0 ist die Kraft pro Volumenelement, die durch die Absorption von Strahlung auf die Materie übertragen wird. Die Forderung nach radiativem Gleichgewicht im CMF entspricht damit $G_0^0 = 0$. Die 0-Komponente von G im Beobachtersystem erhält man durch Lorentztransformation. In erster Ordnung v/c ergibt sich

$$G_0 = \gamma(G_0^0 + \beta G_1^0) = -\frac{v}{c}\,f_{\mathrm{rad}} \tag{2.55}$$

Zur Ermittlung der resultierenden Änderung des Strahlungsflusses im Beobachtersystem integriert man Gleichung (2.12) über μ und über ν, und erhält entsprechend (2.52)

$$\int_0^\infty \frac{\partial(r^2 H_\nu)}{\partial r}\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \int_{-1}^1 r^2(\eta_\nu - \kappa_\nu J_\nu)\,\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu = r^2\,\frac{c}{4\pi}\,G_0 \tag{2.56}$$

Für die Änderung der Leuchtkraft im Beobachtersystem ergibt sich dann mit Gleichung (2.55)

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 16\pi^2 \int_0^\infty \frac{\partial(r^2 H_\nu)}{\partial r}\,\mathrm{d}\nu = -4\pi r^2(c\,G_0) = -4\pi r^2\,vG_1^0 = -4\pi r^2\,v f_{\mathrm{rad}} \tag{2.57}$$

Die Änderung der Leuchtkraft entspricht also genau der durch den Strahlungsdruck pro Zeiteinheit geleisteten Arbeit. Für rein strahlungsdruckgetriebene Winde ergibt sich damit also eine Konstanz des Gesamtflusses an Strahlungs- und Windenergie.

Kapitel 3

Modellatmosphären

Die Modellrechnungen in dieser Arbeit basieren auf dem Sternatmosphären-Code, der in der Kieler Arbeitsgruppe um W.-R. Hamann entwickelt wurde (Koesterke et al. 1992; Hamann et al. 1992; Koesterke & Hamann 1995; Leuenhagen & Hamann 1994; Leuenhagen et al. 1996). Es werden Standard-Modellannahmen wie sphärisch-symmetrische Expansion und Stationarität der Anregungsbedingungen in der Atmosphäre verwendet. Der Strahlungstransport wird im mitbewegten Koordinatensystem (CMF) gelöst. Das Strahlungsfeld wird im Non-LTE, d.h. konsistent mit den Gleichungen des statistischen- und radiativen Gleichgewichts, berechnet. Dabei wird der sog. ALI-Formalismus verwendet ("accelerated lambda iteration", vgl. Hamann (1985; 1986; 1987)). Die statistischen Gleichungen werden für komplexe Modellatome von Helium, Kohlenstoff und Sauerstoff gelöst. Im Rahmen dieser Arbeit wird zusätzlich das Line-Blanketing durch $\sim 10^7$ Linienübergänge der Elemente der Eisengruppe berücksichtigt. Nach der Berechnung der Besetzungszahlen und der Elektronentemperatur wird der emergente Fluß für den beobachteten Spektralbereich durch die Lösung des Formalen Integrals im Beobachtersystem ermittelt.

Jede Modellatmosphäre wird durch einen begrenzten Satz von Parametern definiert: Die stellare Temperatur $T_\star$, den stellaren Radius $R_\star$, die Massenverlustrate $\dot{M}$, die Windendgeschwindigkeit v_∞ und die chemische Zusammensetzung, die in dieser Arbeit in Massenbruchteilen von Helium, Kohlenstoff, Sauerstoff und Eisen angegeben wird. Inhomogenitäten werden durch den Dichtekontrast D berücksichtigt. Die Parameter $R_\star$, $\dot{M}$, v_∞ und D sind über den sog. transformierten Radius R_t miteinander verknüpft. Werden die restlichen Parameter festgehalten, zeigen die Modellspektren für ein gegebenes R_t dieselben Linienäquivalentbreiten.

Im folgenden wird zunächst auf die grundlegenden Modellparameter eingegangen (Abschnitt 3.1). Dann werden die berücksichtigten Prozesse und Materialkoeffizienten beschrieben, die in die Lösungen für den Strahlungstransport und die statistischen Gleichungen eingehen (Abschnitt 3.2). In Abschnitt 3.3 wird dann das Lösungsverfahren für den Strahlungstransport erläutert. Schließlich folgt die Berechnung der atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten durch lösen der statistischen Gleichungen und die Ankopplung an den Strahlungstransport (ALI-Verfahren, Abschnitt 3.4).

Element X	Z	n_X/n_{Fe}
Sc	21	$3.09\,10^{-5}$
Ti	22	$2.40\,10^{-3}$
V	23	$2.95\,10^{-4}$
Cr	24	$1.29\,10^{-2}$
Mn	25	$9.33\,10^{-3}$
Fe	26	1.0
Co	27	$2.24\,10^{-3}$
Ni	28	$4.79\,10^{-2}$

Tabelle 3.1: Solare Häufigkeiten der Elemente der Eisengruppe relativ zu n_{Fe}.

3.1 Grundlegende Modellparameter

Die Parameter, die eine Modellatmosphäre definieren, können in mehrere Parametersätze eingeteilt werden. Leuchtkraft, Radius und Oberflächenchemie sind grundlegende Eigenschaften des stellaren Kerns, die durch einen Vergleich mit Ergebnissen von Sternentwicklungsrechnungen wichtige Beiträge zum Verständnis des Entwicklungsstatus von WR-Sternen liefern können. Die Parameter, die den Dichte- und Geschwindigkeitsverlauf in der expandierenden Atmosphäre beschreiben, liefern hingegen Informationen über den Massenverlust von WR-Sternen, dessen Entstehungsmechanismen noch weitestgehend ungeklärt sind.

3.1.1 Leuchtkraft und Radius

Die stellare Leuchtkraft $L_\star$ und der Radius $R_\star$ sind grundlegende Eigenschaften des stellaren Kerns. Der stellare Radius $R_\star$ wird bei einem Rosseland'schen Mittelwert der optischen Tiefe von $\tau_R = 20$ durch Integration von $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{R}} = \kappa_{\mathrm{R}}\mathrm{d}r$ definiert (siehe Gleichung (2.26)). Die stellare Temperatur $T_\star$ ergibt sich aus $L_\star$ und $R_\star$ nach Gleichung (2.20). Da WR-Atmosphären räumlich sehr ausgedehnt sind, ist die Definition einer Effektivtemperatur vom Bezugsradius abhängig. Die hier gewählte Definition mit $R_\star$ als Bezugsradius weicht insofern von der üblichen Definition einer Effektivtemperatur ab, daß $T_\star$ keinen typischen Wert für die Elektronentemperatur in der Entstehungsregion des emergenten Spektrums angibt. Ein entsprechender Bezugsradius bei $\tau_R \simeq \frac{2}{3}$ liegt für die in dieser Arbeit untersuchten WC-Sterne im Bereich von $2 - 5\,R_\star$.

3.1.2 Die Elementhäufigkeiten an der Oberfläche

Die chemische Zusammensetzung der Atmosphäre wird in dieser Arbeit in Form von Massenbruchteilen definiert (β_{He}, β_{C}, β_{O}, β_{Fe}). Die untersuchten Objekte vom Spektraltyp WC zeigen die Reaktionsprodukte des Heliumbrennens an ihrer Oberfläche, bestehen somit zum Großteil aus He, C und O. Die Elemente der Eisengruppe (Cr, Co, Fe, Mn, Ni, Sc, Ti, V) machen zwar nur einen geringen Massenbruchteil ($\simeq 0.001$) aus, haben jedoch durch ihre komplexen Linienspektren einen signifikanten Einfluß auf die ionisierenden Flüsse im UV und die Dynamik von WR-Atmosphären. Innerhalb der Eisengruppe werden solare Häufigkeiten in Bezug zur Eisenhäufigkeit β_{Fe} angenommen (Tabelle 3.1).

3.1.3 Dichte- und Geschwindigkeitsverlauf

In einer sphärisch expandierenden Atmosphäre sind Dichte- und Geschwindigkeitsverlauf durch die Kontinuitätsgleichung gemäß $\rho\, v\, r^2 = \mathrm{Const.}$ gekoppelt. Das Geschwindigkeitsfeld wird ab dem Radius R_0 nach dem "β-Gesetz"

$$v(r) = v_\infty \, \left(1 - \frac{R_0}{r}\right)^\beta \tag{3.1}$$

mit der Windendgeschwindigkeit v_∞ und dem Beschleunigungsparameter β vorgegeben. Dieses äußere Geschwindigkeitsfeld wird im inneren, beinahe hydrostatischen Teil durch einen exponentiellen Dichteverlauf ergänzt. Dabei wird R_0 so bestimmt, daß beide Domänen glatt ineinander übergehen. Der Exponent β im Geschwindigkeitsgesetz wird in dieser Arbeit für alle Modellrechnungen auf 1 gesetzt. Der Dichteverlauf ergibt sich für eine gegebene Massenverlustrate aus $\dot{M} = 4\pi\, r^2 \rho(r)\, v(r)$.

3.1.4 Inhomogenitäten in der Hülle

Inhomogenitäten werden in einem sehr einfachen Ansatz durch ein Zweikomponentenmodell berücksichtigt. Die dichte Komponente besteht aus Klumpen mit einer Dichte $\rho' = D\,\rho$, die um den Dichtekontrast D gegenüber der mittleren Dichte ρ erhöht ist. Zwischen den Klumpen wird Vakuum angenommen. Die Klumpen werden als klein gegenüber der optischen Weglänge angenommen, so daß für die Berechnung des Strahlungsfeldes die mittlere Dichte ρ verwendet werden kann. Die Dichte ρ' geht dann nur in die statistischen Gleichungen ein.

Modellrechnungen zeigen, daß die emergenten Spektren bezüglich der Parameter $\dot{M}$ und D degeneriert sind (Hamann & Koesterke 1998). Für ein gegebenes $\dot{M}_0$ hängen die korrespondierenden Werte für $\dot{M}$ und D über die Relation $\dot{M} = D^{-\frac{1}{2}}\,\dot{M}_0$ zusammen. Das ist als Hinweis auf eine Dominanz von ρ^2-Prozessen (Rekombination, Frei-frei-Strahlung) zu werten, da dann die Rekombinationsrate, und somit auch die pro Volumen emittierte Strahlung, mit $\rho'^2/D = D\,\rho^2$ skaliert.

Die Tatsache, daß die räumliche Ionisationsstruktur ebenfalls nahezu unverändert bleibt, deutet darauf hin, daß die Absorberdichte für die Ionisationsstufe unterhalb der Hauptionisationsstufe konstant bleibt. Für einen konstanten Wert von $\rho\, D^{\frac{1}{2}}$ darf sich im Ionisationsgleichgewicht nämlich auch die Ionisationsrate nicht ändern (Ionisationsrate = Rekombinationsrate $\propto\ \rho\, D^{\frac{1}{2}}$). Für eine feste Absorberdichte bleibt die optische Tiefenskala für die Absorption von Kontinuumsphotonen erhalten. Da sich dann der ionisierende Fluß nicht ändert, bleiben auch die Ionisationsverhältnisse konstant (Absorberdichte $\times$ Ionisierender Fluß = Ionisationsrate = Rekombinationsrate). Da die Emissionsmaße gleich bleiben (für Rekombinationslinien über Rekombinationskaskaden), entstehen ähnliche emergente Spektren.

Durch die Einführung des Parameters D werden Diskrepanzen der theoretischen Linienprofile zur Beobachtung behoben. Linienflügel, die durch Streuung von Linienstrahlung an freien

Elektronen (Thomsonstreuung) entstehen, werden durch eine Erhöhung von D gedämpft, da die Thomsonopazität nur linear mit der Elektronendichte geht. Ohne die Berücksichtigung von Inhomogenitäten erscheinen diese Linienflügel in den Modellrechnungen zu stark. Mit der Berücksichtigung von Inhomogenitäten sind die ermittelten Massenverlustraten um einen Faktor $D^{-\frac{1}{2}}$ gegenüber homogenen Modellen verringert. Als einen typischen Wert für WN-Sterne findet man z.B. $D = 4$, für WC-Sterne ist etwa $D = 10$ zu erwarten (Hillier 1996; Hamann & Koesterke 1998).

3.1.5 Der transformierte Radius

Analog zu Abschnitt 3.1.4 zeigt sich empirisch, daß Modellspektren (besonders deren Linienäquivalentbreiten) mit festem $T_\star$ und gleichen Oberflächenhäufigkeiten bezüglich des Transformierten Radius R_t degeneriert sind (Schmutz et al. 1989; Hamann & Koesterke 1998).

$$R_\mathrm{t} = R_\star \left(\frac{v_\infty}{2500\,\mathrm{km\,s^{-1}}} \bigg/ \frac{D^{\frac{1}{2}}\,\dot{M}}{10^{-4}\,M_\odot\,\mathrm{yr}^{-1}} \right)^{2/3} \tag{3.2}$$

Dieser Zusammenhang basiert ebenso auf der Dominanz von ρ^2-Prozessen, und beinhaltet die Relation aus Abschnitt 3.1.4. Allerdings wird hier noch eine Variation der Leuchtkraft ($\propto R_\star^2$) und der Windendgeschwindigkeit v_∞ mit einbezogen. Skaliert man die Radialkoordinate mit $R_\star$ ($r = r' R_\star$) gilt für die Massenverlustrate $\dot{M} \propto R_\star^2\,\rho(r')\,v_\infty$. Der Ausdruck in der Klammer von Gleichung (3.2) ist damit $\propto 1/(R_\star^2\,D^{\frac{1}{2}}\,\rho(r'))$. Es ist also $R_\mathrm{t}^3 \propto R_\star^3/(R_\star^4\,D\,\rho^2(r'))$ oder $\rho^2(r')\,D \propto 1/R_\star$ für festen R_t. Die in einem Volumen bis zum Radius r' durch ρ^2-Prozesse emittierte Strahlung ist also $\propto V/R_\star \propto R_\star^2$. Da die Leuchtkraft des Sterns ebenfalls mit $R_\star^2$ skaliert, bedeutet das, daß Linienäquivalentbreiten erhalten bleiben.

Die Unempfindlichkeit der Ionisationsstruktur gegenüber der obigen Transformation läßt sich diesmal durch eine Skalierung der Absorberdichte für die Ionisationsstufe unterhalb der Hauptionisationsstufe $\propto 1/R_\star$ erklären. Dann bleibt die optische Tiefenskala bezüglich r' unverändert. Da der ionisierende Fluß dann ebenfalls konstant bleibt ($\mathcal{F}(r') \propto L_\star/r^2 \propto R_\star^2/(R_\star r')^2 = \mathrm{Const.}$), skaliert die Ionisationsrate genau wie die Rekombinationsrate mit $1/R_\star$, und die Ionisationsverhältnisse bleiben unverändert.

Die Einführung des transformierten Radius reduziert die Zahl der relevanten Parameter für Grobanalysen stark. Linienäquivalentbreiten werden bei gegebenen R_t und $T_\star$ für eine bestimmte Oberflächenchemie korrekt reproduziert. Die Bestimmung von v_∞ erfolgt dann durch eine Anpassung an die beobachteten Linienbreiten, und $R_\star$, $\dot{M}$ und D werden durch eine Anpassung an die beobachteten Flüsse bestimmt. Dazu muß die Entfernung des untersuchten Objekts bekannt sein, und eine Korrektur der beobachteten Flüsse bezüglich der interstellaren Extinktion durchgeführt werden. Ist die Entfernung nicht bekannt, ist man auf Annahmen bezüglich der Leuchtkraft angewiesen. Mit $L_\star \propto R_\star^2$ ergibt sich die Beziehung

$$\dot{M}\,D^{\frac{1}{2}} \propto L_\star^{\frac{3}{4}} \tag{3.3}$$

für die Abhängigkeit der ermittelten Massenverlustrate von der angenommenen Leuchtkraft.

3.2 Materialkoeffizienten und Übergangsraten

In diesem Abschnitt soll auf die genaue Implementation der berücksichtigten Prozesse in Bezug auf die resultierenden Materialkoeffizienten η_ν und κ_ν und die Übergangsraten P_{ij} in den statistischen Gleichungen (Abschnitt 2.2) eingegangen werden. Dazu werden ausgehend vom Satz der atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten n_i die resultierenden Koeffizienten für jeden Prozeß angegeben. Die n_i beinhalten formal auch die Elektronendichte n_e und die Elektronentemperatur T_e, für die der Satz der statistischen Gleichungen um die Forderungen nach Ladungserhaltung und radiativem Gleichgewicht (Abschnitt 2.3) erweitert wird. Um eine konsistente Lösung des Strahlungstransports und der statistischen Gleichungen zu erhalten, ist es sehr wichtig, daß die einzelnen Prozesse in beiden Programmteilen konsistent berücksichtigt werden.

Generell werden drei Arten von Prozessen betrachtet. Frei-frei-Übergänge (Bremsstrahlung, Abschnitt 3.2.1), Gebunden-frei-Übergänge (Ionisation und Rekombination, Abschnitte 3.2.2 und 3.2.3), und Linienübergänge zwischen zwei gebundenen Zuständen (Abschnitt 3.2.4). Für die Behandlung der Linienübergänge der Elemente der Eisengruppe ($\sim\ 10^7$ Linien) wird die Opacity-Sampling-Methode beschrieben (Abschnitt 3.2.5).

3.2.1 Bremsstrahlung

Mit Beteiligung eines Ions kann ein Elektron Strahlung absorbieren bzw. emittieren. Da das Elektronengas schnell thermalisiert, kann dieser Prozeß im LTE behandelt werden. Für die Emissivität und die Opazität erhält man dann

$$\eta_\mathrm{ff}(\nu) = n_\mathrm{e} \sum_\mathrm{ion} n_\mathrm{ion}\, \alpha_\mathrm{ff}(\nu, T_\mathrm{e}, Z_\mathrm{ion})\, \frac{2h\nu^3}{c^2}\, e^{-\frac{h\nu}{kT_\mathrm{e}}} \tag{3.4}$$

$$\kappa_\mathrm{ff}(\nu) = n_\mathrm{e} \sum_\mathrm{ion} n_\mathrm{ion}\, \alpha_\mathrm{ff}(\nu, T_\mathrm{e}, Z_\mathrm{ion})\, \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT_\mathrm{e}}}\right) \tag{3.5}$$

Dabei wird über alle Ionen mit der Ionendichte n_ion und der Ladung Z_ion summiert. Der Frei-frei-Querschnitt α_ff ist

$$\alpha_\mathrm{ff} = \frac{4e^2 Z_\mathrm{ion}^2}{3ch} \left(\frac{2\pi}{3m_\mathrm{e}kT_\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{2}} \nu^{-3} \cdot g_\mathrm{ff}(Z_\mathrm{ion}, T_\mathrm{e}) \tag{3.6}$$

Der Gaunt-Faktor g_ff ist eine schwach variierende quantenmechanische Korrekturgröße.

3.2.2 Photoionisation, Rekombination

Zur Berechnung von Photoionisationsraten wird vom Ionisationsquerschnitt $\sigma_{ic}(\nu)$ ausgegangen. Für wasserstoffähnliche Ionen (H I, He II) wird der Photoionisationsquerschnitt in klassischer Näherung verwendet.

$$\sigma_{ic}(\nu) = \sigma_\mathrm{th} \frac{\nu_\mathrm{th}^3}{\nu^3}\, g \tag{3.7}$$

mit dem Kantenquerschnitt $\sigma_{\rm th}$, der Kantenfrequenz $\nu_{\rm th}$ und dem Gauntfaktor g, der quantenmechanische Korrekturen beinhaltet. Der Kantenquerschnitt ist dabei

$$\sigma_{\rm th} = \frac{8\,h^3}{3\sqrt{3}\pi^2 m_{\rm e}^2 c e^2} \frac{n}{Z^2} \tag{3.8}$$

mit der Ionenladung Z und der Hauptquantenzahl n. Für andere Elemente werden Fitformeln von folgender Form verwendet.

$$\sigma_{ic}(\nu) = \sigma_{\rm th} \left(\frac{\nu_{\rm th}}{\nu}\right)^S \left(\alpha + (1-\alpha)\frac{\nu_{\rm th}}{\nu}\right) \tag{3.9}$$

Im Fall der Elemente der Eisengruppe werden viele Energieniveaus zu einem Modellniveau zusammengefaßt (Opacity-Sampling, siehe Abschnitt 3.2.5). Dabei werden die Kantenquerschnitte für die einzelnen Energieniveaus in hydrogenischer Näherung berechnet, und zu einem Gesamtquerschnitt für das Modellniveau aufsummiert. Die Kantenfrequenz wird bei der Kantenfrequenz des Modellniveaus angenommen.

Ratenkoeffizienten:

Mit gegebenem Photoionisationsquerschnitt läßt sich die Photoionisationsrate R_{ic} berechnen, indem man die Zahl der absorbierten Photonen integriert.

$$R_{ic} = 4\pi \int_{\nu_{\rm th}}^{\infty} \frac{\sigma_{ic}(\nu)}{h\nu} J_\nu \,{\rm d}\nu \tag{3.10}$$

Die Rekombinationsrate R_{ci} kann nun direkt aus der Bedingung abgeleitet werden, daß im thermischen Gleichgewicht (TE) mit $J_\nu = B_\nu$ (Planck-Strahlungsfeld) ein detailliertes Gleichgewicht bestehen muß.

$$R_{ci} = 4\pi \left[\frac{n_i}{n_c}\right]_{\rm TE} \int_{\nu_{\rm th}}^{\infty} \frac{\sigma_{ic}(\nu)}{h\nu} \left[\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu\right] e^{-\frac{h\nu}{kT_{\rm e}}} \,{\rm d}\nu \tag{3.11}$$

Dabei repräsentiert der erste Term in der eckigen Klammer unter dem Integral den Beitrag der spontanen Rekombination, und der zweite Term die induzierte Rekombination.

Aufgrund des glatten Frequenzverlaufs der σ_{ic} wird für die numerische Berechnung dieser Integrale auf ein relativ grobes Frequenzgitter mit ~ 500 Stützstellen übergegangen. Die Integrale werden dabei durch Summen über die Frequenzindizes k ersetzt.

$$R_{ic} = 4\pi \sum_{k=k_{\rm th}}^{k_{\rm max}} W_k \cdot \frac{\sigma_{ic}(\nu_k)}{h\nu_k} \bar{J}_k^c \tag{3.12}$$

$$R_{ci} = 4\pi \left[\frac{n_i}{n_c}\right]_{\rm TE} \sum_{k=k_{\rm th}}^{k_{\rm max}} W_k \cdot \frac{\sigma_{ic}(\nu_k)}{h\nu_k} \left[\frac{2h\nu_k^3}{c^2} + \bar{J}_k^c\right] e^{-\frac{h\nu_k}{kT_{\rm e}}} \tag{3.13}$$

Dabei entspricht $\nu_{k_{\rm th}}$ der entsprechenden Kantenfrequenz, und W_k dem Integrationsgewicht für das Frequenzintervall k. Die $\bar{J}_k^c$ werden im Strahlungstransport durch eine gewichtete Mittelung über die J_ν vorbereitet.

$$\bar{J}_k^c = \int d\nu \; w_k(\nu) \; J_\nu \tag{3.14}$$

Emissivität, Opazität:

Die Emissivität η, die aus der spontanen Rekombinationsrate resultiert, ist

$$\eta_\nu = \sigma_{ic}(\nu) \, n_c \left[\frac{n_i}{n_c}\right]_{\mathrm{TE}} \frac{2h\nu^3}{c^2} \, e^{-\frac{h\nu}{kT_\mathrm{e}}} \tag{3.15}$$

Für die Opazität κ werden die Beiträge der Photoionisation und der induzierten Rekombination zusammengefaßt.

$$\kappa_\nu = \sigma_{ic}(\nu) \left(n_i - n_c \left[\frac{n_i}{n_c}\right]_{\mathrm{TE}} e^{-\frac{h\nu}{kT_\mathrm{e}}}\right) \tag{3.16}$$

Stoßraten:

Stoßraten werden auf der Basis von Stoßkoeffizienten Ω berechnet.

$$C_{ic} = n_\mathrm{e} \cdot \Omega_{ic}(T_\mathrm{e}) \tag{3.17}$$

Wieder besteht ein Zusammenhang zwischen Aufwärts- und Abwärtsraten durch die Forderung nach detailliertem Gleichgewicht im TE.

$$C_{ci} = \left[\frac{n_i}{n_c}\right]_{\mathrm{TE}} C_{ic} \tag{3.18}$$

Die Stoßkoeffizienten werden mit Fitformeln, oder durch einfache Näherungen, wie z.B. einem konstanten Stoßquerschnitt $Q = \pi \, a_0^2$ (a_0: Bohrscher Radius), berechnet. Damit ergibt sich der Stoßkoeffizient durch Integration des Querschnitts über die Maxwellverteilung

$$w(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{\mathrm{th}}^3} v^2 \, e^{-\frac{v^2}{v_{\mathrm{th}}^2}}, \; v_{\mathrm{th}} = \sqrt{\frac{2kT_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}} \tag{3.19}$$

ab der Grenzgeschwindigkeit $v_0 = 2\,\Delta E_{ic}/m_\mathrm{e}$:

$$\Omega_{ic} = \int_{v_0}^{\infty} \pi \, a_0^2 \, w(v) \, \mathrm{d}v = \pi \, a_0^2 \sqrt{\frac{8kT_\mathrm{e}}{\pi m_\mathrm{e}}} \left(\frac{\Delta E_{ic}}{kT_\mathrm{e}} - 1\right) \, e^{-\frac{\Delta E_{ic}}{kT_\mathrm{e}}} \tag{3.20}$$

3.2.3 Dielektronische Rekombination

Mehrfach angeregte gebundene Zustände können energetisch oberhalb der Ionisationsschwelle eines einfach angeregten Zustandes liegen. Über die Anregung solcher Autoionisationsniveaus durch Elektronenstöße und den Übergang in ein stabiles Niveau unterhalb der Ionisationsschwelle (stabilisierender Übergang) besteht ein sehr effektiver Rekombinationskanal. Zur Bestimmung der entsprechenden Raten werden die Übergänge zwischen den stabilen Niveaus i des rekombinierten Ions und des Grundzustandes c des ionisierten Ions über das Autoionisationsniveau a unter der Annahme einer thermischen Anregung der Autoionisationsniveaus bezüglich c berechnet.

Für die Übergangsrate R_{ci} zwischen dem ionisierten Ausgangsniveau c und dem rekombinierten stabilen Niveau i gilt dann die Beziehung

$$R_{ci} = n_a R_{ai} = n_c \left[\frac{n_a}{n_c}\right]_{\mathrm{TE}} A_{al} \tag{3.21}$$

mit dem spontanen Übergangskoeffizienten A_{al} für den stabilisierenden Übergang.

3.2.4 Linienübergänge

Für einen Linienübergang vom Ausgangsniveau l zum angeregten Niveau u bei der Frequenz ν_{lu} läßt sich der Absorptionsquerschnitt in einen frequenzunabhängigen Teil und eine frequenzabhängige Profilfunktion $\phi(\nu - \nu_{lu})$ aufteilen.

$$\sigma_{lu}(\nu) = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} B_{lu} \phi(\nu - \nu_{lu}) = \frac{\pi\, e^2}{m_\mathrm{e} c} f_{lu} \phi(\nu - \nu_{lu}) \tag{3.22}$$

mit dem Einsteinkoeffizienten B bzw. der Oszillatorenstärke f. ϕ ist auf 1 normiert, so daß

$$\int_0^\infty \sigma_{lu}(\nu)\, \mathrm{d}\nu = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} B_{lu} = \frac{\pi\, e^2}{m_\mathrm{e} c} f_{lu} \tag{3.23}$$

gilt. Die Profilfunktion ϕ beschreibt die Form des Linienprofils. In dieser Arbeit wird eine Dopplerverbreiterung in Form eines Gaussprofils mit einer Verbreiterungsgeschwindigkeit von $v_\mathrm{D} = 100\,\mathrm{km/s}$ angenommen.

$$\phi(\nu - \nu_{lu}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, \Delta\nu_\mathrm{D}}\, e^{-\left(\frac{\nu - \nu_{lu}}{\Delta\nu_\mathrm{D}}\right)^2}, \;\; \Delta\nu_\mathrm{D} = \nu_{lu} \frac{v_\mathrm{D}}{c} \tag{3.24}$$

Dieselbe Profilfunktion wird nicht nur für Absorptions- sondern auch für spontane und induzierte Emissionsprozesse verwendet. Diese Annahme von vollständiger Frequenzwiederverteilung der Linienphotonen (complete redistribution, CR) entspricht dem Grenzfall einer langen Lebensdauer des angeregten Niveaus, bei der das angeregte Elektron seine Herkunft “vergißt”.

Ratenkoeffizienten:

Mit den obigen Definitionen ist die radiative Aufwärtsrate R_{lu} für Linienübergänge

$$R_{lu} = \frac{4\pi}{h\nu_{lu}} \int_0^\infty \sigma_{lu}(\nu)\, \mathrm{d}\nu = B_{lu} \int_0^\infty \phi(\nu - \nu_{lu})\, J_\nu\, \mathrm{d}\nu = B_{lu}\, \bar{J}_{lu} \tag{3.25}$$

mit der winkel- und frequenzgemittelten Intensität $\bar{J}_{lu}$. Analog zu der Argumentation für Gleichung (3.11) in Abschnitt 3.2.2 ergibt sich für die Abwärtsrate

$$R_{ul} = B_{lu} \left[\frac{n_l}{n_u}\right]_{\mathrm{TE}} e^{-\frac{h\nu_{lu}}{kT_\mathrm{e}}} \left(\frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} + \bar{J}_{lu}\right) = B_{lu} \frac{g_l}{g_u} \left(\frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} + \bar{J}_{lu}\right) = A_{ul} + B_{ul} \bar{J}_{lu} \tag{3.26}$$

mit den Einsteinkoeffizienten A_{ul}, B_{ul} und B_{lu}, für die die Einsteinrelationen gelten.

$$\frac{B_{lu}}{B_{ul}} = \frac{g_u}{g_l}, \ \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} \tag{3.27}$$

Emissivität, Opazität:

Für die Linienemissivität und -Opazität ergibt sich aus den Übergangsraten

$$\eta_\nu = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} A_{ul}\, n_u\, \phi(\nu - \nu_{lu}) = n_u \frac{g_l}{g_u} \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} \sigma_{lu}(\nu) \tag{3.28}$$

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} B_{lu}\, n_l \left(1 - \frac{n_u}{n_l}\frac{g_l}{g_u}\right) \phi(\nu - \nu_{lu}) = n_l \sigma_{lu}(\nu) \left(1 - \frac{n_u}{n_l}\frac{g_l}{g_u}\right) \tag{3.29}$$

dabei geht die induzierte Emission wiederum als negativer Beitrag in die Opazität ein.

Stoßraten:

Stoßraten zwischen gebundenen Energieniveaus sind durch verschiedene Fitformeln abhängig von der Elektronentemperatur gegeben. Für Dipolübergänge mit bekanntem f-Wert wird die Formel von van Regemorter (van Regemorter 1962) verwendet

$$C_{lu} = \pi a_0^2 \sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}}{\pi m_\mathrm{e}}} n_\mathrm{e} \sqrt{T_\mathrm{e}}\, 14.5\, f_{lu} \left(\frac{E_H}{h\nu_{lu}}\right)^2 u_0\, e^{-u_0}\, P(u_0) \tag{3.30}$$

mit $u_0 = \frac{h\nu_{lu}}{kT_\mathrm{e}}$ und der Ionisationsenergie von Wasserstoff E_H. Dabei ist

$$P(u_0) = \max\left(\bar{g},\ 0.276\, e^{u_0}\, E_1(u_0)\right),\ \bar{g} = \begin{cases} 0.2 & N_u \neq N_l \\ 0.7 & N_u = N_l \end{cases} \tag{3.31}$$

abhängig von den Hauptquantenzalen N_u und N_l. Wieder besteht ein Zusammenhang zwischen Aufwärts- und Abwärtsraten durch die Forderung nach detailliertem Gleichgewicht im TE.

$$C_{ul} = C_{lu} \left[\frac{n_l}{n_u}\right]_{\mathrm{TE}} = C_{lu} \frac{g_l}{g_u}\, e^{-\frac{h\nu_{lu}}{kT_\mathrm{e}}} \tag{3.32}$$

3.2.5 Opacity-Sampling

Die Elemente der Eisengruppe (Sc, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni,) haben sehr komplexe Elektronenkonfigurationen, deren Anregungsniveaus über einen breiten Energiebereich sehr dicht liegen. Die Spektrallinien dieser Elemente bilden dementsprechend sehr komplexe Opazitätsverläufe von dicht beieinanderliegenden Übergängen mit moderaten Linienstärken aus (den sog. Eisenwald). Dadurch sind im Verhältnis zu den geringen Elementhäufigkeiten ($\beta_{\rm Fe} \simeq 2\,10^{-3}$ in der Galaxis und $\beta_{\rm Fe} \simeq 8\,10^{-4}$ in der LMC) relativ starke Auswirkungen auf die ionisierenden Flüsse und die Dynamik von WR-Winden (durch Strahlungsdruck auf Linien) zu erwarten. Im Unterschied zu einfacheren Ionen, die eine begrenzte Anzahl von relativ starken Linien zeigen, müssen für diese Elemente einige Millionen Linienübergänge zwischen mehreren Tausend Energieniveaus berücksichtigt werden.

Bei einer Behandlung im Non-LTE bilden die statistischen Gleichungen (Abschnitt 2.2) aber ein System von so vielen Gleichungen, wie Energieniveaus vorhanden sind. Damit eine numerische Lösung dieses Gleichungssystems möglich ist, ist man darauf angewiesen, die Zahl der Modellniveaus auf einige Hundert zu begrenzen. Die realen (Fein-)Niveaus der Eisengruppenelemente müssen also durch eine geringe Zahl von Modellniveaus ersetzt werden.

Dazu werden die realen Energieniveaus in Energiebänder aus Feinniveaus eingeteilt, in denen die relative Besetzungswahrscheinlichkeit entsprechend einer vorgegebenen Anregungstemperatur angenommen wird. Die Summe der Besetzungswahrscheinlichkeiten in einem Energieband ergibt dann die Besetzungswahrscheinlichkeit des Modellniveaus. Die Linienübergänge zwischen den Modellniveaus werden exakt berechnet, d.h. daß die Linienopazität eines Übergangs zwischen zwei Modellniveaus ein sehr komplexes Profil annimmt, das alle Übergänge zwischen den beteiligten Feinniveaus beinhaltet. Diese Methode nennt man Opacity-Sampling. Sie wurde ursprünglich von Anderson vorgeschlagen (Anderson 1989), und später von vielen Autoren erfolgreich umgesetzt (Dreizler & Werner 1993; Lanz & Hubeny 1995; Haas et al. 1996; Hillier & Miller 1998).

Für die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Feinniveaus hat diese Beschreibung eher einen statistischen Charakter. Aufgrund der großen Anzahl von realen Energieniveaus ist sie aber für eine Bewertung der Auswirkungen auf die Ionisationsstruktur durchaus adäquat, da einem einzelnen Niveau keine große Bedeutung zukommt. Durch die exakte Berücksichtigung aller Linienübergänge werden die Auswirkungen auf die ionisierenden Flüsse und die Winddynamik (durch multiple Streuprozesse) realistisch modelliert.

Ein weiterer Schritt ist die Zusammenfassung der Energieniveaus aller Elemente der Eisengruppe in ein Modellatom. Dazu wird, basierend auf der Bandeinteilung für Eisen, dem bei weitem häufigsten Element der Eisengruppe, ein Modellatom erstellt, das zusätzlich die Energieniveaus der korrespondierenden Ionisationsstufen der restlichen Eisengruppenelemente enthält. Das entspricht der Annahme von gleichen Besetzungsverhältnissen für alle Elemente der Eisengruppe. Aufgrund der ähnlichen Struktur dieser Elemente führt dieser Schritt zu realistischen Ergebnissen.

Im folgenden wird eine Formulierung für die Modellniveaus, Querschnitte und Übergangsraten beschrieben, die in den statistischen Gleichungen eine Behandlung analog zu Einzellinien ermöglicht. Es werden also statistische Gewichte, Einsteinkoeffizienten und Intensitätsmittel definiert, die den jeweiligen Größen für Einzellinien (Abschnitt 3.2.4) entsprechen. Zur Berechnung der Querschnitte werden atomare Daten von Kurucz (Kurucz 1991) verwendet. Insgesamt werden dabei etwa 10^7 Linienübergänge berücksichtigt.

Für die Definition der Modellniveaus L werden zunächst die Energiebänder B_L festgelegt. Die B_L enthalten Feinniveaus l des Elements i mit einer relativen Besetzungswahrscheinlichkeit

$$g^*_{il} = a_i \; g_l \; e^{\frac{E_L - E_l}{kT_{\rm exc}}} \tag{3.33}$$

entsprechend der Anregungstemperatur $T_{\rm exc}$. Dabei ist a_i die relative Häufigkeit des Elements i, g_l und E_l das statistische Gewicht und die Energie des Feinniveaus l, und E_L die Energie des Modellniveaus L, die noch festgesetzt werden muß. Das statistische Gewicht des Modellniveaus L wird als die Summe der statistischen Gewichte der Feinniveaus definiert

$$G_L = \sum_{i,l\,\in B_L} g^*_{il} \tag{3.34}$$

Die Energie E_L wird nun als die über die relativen Besetzungen g^* gemittelte Energie definiert.

$$E_L = \frac{\sum_{i,l\,\in B_L} E_l \; a_i \; g_l \; e^{-\frac{E_l}{kT_{\rm exc}}}}{\sum_{i,l\,\in B_L} a_i \; g_l \; e^{-\frac{E_l}{kT_{\rm exc}}}} = \frac{\sum_{i,l\,\in B_L} g^*_{il} E_l}{G_L} \tag{3.35}$$

Die Besetzung n_{il} des Feinniveaus l von Element i kann damit für eine gegebene Besetzungswahrscheinlichkeit n_L des Modellniveaus L berechnet werden.

$$n_{il} = n_L \, \frac{g^*_{il}}{G_L} \tag{3.36}$$

Ein Beispiel für eine typische Bandeinteilung ist in Abb. (3.1) am Beispiel der V. Ionisationsstufe der Eisengruppe dargestellt. Einige tausend Energieniveaus werden dabei durch 8 Modellniveaus repräsentiert. Die Grenzen der Bänder sind so gelegt, daß ähnliche Konfigurationen in ein Band fallen und die Grenzen nach Möglichkeit in Bereichen geringer Niveaudichte liegen.

Opazität, Emissivität:

Die Opazitäts- bzw. Emissivitätsverteilung des Überganges zwischen zwei Modellniveaus L und U entspricht einfach der Summe der Übergänge zwischen den Feinniveaus. Für die Opazität ergibt das

$$\kappa_{LU}(\nu) = \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \kappa_{lu}(\nu) \tag{3.37}$$

Beachtet man, daß für eine Funktion $f(\nu)$, die auf der Skala der Linienbreite schwach variiert, $\sigma_{lu}(\nu) \cdot f(\nu_{lu}) = \sigma_{lu}(\nu) \cdot f(\nu)$ gilt, ergibt sich die Relation

$$\sigma_{lu}(\nu) \, \frac{g^*_{iu}}{g^*_{il}} \, \frac{g_l}{g_u} = \sigma_{lu}(\nu) \, e^{\frac{E_U - E_u - E_L + E_l}{kT_{\rm exc}}} = \sigma_{lu}(\nu) \, e^{\frac{h(\nu_{LU} - \nu_{lu})}{kT_{\rm exc}}} = \sigma_{lu}(\nu) \, e^{\frac{h(\nu_{LU} - \nu)}{kT_{\rm exc}}} \tag{3.38}$$

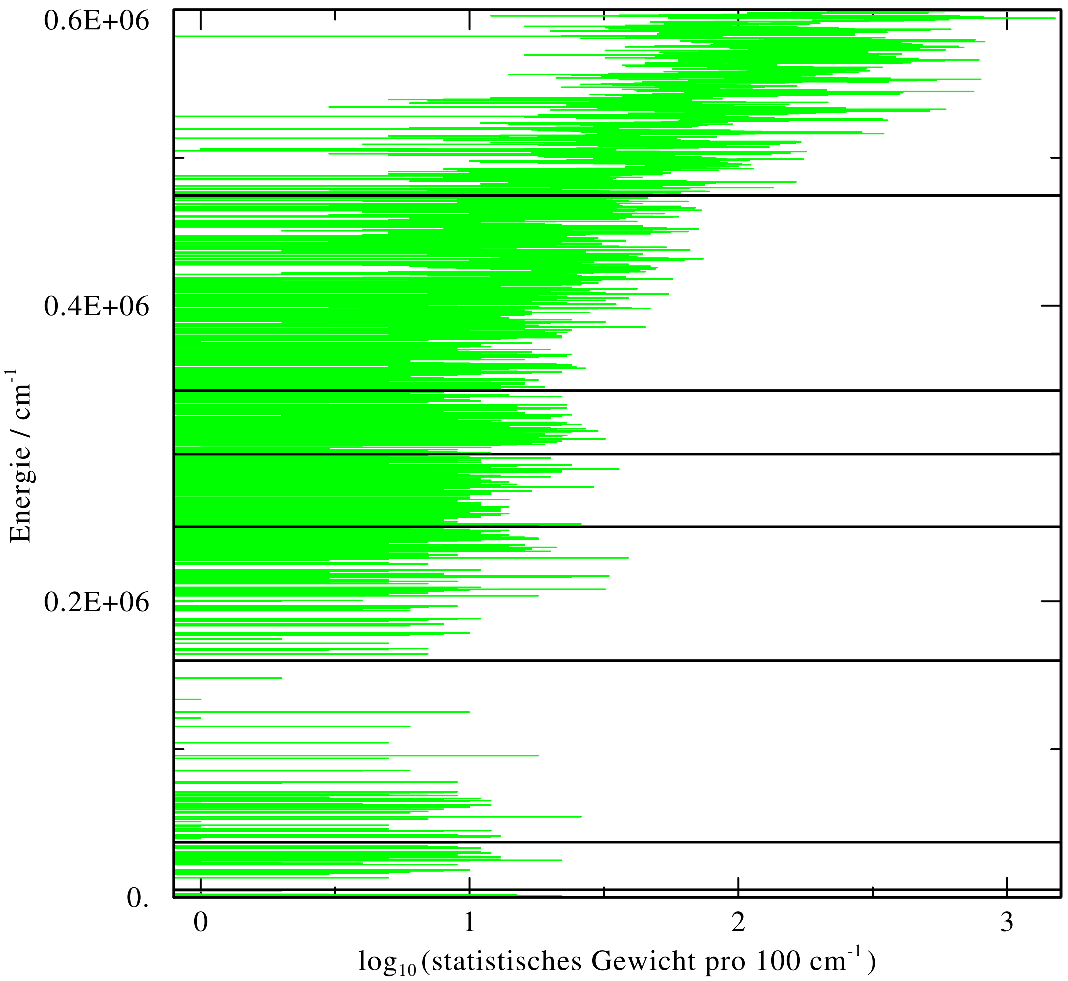

Abbildung 3.1: Bandeinteilung für die Ionisationsstufe V. Die Summe der statistischen Gewichte der Feinniveaus ist für den Bereich vom Grundzustand bis zur Ionisationsenergie von Fe V in Energieintevallen von $100\,\mathrm{cm}^{-1}$ aufgetragen. Die horizontalen Linien markieren die Grenzen der Energiebänder für die Modellniveaus.

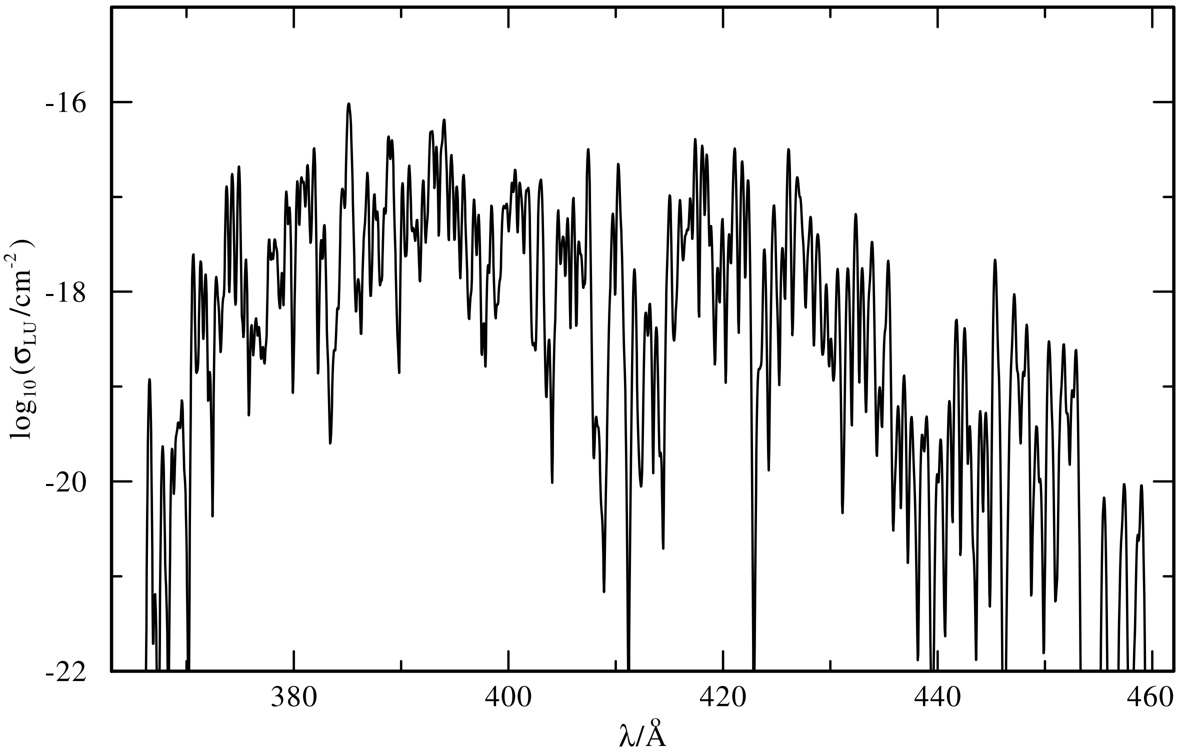

Abbildung 3.2: Frequenzverlauf des Querschnitts σ_{LU} mit für $L = 2$ und $U = 5$ der Ionisationsstufe V.

und mit Gleichungen (3.29) und (3.36) erhält man für $\kappa_{LU}(\nu)$

$$\begin{aligned}\kappa_{LU}(\nu) &= \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} n_L \frac{g^*_{il}}{G_L}\sigma_{lu}(\nu)\left(1-\frac{n_U}{n_L}\frac{g^*_{iu}}{g^*_{il}}\frac{G_L}{G_U}\frac{g_l}{g_u}\right)\\ &= n_L \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g^*_{il}}{G_L}\sigma_{lu}(\nu)\left(1-\frac{n_U}{n_L}\frac{G_L}{G_U}e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu)}{kT_{\rm exc}}}\right)\\ &= n_L\sigma_{LU}(\nu)\left(1-\frac{n_U}{n_L}\frac{G_L}{G_U}e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu)}{kT_{\rm exc}}}\right) \qquad (3.39)\end{aligned}$$

mit der Definition des zusammengesetzten Querschnitts

$$\sigma_{LU}(\nu) = \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g^*_{il}}{G_L}\,\sigma_{lu}(\nu) \qquad (3.40)$$

Bei der Berechnung der Emissivität geht man analog vor.

$$\eta_{LU}(\nu) = \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \eta_{lu}(\nu) \qquad (3.41)$$

Mit Gleichungen (3.28), (3.36) und (3.38) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\eta_{LU}(\nu) &= \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} n_U \frac{g^*_{iu}}{G_U}\sigma_{lu}(\nu)\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{g_l}{g_u} \\
&= n_U \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g^*_{il}}{G_L}\sigma_{lu}(\nu)\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{g^*_{iu}}{g^*_{il}}\frac{G_L}{G_U}\frac{g_l}{g_u} \\
&= n_U\sigma_{LU}(\nu)\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{G_L}{G_U}e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu)}{kT_{\text{exc}}}}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Insgesamt erhält man also

$$\kappa_{LU}(\nu) = n_L\sigma_{LU}(\nu)\left(1 - \frac{n_U}{n_L}\frac{G_L}{G_U}e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu)}{kT_{\text{exc}}}}\right) \tag{3.43}$$

$$\eta_{LU}(\nu) = n_U\sigma_{LU}(\nu)\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{G_L}{G_U}e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu)}{kT_{\text{exc}}}} \tag{3.44}$$

Ein Beispiel für einen typischen Frequenzverlauf des Querschnitts σ_{LU} ist in Abb. 3.2 dargestellt. Aufgrund der großen Anzahl von berücksichtigten Linien, und des damit verbundenen hohen Rechenzeitbedarfs, werden die G_L und die σ_{LU} unabhängig vom eigentlichen Atmosphärenprogramm für eine gegebene Anregungstemperatur T_{exc} berechnet. Im LTE-Grenzfall ergibt sich dann mit

$$\frac{n_U}{n_L} = \frac{G_U}{G_L}e^{\frac{-h\nu_{LU}}{kT_{\text{e}}}} \tag{3.45}$$

für die Quellfunktion

$$S_{LU}(\nu) = \frac{\eta_{LU}(\nu)}{\kappa_{LU}(\nu)} = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\frac{G_U}{G_L}\frac{n_L}{n_U}e^{\frac{h(\nu-\nu_{LU})}{kT_{\text{exc}}}} - 1} = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h(\nu-\nu_{LU})}{kT_{\text{exc}}}+\frac{h\nu_{LU}}{kT_{\text{e}}}} - 1} \tag{3.46}$$

Dieser Wert entspricht nicht dem normalerweise für den LTE-Grenzfall gültigen Wert $S_\nu = B_\nu$ mit der Planckfunktion B_ν. Setzt man die Anregungstemperatur T_{exc} im Exponenten in den Gleichungen (3.43) und (3.44) auf den Wert T_{e}, erhält man

$$S_{LU}(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_{\text{e}}}} - 1} = B_\nu \tag{3.47}$$

was dem im LTE-Grenzfall geforderten Wert entspricht.

Radiative Raten:

Die Einsteinkoeffizienten für die zusammengefaßten Übergänge ergeben sich ebenfalls durch Addition der Beiträge der Übergangsraten zwischen den Feinniveaus (Gleichungen (3.25) und (3.26)). Für die Übergangsrate durch spontane Emission erhält man mit dem Einsteinkoeffizienten A_{ul} für Einzellinien und Gleichung (3.38)

$$
\begin{aligned}
R_{UL}^{\text{spon}} &= \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{iu}^*}{G_U}\, A_{ul} = \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{iu}^*}{G_U}\, \frac{8\pi\nu_{lu}^2}{c^2}\, \frac{g_l}{g_u} \int d\nu\ \sigma_{lu}(\nu) \\
&= \frac{G_L}{G_U} \int d\nu \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{il}^*}{G_L}\, \frac{g_{iu}^*}{g_{il}^*}\, \frac{8\pi\nu^2}{c^2}\, \frac{g_l}{g_u}\, \sigma_{lu}(\nu) \\
&= \frac{G_L}{G_U} \int d\nu\ e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu)}{kT_{\text{exc}}}}\, \frac{8\pi\nu^2}{c^2}\, \sigma_{LU}(\nu)
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Die Übergangsrate durch Absorption ergibt sich entsprechend

$$
\begin{aligned}
R_{LU}^{\text{rad}} &= \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{il}^*}{G_L}\, R_{lu}^{\text{rad}} = \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{il}^*}{G_L}\, B_{lu} \int d\nu\ J_\nu\, \phi(\nu-\nu_{lu}) \\
&= \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{il}^*}{G_L}\, \frac{4\pi}{h\nu_{lu}} \int d\nu\ J_\nu\, \sigma_{lu}(\nu) \\
&= \int d\nu\ \frac{4\pi}{h\nu}\, J_\nu\, \sigma_{LU}(\nu)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Die Übergangsrate für stimulierte Emission ergibt sich wieder mit Gleichung (3.38)

$$
\begin{aligned}
R_{UL}^{rad} &= \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{iu}^*}{G_U}\, R_{ul}^{rad} = \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{iu}^*}{G_U}\, \frac{g_l}{g_u} B_{lu} \int d\nu\ J_\nu\, \phi(\nu-\nu_{lu}) \\
&= \frac{G_L}{G_U} \int d\nu\ e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu)}{kT_{\text{exc}}}}\, \frac{4\pi}{h\nu}\, J_\nu \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} \frac{g_{il}^*}{G_L} \sigma_{lu}(\nu) \\
&= \frac{G_L}{G_U} \int d\nu\ e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu)}{kT_{\text{exc}}}}\, \frac{4\pi}{h\nu}\, J_\nu\, \sigma_{LU}(\nu)
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Eine Formulierung analog zu Einzellinien läßt sich für $T_{\text{exc}} \to \infty$ mit den folgenden Definitionen aufstellen.

$$
A_{UL} = \frac{G_L}{G_U} \int d\nu\ \frac{8\pi\nu^2}{c^2}\, \sigma_{LU}(\nu) \tag{3.51}
$$

$$
B_{UL} = \frac{c^2}{2h\nu_{LU}^3} A_{UL},\ \ B_{LU} = B_{UL} \frac{G_U}{G_L} \tag{3.52}
$$

$$
\Phi_{LU}(\nu) = \frac{\sigma_{LU}(\nu)}{\int d\nu\ \frac{\nu^2}{\nu_{LU}^2}\, \sigma_{LU}(\nu)} \tag{3.53}
$$

$$
\bar{J}'_{LU} = \int d\nu\ \frac{\nu_{LU}}{\nu}\, J_\nu\, \Phi_{LU}(\nu) \tag{3.54}
$$

Es gelten dann Einsteinrelationen für die Koeffizienten A_{UL}, B_{UL} und B_{LU} (Gleichung (3.52)), die den entsprechenden Relationen für Einzellinien entsprechen (Gleichung (3.27)). Mit dem Intensitätsmittel $\bar{J}'$ ist eine äquivalente Formulierung zu den Gleichungen (3.25) und (3.26) möglich.

$$R_{LU} = B_{LU}\,\bar{J}'_{LU} \tag{3.55}$$

$$R_{UL} = A_{UL} + B_{UL}\bar{J}'_{LU} \tag{3.56}$$

Mit $T_{\text{exc}} \rightarrow \infty$ erhält man unter Anwendung von Gleichung (3.46) für die Quellfunktion im LTE-Grenzfall

$$S_{LU}(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu_{LU}}{kT_{\text{e}}}} - 1} \tag{3.57}$$

Dieser Wert entspricht wegen $\nu \simeq \nu_{LU}$ näherungsweise dem für das LTE geforderten Wert.

Stoßraten:

Stoßkoeffizienten werden unter Verwendung der Relation von van Regemorter (Gleichung 3.30) durch die Addition der Einzelbeiträge berechnet.

$$C_{LU} = \pi a_0^2 \left(\frac{8k_{\text{B}}}{m_{\text{e}}\pi}\right)^{\frac{1}{2}} n_{\text{e}}\sqrt{T}e^{-\frac{h\nu_{LU}}{k_{\text{B}}T_{\text{e}}}}\,\Gamma_{LU}(T_{\text{e}}) \tag{3.58}$$

mit

$$\Gamma_{LU}(T_{\text{e}}) = \frac{14.5E_H^2}{G_L k_{\text{B}}T_{\text{e}}} \sum_{i,l,u\,\in B_L,B_U} g_{il}^*\, f_{lu}\frac{1}{E_{lu}}P\left(\frac{E_{lu}}{k_{\text{B}}T_{\text{e}}}\right)e^{\frac{h(\nu_{LU}-\nu_{lu})}{k_{\text{B}}T_{\text{e}}}} \tag{3.59}$$

mit P nach Gleichung (3.31) und der Ionisationsenergie von Wasserstoff E_H. Die Funktionen $\Gamma_{LU}(T_{\text{e}})$ werden für einen Satz von Elektronentemperaturen zusammen mit den σ_{LU} berechnet, und im Atmosphärenprogramm durch Fit-Polynome repräsentiert.

3.3 Das Lösungsverfahren für den Strahlungstransport

Zur Berechnung des Strahlungsfeldes werden in dieser Arbeit unterschiedliche Lösungsverfahren angewendet, die sich hauptsächlich in Bezug auf die Behandlung der Thomsonstreuung unterscheiden (Abschnitt 2.1.1). Bei der korrekten Implementation kohärenter Streuung an freien Elektronen beinhaltet die Gesamtemissivität η_ν einen Streuterm, in dem die winkelgemittelte Intensität J_ν bereits enthalten ist.

$$\eta_\nu = \eta_\nu^{\text{true}} + \kappa_{\text{th}}J_\nu \tag{3.60}$$

Prinzipiell ist eine simultane Lösung von Gleichung (2.19) für alle Winkel mit einer konsistenten Behandlung des Streuterms möglich, jedoch ist dieses Verfahren sehr rechenzeitaufwendig, so daß es in dieser Arbeit nur bei der Lösung des reinen Kontinuumstransports mit wenig Frequenzpunkten (~ 500) verwendet wird. Da bei Modellrechnungen mit komplexen Modellatomen aber fast der gesamte Frequenzbereich mit Spektrallinien überdeckt ist, muß eine sehr große Zahl von Frequenzpunkten ($\sim 10^5$) in Betracht gezogen werden.

Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen, besteht in der approximativen Behandlung des Streuterms $\kappa_{\rm th} J_\nu$. So wird bei den Modellrechnungen in Kapitel 4 J_ν durch ein interpoliertes Strahlungsfeld $J_\nu^{\rm cont}$ aus dem Kontinuumstransport ersetzt. Eine andere Möglichkeit besteht in der iterativen Lösung mit variablen Eddingtonfaktoren, die in diesem Abschnitt beschrieben, und bei den Rechnungen in Kapitel 5 benutzt wird.

Dazu wird zunächst zu den Momentengleichungen (2.35) und (2.38) übergegangen. Der Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.35) kann entsprechend

$$\kappa_\nu(S_\nu - J_\nu) = \eta_\nu - \kappa_\nu J_\nu = \eta_\nu^{\rm true} + \kappa_{\rm th} J_\nu - \left(\kappa_\nu^{\rm true} + \kappa_{\rm th}\right) J_\nu = \eta_\nu^{\rm true} - \kappa_\nu^{\rm true} J_\nu \qquad (3.61)$$

umgeschrieben werden, so daß der Streuterm aus den Momentengleichungen herausfällt. In die Momentengleichungen gehen allerdings die Eddingtonfaktoren f und g ein, die nur über eine Lösung der winkelabhängigen Transportgleichung (2.19) ermittelt werden können.

Bei der Methode der variablen Eddingtonfaktoren geht man nun so vor, daß die Eddingtonfaktoren im Laufe der iterativen Lösung des Non-LTE-Problems mititeriert werden. Dazu beginnt man mit der Lösung des winkelabhängigen Strahlungstransports auf der Basis eines genäherten Streuterms. Die damit ermittelten Eddingtonfaktoren gehen dann in die folgende Lösung der Momentengleichungen ein. Im Laufe der Modelliteration werden die Momentengleichungen zunächst auf der Basis von Eddingtonfaktoren aus einer vorangegangenen Iteration gelöst. Die so ermittelten Strahlungsfelder J_ν werden dann entweder direkt zur Lösung der Ratengleichungen verwendet, oder gehen bei einer Neuberechnung der Eddingtonfaktoren in den Streuterm ein. Da sich die Eddingtonfaktoren von Iteration zu Iteration nur geringfügig ändern, ist eine Neuberechnung nicht oft notwendig. Auf diese Weise gewinnt man neben der konsistenten Behandlung des Streuterms noch erheblich an Rechenzeit, da die Momentengleichungen wesentlich schneller zu lösen sind als die winkelabhängige Transportgleichung.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst die Lösung der winkelabhängigen Transportgleichung beschrieben (Abschnitt 3.3.1). Dann folgt die Berechnung der Momente des Strahlungsfeldes und der Eddingtonfaktoren (Abschnitt 3.3.2), und schließlich die Diskretisierung und die Lösung der Momentengleichungen.

3.3.1 Die Lösung der Transportgleichung

Zur numerischen Lösung der Transportgleichung wird auf das (p, z)-Koordinatensystem übergegangen (vgl. Abschnitt 2.1.2). Zur Diskretisierung wird die Radialkoordinate in N_D Stützstellen r_i eingeteilt, die am äußeren Rand mit r_1 beginnen, und am inneren Rand bei r_{N_D} enden. Auf diesem Gitter werden Strahlen verschiedener Richtungen definiert, die jeweils durch einen konstanten Impaktparameter p_j gekennzeichnet sind (siehe Abb. 3.3). Die p_j werden so eingeteilt,

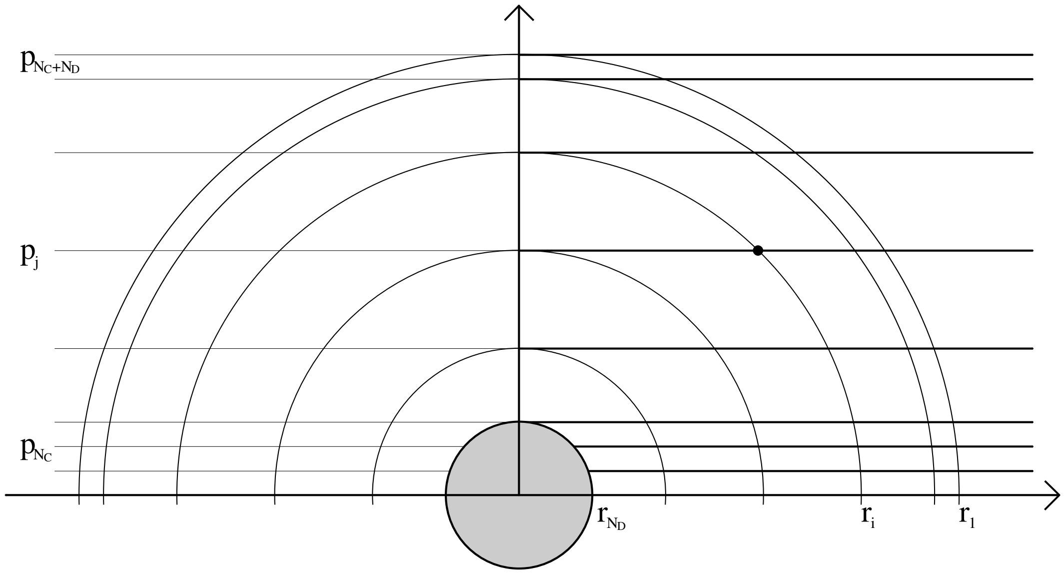

Abbildung 3.3: Die Definition des Gitters in sphärischer Geometrie. Die Radiusschale i wird von $N_C + N_D - i$ Strahlen in unterschiedlichen Winkeln geschnitten. Das Strahlungsfeld am Punkt r_i in Richtung j wird durch die Integration der Transportgleichung entlang des Strahls mit dem Impaktparameter p_j ermittelt.

daß die ersten N_C Strahlen mit $p < r_{N_D}$ auf den inneren Rand treffen, und die restlichen Strahlen mit $p_{N_C+N_D-i} = r_i$ tangential zu den Radiusschalen verlaufen.

Wie bereits in Abschnitt 2.1.3 erwähnt wurde, wird bei der Formulierung der Transportgleichung im CMF lediglich die Transformation der Frequenz bezüglich des Dopplereffekts berücksichtigt. Da für ein einzelnes Photon $\frac{\mathrm{d}E_\nu}{\mathrm{d}\nu} = h$ gilt, bleibt die Intensität nach Gleichung (2.1) unter dieser Transformation invariant. Im nichtrelativistischen Fall kann die Intensität im CMF also analog zur Formalen Lösung im statischen Fall (Gleichung 2.4) integriert werden, wobei allerdings die Ortsabhängigkeit der Frequenz durch Dopplerverschiebung berücksichtigt werden muß. Im (p, z)-Koordinatensystem erhält man für einen Strahl mit gegebenem p

$$I_\nu(z) = I_\nu(z_0)\, e^{-\tau_\nu(z_0,z)} + \int_{z_0}^{z} S_\nu(\nu_{z'})\, e^{-\tau_\nu(z_0,z')}\, \kappa_\nu(\nu_{z'}) \mathrm{d}z' \tag{3.62}$$

$$\tau_\nu(z_0, z) = \int_{z_0}^{z} \kappa_\nu(\nu_{z'})\, \mathrm{d}z' \tag{3.63}$$

dabei sind alle Größen im mitbewegten System vom Aufpunkt (p, z) definiert. ν ist die Frequenz am Aufpunkt, und $\nu_{z'}$ die entsprechend dopplerverschobene Frequenz am Punkt (p, z') in Strahlrichtung

$$\nu_{z'} = \nu \cdot \left(1 - \frac{\mu(z)\, v(z) - \mu(z')\, v_(z')}{c}\right) \tag{3.64}$$

mit der dimensionslosen Frequenz x (Gleichung 2.16) lautet diese Relation

$$x_{z'} = x \cdot (1 - \mu(z)\, V(z) + \mu(z')\, V(z')) \tag{3.65}$$

Es muß also entlang einer Charakteristik $x_{z'}$ in der (x, z)-Ebene integriert werden. Anstatt nun dieses Integral für jeden Punkt in der (p, z)-Ebene vollständig zu berechnen, wird bei der Short-Charakteristik-Methode nur eine lokale Integration innerhalb der betrachteten Gitterzelle in der (x, z)-Ebene durchgeführt. Dazu muß zunächst eine Diskretisierung in x vorgenommen werden.

$$x_k = x_0\, e^{k \cdot \Delta x} \tag{3.66}$$

Dabei ist mit $\Delta x = 0.3$ eine ausreichende Frequenzabdeckung gewährleistet, da Opazitäten auf einer Skala von $\Delta x = 1$ variieren (vgl. Abschnitt 2.1.3). Die Integration des Strahlungsfeldes beginnt am blauen Ende des Frequenzgitters mit einer statischen Lösung als blaue Randbedingung. Danach wird die Transportgleichung für aufsteigende Frequenzindizes k gelöst. Ist die Intensität bei x_{k-1} gegeben, kann die Intensität für einen gegebenen Randwert vom inneren bzw. äußeren Rand aus integriert werden. Ausgehend von einer gegebenen Intensität bei der Tiefe z_{l-1}, wird zur Berechnung der Intensität bei z_l zunächst der Schnittpunkt der Charakteristik mit dem Rand der Gitterzelle $[(z_l, x_k - 1), (z_{l-1}, x_{k-1}]$ bzw. $[(z_{l-1}, x_{k-1}), (z_{l-1}, x_k)]$ bestimmt. Dann wird die einlaufende Intensität $\hat{I}$ am diesem Punkt durch Interpolation ermittelt. Mit diesem Randwert wird dann die lokale Integration vom Randpunkt zum Aufpunkt bei (z_l, x_k) durchgeführt. Die lokale Charakteristik wird dabei durch eine Gerade mit der Steigung der wirklichen Charakteristik am Aufpunkt (z_l, x_k) approximiert. Es gilt nach Gleichung (3.65) mit Gleichung (2.10)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = x \cdot \left(\mu \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} + V \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z} \right) = x \cdot \left(\mu \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + V \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z} \right) = x \cdot \left(\mu^2 \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + (1 - \mu^2) \frac{V}{r} \right) \tag{3.67}$$

Mit den Definitionen

$$\Delta x = x_k - x_{k-1},\ \Delta z = z_l - z_{l-1} \tag{3.68}$$

ergibt sich für $P = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} > \frac{\Delta x}{\Delta z}$ ein Schnittpunkt der Charakteristik mit dem Rand auf $[(z_l, x_k - 1), (z_{l-1}, x_{k-1}]$, und man erhält die Größen auf dem Rand durch lineare Interpolation

$$\begin{aligned} q &= \frac{P\, \Delta z}{\Delta x},\ p = 1 - q \\ \hat{S} &= p\, S(z_l, x_k - 1) + q\, S(z_{l-1}, x_{k-1}) \\ \hat{\kappa} &= p\, \kappa(z_l, x_k - 1) + q\, \kappa(z_{l-1}, x_{k-1}) \\ \Delta\tau &= \frac{1}{2} \left(\kappa(z_l, x_k) + \hat{\kappa} \right)\, q\, \Delta z \end{aligned} \tag{3.69}$$

Andererseits liegt für $P = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} < \frac{\Delta x}{\Delta z}$ der Schnittpunkt der Charakteristik mit dem Rand auf $[(z_{l-1}, x_{k-1}), (z_{l-1}, x_k)]$, und man erhält

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{\Delta x}{P\,\Delta z},\; p = 1 - q \\
\hat{S} &= p\,S(z_{l-1}, x_k) + q\,S(z_{l-1}, x_{k-1}) \\
\hat{\kappa} &= p\,\kappa(z_{l-1}, x_k) + q\,\kappa(z_{l-1}, x_{k-1}) \\
\Delta\tau &= \frac{1}{2}\left(\kappa(z_l, x_k) + \hat{\kappa}\right)\,\Delta z
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

Für eine möglichst genaue Approximation der Auswirkungen der Frequenzverschiebung auf das Strahlungsfeld wird die Intensität $\hat{I}$ auf dem Rand durch eine kubische Spline-Interpolation ermittelt. Sind alle Größen auf dem Rand berechnet, kann die lokale Integration durchgeführt werden.

$$
\begin{aligned}
I(z_l, x_k) &= \hat{I}\,e^{-\Delta\tau} + \int_0^{\Delta\tau} S(\tau)\,e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
= \hat{I}\,e^{-\Delta\tau} + \left(1 + \frac{e^{-\Delta\tau} - 1}{\Delta\tau}\right)\,S(z_l, x_k) &+ \left(-e^{-\Delta\tau} - \frac{e^{-\Delta\tau} - 1}{\Delta\tau}\right)\,\hat{S}
\end{aligned} \tag{3.71}
$$

Insgesamt wird die Berechnung der Intensitäten für ein gegebenes p so durchgeführt, daß zunächst von außen mit der Rückstreuintensität I^- nach Gleichung (2.30) als Randbedingung nach innen integriert wird. Für Strahlen, die den Kern Treffen (p_i mit $i \leq N_C$), wird am inneren Rand die Intensität in Diffusionsnäherung (Gleichung 2.24) vorgegeben, und wieder nach außen integriert. Für die anderen Strahlen gilt bei $z = 0$ aus Symmetriegründen $I^- = I^+$, d.h. es wird mit $I^-(z = 0)$ als Randbedingung wieder nach außen integriert.

Als Ergebnis erhält man Intensitäten $I^+(z, p)$ und $I^-(z, p)$, die dann zur Berechnung der Momente des Strahlungsfeldes und der Eddingtonfaktoren benutzt werden können.

3.3.2 Die Berechnung der Momente des Strahlungsfeldes

Zur Berechnung der Momente des Strahlungsfeldes müssen die vorab berechneten Intensitäten über den Winkel integriert werden.

$$
[J_\nu,\, H_\nu,\, K_\nu,\, N_\nu] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [1,\, \mu,\, \mu^2,\, \mu^3] I_\nu\, d\mu \tag{3.72}
$$

mit den Intensitäten I^+ und I^- aus Abschnitt 3.3.1 ergibt das

$$
[J_\nu,\, K_\nu] = \frac{1}{2}\int_0^1 [1,\, \mu^2]\,\left(I_\nu^+ + I_\nu^-\right)\,d\mu \tag{3.73}
$$

$$
[H_\nu,\, N_\nu] = \frac{1}{2}\int_0^1 [\mu,\, \mu^3]\,\left(I_\nu^+ - I_\nu^-\right)\,d\mu \tag{3.74}
$$

zur numerischen Integration werden diese Integrale in Summen umgeschrieben.

$$M_\nu^n(r_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \left(I_\nu^+(r_i, p_j) + (-1)^n I_\nu^-(r_i, p_j) \right) \cdot W_{ij}^n \tag{3.75}$$

mit $p_{j_{\max}} = r_i$. Dabei müssen die W_{ij}^n so berechnet werden, daß mit einer gegeben Interpolationsformel für die Intensitäten die Summation den Wert des entsprechenden Integrals ergibt.

Berechnung der Integrationsgewichte W_{ij}^n:

Für die Interpolation der I_ν wird eine lineare Interpolation gewählt. Bei Interpolationen höherer Ordnung erhält man aufgrund der Unregelmäßigkeit der Stützstellen häufig negative Integrationsgewichte, wodurch das Gesamtverfahren sehr instabil wird. Bei einer linearen Interpolation über x ergibt sich für eine Funktion $F(x)$ auf dem Intervall $[A, B]$ mit $F_a = F(A)$ und $F_b = F(B)$

$$F(x) = \left(\frac{F_a(x - B)}{(A - B)} + \frac{F_b(x - A)}{(B - A)} \right) \tag{3.76}$$

und das Integral der Funktion gewichtet mit x^n über das Intervall $[A, B]$ ergibt

$$\int_A^B x^n F(x)\,\mathrm{d}x = F_a W_a^n(A, B) + F_b W_b^n(A, B) \tag{3.77}$$

mit

$$W_a^n(A, B) = \begin{cases} (1/2)\,(B - A) & n = 0 \\ (1/6)\,(B - A)\,(B + 2\,A) & n = 1 \\ (1/12)\,(B - A)\,(B^2 + 2\,B\,A + 3\,A^2) & n = 2 \\ (1/20)\,(B - A)\,(B^3 + 2\,B^2\,A + 3\,B\,A^2 + 4\,A^3) & n = 3 \end{cases} \tag{3.78}$$

und

$$W_b^n(A, B) = \begin{cases} (1/2)\,(B - A) & n = 0 \\ (1/6)\,(B - A)\,(2\,B + A) & n = 1 \\ (1/12)\,(B - A)\,(3\,B^2 + 2\,B\,A + A^2) & n = 2 \\ (1/20)\,(B - A)\,(4\,B^3 + 3\,B^2\,A + 2\,B\,A^2 + A^3) & n = 3 \end{cases} \tag{3.79}$$

für die W_{ij}^n erhält man damit

$$W_{ij}^n = \begin{cases} W_a^n(\mu(r_i, p_1), \mu(r_i, p_2)) & j = 1 \\ W_b^n(\mu(r_i, p_{j-1}), \mu(r_i, p_j)) & j = j_{\max} \\ W_b^n(\mu(r_i, p_{j-1}), \mu(r_i, p_j)) + W_a^n(\mu(r_i, p_j), \mu(r_i, p_{j+1})) & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.80}$$

Das letzte Intervall am Index $j_{\max}$ bei $\mu = 0$ entspricht einem besonders großen Intervall in μ. Durch die Symmetriebedingung $\frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} = 0$ bei $\mu = 0$ ist hier eine Gewichtung mit einem

Polynom 2. Grades möglich. Mit $A = \mu(r_i, p_{j_{\max}}) = 0$ und $B = \mu(r_i, p_{j_{\max}-1})$ ergeben sich die Gewichte

$$W_a^n(A,B) = \begin{cases} (4/3)\,B & n=0 \\ 0 & n=1 \\ (4/15)\,B^3 & n=2 \\ 0 & n=3 \end{cases} \tag{3.81}$$

und

$$W_b^n(A,B) = \begin{cases} (1/3)\,B & n=0 \\ (1/3)\,B^2 & n=1 \\ (1/5)\,B^3 & n=2 \\ (1/5)\,B^4 & n=3 \end{cases} \tag{3.82}$$

Berechnung der Eddingtonfaktoren:

Nach der Berechnung der Momente können nun die Eddingtonfaktoren $f = K/J$ und $g = N/H$ für die Lösung der Momentengleichungen vorbereitet werden. Da die Momente H und N dann auf dem Zwischengitter definiert sind, wird auch g auf dem Zwischengitter vorbereitet.

$$f_\nu(r_i) = \frac{K_\nu(r_i)}{J_\nu(r_i)},\;\; g_\nu(r_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{N_\nu(r_i) + N_\nu(r_{i+1})}{H_\nu(r_i) + H_\nu(r_{i+1})} \tag{3.83}$$

3.3.3 Die Lösung der Momentengleichungen

Mit allen Orts- und Frequenzabhängigkeiten erhält man für die Momentengleichungen (2.35) und (2.38) mit $H = r^2 H$, $J = r^2 J$ und $S = r^2 S$

$$\frac{\partial H(r,x)}{-\partial r} + \left(a(r) - \frac{v(r)}{r}\right)\frac{\partial (fJ)(r,x)}{\partial x} + \frac{v(r)}{r}\frac{\partial J(r,x)}{\partial x} = \left(J(r,x) - S(r,x)\right)\kappa(r,x) \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial (qfJ)(r,x)}{-q(r,x)\partial r} + \left(a(r) - \frac{v(r)}{r}\right)\frac{\partial (gH)(r,x)}{\partial x} + \frac{v(r)}{r}\frac{\partial H(r,x)}{\partial x} = \kappa(r,x)H(r,x) \tag{3.85}$$

Zur Diskretisierung wird nun auf ein Gitter mit Frequenzindex k und Tiefenindex l übergegangen, auf dem die Materialkoeffizienten gegeben sind. Da H aus einer räumlichen Ableitung von J hervorgeht, ist H auf dem Zwischengitter $l \pm \frac{1}{2}$ definiert. Im folgenden wird die Notation $X_{kl} = X_{00}$ benutzt. Die Diskretisierung der 0. Momentengleichung gibt

$$\frac{H_{0+\frac{1}{2}} - H_{0-\frac{1}{2}}}{D_0} + G_0\left((fJ)_{-10} - (fJ)_{00}\right) + V_0\left(J_{-10} - J_{00}\right) = \kappa_{00}(J_{00} - S_{00}) \tag{3.86}$$

Dabei ist die Frequenzableitung linksseitig, und es werden folgende Abkürzungen benutzt

$$\Delta x = x_{k-1} - x_k,\;\; D_l = r_{l-1/2} - r_{l+1/2} \tag{3.87}$$

$$V_l = \frac{v_l}{r_l \Delta x},\ G_l = \left(a_l - \frac{v_l}{r_l}\right)\frac{1}{\Delta x} \tag{3.88}$$

Die Diskretisierung der 1. Momentengleichung beim Tiefenpunkt $l+\frac{1}{2}$ gibt

$$\frac{(qfJ)_{01} - (qfJ)_{00}}{q_{0+\frac{1}{2}} D_{+\frac{1}{2}}} + G_{+\frac{1}{2}}\left((gH)_{-1+\frac{1}{2}} - (gH)_{0+\frac{1}{2}}\right) + V_{+\frac{1}{2}}\left(H_{-1+\frac{1}{2}} - H_{0+\frac{1}{2}}\right) = \kappa_{0+\frac{1}{2}} H_{0+\frac{1}{2}} \tag{3.89}$$

und mit den Definitionen

$$\alpha_l = \frac{1}{D_l}\frac{1}{\kappa_{0l} + G_l g_{0l} + V_l} \tag{3.90}$$

$$\beta_l = \frac{G_l}{\kappa_{0l} + G_l g_{0l} + V_l} \tag{3.91}$$

$$\gamma_l = \frac{V_l}{\kappa_{0l} + G_l g_{0l} + V_l} \tag{3.92}$$

erhält man

$$H_{0+\frac{1}{2}} = \alpha_{+\frac{1}{2}} \frac{(qfJ)_{01} - (qfJ)_{00}}{q_{0+\frac{1}{2}}} + \beta_{+\frac{1}{2}}(gH)_{-1+\frac{1}{2}} + \gamma_{+\frac{1}{2}} H_{-1+\frac{1}{2}} \tag{3.93}$$

Führt man die obige Rechnung für den Tiefenpunkt $l - \frac{1}{2}$ durch, ergibt sich

$$H_{0-\frac{1}{2}} = \alpha_{-\frac{1}{2}} \frac{(qfJ)_{00} - (qfJ)_{0-1}}{q_{0-\frac{1}{2}}} + \beta_{-\frac{1}{2}}(gH)_{-1-\frac{1}{2}} + \gamma_{-\frac{1}{2}} H_{-1-\frac{1}{2}} \tag{3.94}$$

Einsetzen in Gleichung (3.86) ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{D_0}\left(\alpha_{+\frac{1}{2}} \frac{(qfJ)_{01} - (qfJ)_{00}}{q_{0+\frac{1}{2}}} + \beta_{+\frac{1}{2}}(gH)_{-1+\frac{1}{2}} + \gamma_{+\frac{1}{2}} H_{-1+\frac{1}{2}}\right) + \\
&\frac{1}{D_0}\left(-\alpha_{-\frac{1}{2}} \frac{(qfJ)_{00} - (qfJ)_{0-1}}{q_{0-\frac{1}{2}}} - \beta_{-\frac{1}{2}}(gH)_{-1-\frac{1}{2}} - \gamma_{-\frac{1}{2}} H_{-1-\frac{1}{2}}\right) + \\
&G_0\left((fJ)_{-10} - (fJ)_{00}\right) + V_0\left(J_{-10} - J_{00}\right) = \kappa_{00}(J_{00} - S_{00})
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Umsortieren und Division durch $-\kappa$ führt zu

$$\begin{aligned}
&J_{01}\left(\frac{-\alpha_{+\frac{1}{2}}}{\kappa_{00} D_0}\frac{(qf)_{01}}{q_{0+\frac{1}{2}}}\right) + \\
&J_{00}\left(\frac{\alpha_{+\frac{1}{2}}}{\kappa_{00} D_0}\frac{(qf)_{00}}{q_{0+\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha_{-\frac{1}{2}}}{\kappa_{00} D_0}\frac{(qf)_{00}}{q_{0-\frac{1}{2}}} + \frac{G_0 f_{00} + V_0 + \kappa_{00}}{\kappa_{00}}\right) +
\end{aligned}$$

$$J_{0-1}\left(\frac{-\alpha_{-\frac{1}{2}}}{\kappa_{00}D_0}\frac{(qf)_{0-1}}{q_{0-\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$H_{-1+\frac{1}{2}}\frac{\beta_{+\frac{1}{2}}g_{-1+\frac{1}{2}}+\gamma_{+\frac{1}{2}}}{\kappa_{00}D_0} - H_{-1-\frac{1}{2}}\frac{\beta_{-\frac{1}{2}}g_{-1-\frac{1}{2}}+\gamma_{-\frac{1}{2}}}{\kappa_{00}D_0} + J_{-10}\frac{G_0 f_{-10}+V_0}{\kappa_{00}} + S_{00} \tag{3.96}$$

Sind die $\vec{J}_{k-1}$ und $\vec{H}_{k-1}$ vom vorangehenden Frequenzpunkt gegeben, erhält man damit ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der $\vec{J}_k$.

$$\mathcal{T}\cdot\vec{J}_k = \mathcal{V}\cdot\vec{H}_{k-1} + \vec{U}\cdot\vec{J}_{k-1} + \vec{S}_k \tag{3.97}$$

Da $\mathcal{T}$ eine tridiagonale Matrix ist, ist der Rechenzeitbedarf zur Lösung dieses Gleichungssystems proportional zur Zahl der Tiefenindizes l. Für gegebene $\vec{J}_k$ errechnet sich dann $\vec{H}_k$ direkt aus Gleichung (3.93).

$$H_{0+\frac{1}{2}} = J_{01}\left(\alpha_{+\frac{1}{2}}\frac{(qf)_{01}}{q_{0+\frac{1}{2}}}\right) + J_{00}\left(\alpha_{+\frac{1}{2}}\frac{-(qf)_{00}}{q_{0+\frac{1}{2}}}\right) + \beta_{+\frac{1}{2}}(gH)_{-1+\frac{1}{2}} + \gamma_{+\frac{1}{2}}H_{-1+\frac{1}{2}} \tag{3.98}$$

3.3.4 Randbedingungen für die Momentengleichungen

An den Rändern wird analog zum vorherigen Abschnitt von Gleichung (3.86) vorgegangen. Einer der Werte $H_{0+\frac{1}{2}}$ bzw. $H_{0-\frac{1}{2}}$ ist jedoch an den Rändern nicht verfügbar.

Am inneren Rand soll H_{00} dem Wert in Diffusionsnäherung entsprechen (Gleichung (2.24)). Bezeichnet man diesen Wert mit H^{D}_{00}, kann man einen fiktiven Zwischengitterpunkt bei $l+\frac{1}{2}$ einführen, dessen Wert so gewählt ist, daß der Mittelwert von $H_{0+\frac{1}{2}}$ und $H_{0-\frac{1}{2}}$ genau H^{D}_{00} ergibt.

$$H_{0+\frac{1}{2}} = 2\,H^{\mathrm{D}}_{00} - H_{0-\frac{1}{2}},\ D'_0 = r_{-1} - r_0 \tag{3.99}$$

durch Einsetzen in Gleichung (3.86) erhält man

$$\frac{2\,H^{\mathrm{D}}_{00}}{D'_0} + \frac{2}{D'_0}\left(-\alpha_{-\frac{1}{2}}\frac{(qfJ)_{00}-(qfJ)_{0-1}}{q_{0-\frac{1}{2}}} - \beta_{-\frac{1}{2}}(gH)_{-1-\frac{1}{2}} - \gamma_{-\frac{1}{2}}H_{-1-\frac{1}{2}}\right) +$$
$$G_0\left((fJ)_{-10} - (fJ)_{00}\right) + V_0\left(J_{-10} - J_{00}\right) = \kappa_{00}(J_{00} - S_{00}) \tag{3.100}$$

und durch Umsortieren und Division durch $-\kappa$

$$J_{00}\left(\frac{2}{\kappa_{00}D'_0}\left(\frac{\alpha_{+\frac{1}{2}}(qf)_{00}}{q_{0+\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha_{-\frac{1}{2}}(qf)_{00}}{q_{0-\frac{1}{2}}}\right) + \frac{G_0 f_{00}+V_0+\kappa_{00}}{\kappa_{00}}\right) +$$
$$J_{0-1}\left(\frac{-2}{\kappa_{00}D'_0}\frac{\alpha_{-\frac{1}{2}}(qf)_{0-1}}{q_{0-\frac{1}{2}}}\right) =$$
$$\frac{2}{\kappa_{00}D'_0}\left(H^{\mathrm{D}}_{00} - H_{-1-\frac{1}{2}}\beta_{-\frac{1}{2}}g_{-1-\frac{1}{2}} + \gamma_{-\frac{1}{2}}\right) + J_{-10}\frac{G_0 f_{-10}+V_0}{\kappa_{00}} + S_{00} \tag{3.101}$$

Am äußeren Rand wird analog ein fiktiver Zwischengitterpunkt bei $l-\frac{1}{2}$ eingeführt. Da das Strahlungsfeld dort stark nach außen hin gerichtet ($\mu \simeq 1$), gilt dort $J \simeq H$. Im winkelabhängigen Strahlungstransport wird nun analog zu den Eddingtonfaktoren der Faktor $h_0 = H/J$ am äußeren Rand berechnet. Man kann dann einen Sollwert für H durch eine Verknüpfung mit J in der Form $H_{00} = h_0 J_{00}$ gewinnen, und $H_{0-\frac{1}{2}}$ so wählen, daß dieser Wert am Rand erreicht wird.

$$H_{0-\frac{1}{2}} = 2\,h_0 J_{00} - H_{0+\frac{1}{2}},\ D'_0 = r_0 - r_1 \tag{3.102}$$

Wieder wird in Gleichung (3.86) eingesetzt

$$\frac{2}{D'_0}\left(\alpha_{+\frac{1}{2}}\frac{(qfJ)_{01}-(qfJ)_{00}}{q_{0+\frac{1}{2}}} + \beta_{+\frac{1}{2}}(gH)_{-1+\frac{1}{2}} + \gamma_{+\frac{1}{2}}H_{-1+\frac{1}{2}}\right) - \frac{2\,h_0 J_{00}}{D'_0} + G_0\left((fJ)_{-10}-(fJ)_{00}\right) + V_0\left(J_{-10}-J_{00}\right) = \kappa_{00}(J_{00}-S_{00}) \tag{3.103}$$

Umsortieren und Division durch $-\kappa$ führt zu

$$J_{01}\left(\frac{-2}{\kappa_{00}D'_0}\,\frac{\alpha_{+\frac{1}{2}}(qf)_{01}}{q_{0+\frac{1}{2}}}\right) + J_{00}\left(\frac{2}{\kappa_{00}D'_0}\left(\frac{\alpha_{+\frac{1}{2}}(qf)_{00}}{q_{0+\frac{1}{2}}} + h_0\right) + \frac{G_0 f_{00} + V_0 + \kappa_{00}}{\kappa_{00}}\right) = H_{-1+\frac{1}{2}}\frac{2\,(\beta_{+\frac{1}{2}}g_{-1+\frac{1}{2}} + \gamma_{+\frac{1}{2}})}{\kappa_{00}D'_0} + J_{-10}\frac{G_0 f_{-10} + V_0}{\kappa_{00}} + S_{00} \tag{3.104}$$

3.4 Das ALI-Verfahren

In den vorangehenden Abschnitten wurde beschrieben, wie für einen gegebenen Satz von Besetzungszahlen n_i die winkelgemittelten Intensitäten $J_\nu(r_i, x_k)$ ermittelt werden. Dabei sind die Elektronendichte n_e und die Elektronentemperatur T_e formal in den n_i enthalten. Die n_i werden durch die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems bestimmt, das die Gleichungen des statistischen Gleichgewichts (Abschnitt 2.2), des radiativen Gleichgewichts (Abschnitt 2.3) und der Ladungserhaltung beinhaltet. Der Einfluß des Strahlungsfeldes auf radiative Raten wird über die gemittelten Strahlungsfelder $\bar{J}^c_k$ für Kontinua (Gleichungen (3.12) und (3.13)), $\bar{J}_{lu}$ für Linienübergänge (Gleichungen (3.25) und (3.26)) und $\bar{J}'_{lu}$ für die Linienbänder der Eisengruppen-Elemente (Gleichung 3.54) berücksichtigt.

Bei der sog. Λ-Iteration werden die gemittelten Intensitäten $\bar{J}$ bei der Lösung der statistischen Gleichungen festgehalten. Zur konsistenten Lösung von Strahlungstransport und statistischen Gleichungen wird zwischen beiden Gleichungssystemen iteriert. Man beginnt mit einem Satz von n_i, die im Rahmen einer Startnäherung vorgegeben werden. Im Strahlungstransport werden gemittelte Intensitäten $\bar{J}$ berechnet, die dann in die statistischen Gleichungen zur Berechnung eines neuen Satzes von n_i eingehen. Diese Prozedur wird so lange wiederholt, bis eine Konvergenz bezüglich der n_i eintritt.

Da bei der Lösung der statistischen Gleichungen die Rückwirkung der n_i auf das Strahlungsfeld nicht berücksichtigt wird, konvergiert die Λ-Iteration sehr schlecht. Die Zahl der benötigten Iterationen entspricht in etwa dem Verhältnis von Strahlungsübergängen zu stoßinduzierten Übergängen. Für starke Linien kann dieses Verhältnis sehr große Werte Annehmen (~ 10000).

Beim ALI-Verfahren wird durch eine näherungsweise Berücksichtigung der Kopplung zwischen den n_i und dem Strahlungsfeld eine wesentlich bessere Konvergenzrate erzielt. Dazu werden bei der Lösung der statistischen Gleichungen approximierte Strahlungsfelder von der Form $\bar{J}^{\mathrm{app}}(\vec{n}) = \bar{J} + \Delta\bar{J}(\vec{n})$ verwendet. Für die Berechnung der $\Delta\bar{J}$ werden noch zusätzliche Größen im Strahlungstransport vorbereitet.

Im folgenden wird die Aufstellung des Systems von statistischen Gleichungen (Abschnitt 3.4.1) und das numerische Lösungsverfahren (Abschnitt 3.4.2) beschrieben. In Abschnitt 3.4.3 wird dann auf die Berechnung der approximierten Strahlungsfelder $\bar{J}^{\mathrm{app}}$ eingegangen.

3.4.1 Die statistischen Gleichungen

Die Gleichungen für die Berechnung der atomaren Besetzungszahlen im statistischen Gleichgewicht wurden bereits in Abschnitt 2.2 beschrieben. Für jeden Tiefenpunkt wird ein Gleichungssystem von der Form

$$n_i \sum_{j\neq i}^{N} P_{ij} - \sum_{j\neq i}^{N} n_j P_{ji} = b_i \tag{3.105}$$

aufgestellt. Dabei ist b_i ein Vektor, der vorwiegend aus Nullen besteht. Nur für ein i wird die Forderung nach statistischem Gleichgewicht durch die Forderung nach Teilchenzahlerhaltung ersetzt $\sum_{i=1}^{N} n_i = 1$, d.h. $P_{ij} = 1$ und $b_i = 1$. Sollen auch Ionisations- und Rekombinationsprozesse berücksichtigt werden, muß der Satz der Besetzungszahlen um die relative Elektronendichte n_{e}, und das Gleichungssystem um die Forderung nach Ladungserhaltung erweitert werden. Mit $n_{N+1} = n_{\mathrm{e}}$

$$\sum_{i=1}^{N+1} n_i Z_i = 0 \tag{3.106}$$

mit $n_{N+1} = n_{\mathrm{e}}$, und der Ionenladung Z_i ($= -1$ für $i = N+1$). Soll auch die Elektronentemperatur $T_{\mathrm{e}} = n_{N+2}$ berechnet werden, wird noch die Forderung nach radiativem Gleichgewicht im CMF mit einbezogen (Abschnitt 2.3). Dabei werden Linien- und Kontinuumsopazitäten (κ^l und κ^c) gesondert behandelt.

$$F_T = \int_0^\infty (\eta_\nu - \kappa_\nu J_\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty (\eta_\nu^c - \kappa_\nu^c J_\nu)\,\mathrm{d}\nu + \int_0^\infty \left(\eta_\nu^l - \kappa_\nu^l J_\nu\right)\,\mathrm{d}\nu = F_T^c + F_T^l \tag{3.107}$$

Radiatives Gleichgewicht entspricht damit $F_T = 0$. Numerisch werden F_T^c und F_T^l unterschiedlich behandelt. Der Kontinuumsbeitrag wird analog zu den Kontinuumsraten (Gleichungen (3.12) und (3.13)) berechnet.

$$F_T^c = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left(\eta_\nu^c(\nu_k) - \kappa_\nu^c(\nu_k) \bar{J}_k^c \right) \tag{3.108}$$

Der Linienbeitrag kann direkt durch die Linienraten ausgedrückt werden.

$$F_T^l = \sum_{lu} \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} R_{lu} \tag{3.109}$$

Insgesamt ergibt sich ein Nichtlineares Gleichungssystem für die $N + 2$ variablen n_i von der Form

$$\vec{n} \cdot \mathcal{P}(\vec{n}, \bar{\mathcal{J}}) = \vec{b} \tag{3.110}$$

mit der Ratenmatrix $\mathcal{P}$ und den gemittelten Strahlungsfeldern $\mathcal{J} = \{\bar{J}_{lu},\ \bar{J}_k^c\}$. Verwendet man für die Lösung der Gleichungen die $\mathcal{J}$ aus dem Strahlungstransport, entspricht das einer Λ-Iteration. Beim ALI-Verfahren werden stattdessen approximierte Strahlungsfelder $\bar{\mathcal{J}}^{\mathrm{app}}(\vec{n})$ verwendet.

$$\vec{n} \cdot \mathcal{P}(\vec{n}, \bar{\mathcal{J}}^{\mathrm{app}}(\vec{n})) = \vec{b} \tag{3.111}$$

Damit die Ratengleichungen weiterhin separat für jeden Tiefenpunkt gelöst werden können, muß das approximierte Strahlungsfeld ebenfalls rein lokal berechnet werden können. Der Strahlungstransport innerhalb der betrachteten Gitterzelle muß durch die $\bar{\mathcal{J}}^{\mathrm{app}}$ also möglichst genau wiedergegeben werden.

3.4.2 Die Lösung der statistischen Gleichungen

Zur Lösung des Systems von statistischen Gleichungen wird ein hybrides Verfahren aus einem Newton-Verfahren und dem Broyden-Algorithmus angewendet (Hamann 1987; Koesterke et al. 1992). Beim Newtonverfahren wird die Lösung des Gleichungssystems iterativ ermittelt

$$\vec{n}^{k+1} = \vec{n}^k - \left(\vec{n}^k \mathcal{P}(\vec{n}^k) - \vec{b} \right) \mathcal{M}^{-1} \tag{3.112}$$

dabei entspricht der Index k der Anzahl von Iterationen. Die Matrix $\mathcal{M}$ wird folgendermaßen ermittelt

$$M_{ij} = \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\sum_m n_m P_{mj} \right) \tag{3.113}$$

Dazu werden Ableitungen von $\mathcal{P}$ benötigt, die auch entsprechende Ableitungen der $\bar{\mathcal{J}}$ enthalten. Für das ALI-Verfahren werden also auch die Ableitungen $\frac{\partial \bar{\mathcal{J}}^{\mathrm{app}}}{\partial n_i}$ benötigt.

Beim Broyden-Algorithmus wird statt der Matrix $\mathcal{M}^{-1}$ eine Aufdatierungsmatrix verwendet, die aus den $\mathcal{P}(\vec{n}^k)$ der vorangegangenen Iterationen ermittelt wird (entsprechend einer Sekantenmethode). Für den Beginn der Iteration oder für den Fall einer Divergenz wird jedoch wieder auf das Newtonverfahren zurückgegriffen. Durch das Broyden-Verfahren wird eine erhebliche Rechenzeitersparnis erreicht, da sowohl die Aufstellung als auch die Invertierung der Matrix $\mathcal{M}$ vermieden wird.

3.4.3 Die Berechnung der approximierten Strahlungsfelder

Die approximierten Strahlungsfelder $\bar{\mathcal{J}}^{\rm app}$ und die Ableitungen $\frac{\partial \bar{\mathcal{J}}^{\rm app}}{\partial n_i}$ werden für Linienübergänge mit einer für expandierende Atmosphären abgewandelten Form des Scharmer-Verfahrens ermittelt (Scharmer 1981; Scharmer 1984; Hamann 1986; Hamann 1987). Für die Eisenbänder und die Kontinua wird eine Approximation gewählt, die der Methode von Hempe entspricht (Hempe & Schoenberg 1986; Schoenberg & Hempe 1986), und die in ähnlicher Form von Hillier & Miller (1998) für expandierende Atmosphären verwendet wird.

Die Konvergenzprobleme bei der Λ-Iteration treten vor allem bei sehr großen optischen Tiefen auf. Man kann leicht sehen, daß mit Gleichung (2.4) in diesem Fall $I_\nu = S_\nu$ gilt, und mit Gleichung (2.31) auch $J_\nu = S_\nu$. Der Strahlungstransport wird für große optische Tiefen also lokal. Für eine starke Linie ergibt sich mit den Gleichungen (3.28) und (3.29)

$$S_\nu \simeq S_l = \eta_l/\kappa_l = \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} \frac{n_u}{n_l \frac{g_u}{g_l} - n_u} \tag{3.114}$$

Beim Scharmer-Verfahren wird nun der Frequenzbereich ermittelt, in dem $\tau_\nu > \gamma$ ist. Über den Parameter γ wird so der Linienkern definiert, für den $J_\nu = S_\nu$ angenommen wird. Sind $\nu_{\rm blue}$ und $\nu_{\rm red}$ die Grenzfrequenzen des Linienkerns, wird $\bar{J}$ in folgender Form approximiert:

$$\bar{J}^{\rm app}(\vec{n}) = \bar{J}(\vec{n}_{\rm old}) + (S_l(\vec{n}) - S_l(\vec{n}_{\rm old})) \int_{\nu_{\rm blue}}^{\nu_{\rm red}} \phi(\nu)\,{\rm d}\nu \tag{3.115}$$

Dabei ist $\bar{J}(\vec{n}_{\rm old})$ das Strahlungsfeld, das mit den alten Besetzungszahlen $\vec{n}_{\rm old}$ im Strahlungstransport ermittelt wird. Der zweite Term ist dann die approximative Änderung des Strahlungsfeldes im Linienkern. Die Ableitungen nach $\vec{n}$ sind damit

$$\frac{\partial \bar{J}^{\rm app}}{\partial n_i} = \frac{\partial S_l}{\partial n_i} \int_{\nu_{\rm blue}}^{\nu_{\rm red}} \phi(\nu)\,{\rm d}\nu \tag{3.116}$$

Für die Linienbänder beim Opacity-Sampling ist keine so einfache Approximation möglich, da sich die Bänder über einen relativ breiten Frequenzbereich erstrecken, über den der Anteil der Linienquellfunktion an der Gesamtquellfunktion stark variiert. Stattdessen wird eine andere Methode verwendet, bei der die lokale Abhängigkeit der J_ν von der Gesamtquellfunktion S_ν dem Strahlungstransport direkt entnommen wird. Dazu wird Gleichung (3.97) in folgender Form umgeschrieben

$$\vec{J}_k = (\mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{V}) \cdot \vec{H}_{k-1} + (\mathcal{T}^{-1} \cdot \vec{U}) \cdot \vec{J}_{k-1} + \mathcal{T}^{-1} \cdot \vec{S}_k \tag{3.117}$$

Die lokale Antwort von $\vec{J}_k$ auf Änderungen der Strahlungsgrößen wird nun durch die Diagonale der Matrizen auf der rechten Seite approximiert.

$$\vec{D} = D(\mathcal{T}^{-1}) \tag{3.118}$$

$$\vec{J}_k^{\rm app} = (\vec{D} \cdot \mathcal{V}) \cdot \vec{H}_{k-1} + (\vec{D} \cdot \vec{U}) \cdot \vec{J}_{k-1} + \vec{D} \cdot \vec{S}_k \tag{3.119}$$

Da $\vec{H}$ aus der räumlichen Ableitung von $\vec{J}$ hervorgeht, ist keine lokale Approximation für $\vec{H}_{k-1}$ möglich. Der entsprechende Term wird als konstant angenommen.

$$\vec{J}_k^{\mathrm{app}} = \vec{C}_H + (\vec{D} \cdot \vec{U}) \cdot \vec{J}_{k-1} + \vec{D} \cdot \vec{S}_k \tag{3.120}$$

Nun wird die Größe $\mathcal{D}_{\|}^{\psi}$ bestimmt, die die lineare Antwort von J_k auf die Variation einer Größe ψ wiedergeben soll.

$$\mathcal{D}_k^{\psi} = \frac{\partial J_k^{\mathrm{app}}}{\partial \psi} \tag{3.121}$$

$$\mathcal{D}_k^{\psi} = DU \cdot \frac{\partial J_{k-1}^{\mathrm{app}}}{\partial \psi} + D \cdot \frac{\partial S_k}{\partial \psi} = DU \cdot \mathcal{D}_{k-1}^{\psi} + D \cdot \frac{\partial S_k}{\partial \psi} \tag{3.122}$$

Damit ergibt sich das approximierte Strahlungsfeld beim Frequenzindex k,

$$J_k^{\mathrm{app}} = J_k(\vec{n}_{\mathrm{old}}) + \mathcal{D}_k^{\psi} \left(\psi(\vec{n}_{\mathrm{old}}) - \psi(\vec{n})\right) = J_k(n_{\mathrm{old}}) + \mathcal{D}_k^{\psi} \Delta\psi(\vec{n}) \tag{3.123}$$

und analog die Ableitung

$$\frac{\partial J_k^{\mathrm{app}}}{\partial n_i} = \mathcal{D}_k^{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n_i} \tag{3.124}$$

Für das approximierte Strahlungsfeld $\bar{J}^{\mathrm{app}}$, das schließlich in die Ratengleichungen eingeht, wird das Strahlungsfeld $J_k(\vec{n}_{\mathrm{old}})$ entsprechend der Abhängigkeit der J_k^{app} von den Größen ψ_i extrapoliert.

$$\bar{J}^{\mathrm{app}}(\vec{n}) = \int_0^{\infty} \phi(x) \left(J_x(\vec{n}_{\mathrm{old}}) + \Delta J_x^{\mathrm{app}}(\vec{n})\right) \,\mathrm{d}x \; = \bar{J}(\vec{n}_{\mathrm{old}}) + \sum_i \bar{\mathcal{D}}^{\psi_i} \,\Delta\psi_i(\vec{n}) \tag{3.125}$$

mit

$$\bar{\mathcal{D}}^{\psi} = \int_0^{\infty} \phi(x)\, \mathcal{D}_x^{\psi} \,\mathrm{d}x \tag{3.126}$$

Für die Ableitungen der $\bar{J}^{\mathrm{app}}$ nach den Besetzungszahlen ergibt sich damit

$$\frac{\partial \bar{J}^{\mathrm{app}}}{\partial n_i} = \sum_j \bar{\mathcal{D}}^{\psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial n_i} \tag{3.127}$$

Für jeden Prozeß müssen nun die Größen ψ so gewählt werden, daß eine möglichst gute Approximierung des Strahlungsfeldes erreicht wird. Die ψ müssen bei der Lösung der Ratengleichungen verfügbar sein, es muß also gelten $\psi_i = \psi_i(\vec{n})$. Die allgemeinste Form wäre sicherlich $\psi_i = n_i$, jedoch wäre aufgrund der großen Zahl der n_i dabei der Aufwand an Rechenzeit und Speicherbedarf zu hoch. Deshalb werden in dieser Arbeit die ψ_i für die Eisenbänder auf das obere und untere Niveau des Übergangs eingeschränkt,

$$\bar{J}'_{LU}(n_U, n_L)^{\mathrm{app}} = \bar{J}'_{LU} + \bar{\mathcal{D}}^{n_L} n_L + \mathcal{D}^{n_U} n_U \tag{3.128}$$

wobei die $\mathcal{D}^{n_i}$ analog zu den $\bar{J}'$ in Gleichung (3.54) integriert werden.

$$\bar{\mathcal{D}}^{n_i} = \int \frac{\nu_{LU}}{\nu} \mathcal{D}^{n_i} \, \Phi_{LU}(\nu) \, \mathrm{d}\nu \tag{3.129}$$

Für Kontinua wird die Kontinuumsquellfunktion beim Frequenzindex k verwendet ($S_k^c = \eta_k^c/\kappa_k^c$) und analog zu Gleichung (3.14) gemittelt.

$$\bar{J}_k^c(S_k^c)^{\mathrm{app}} = \bar{J}_k^c + \mathcal{D}_k^{S_c} S_k^c \tag{3.130}$$

mit

$$\bar{\mathcal{D}}^{S_c} = \int w_k(\nu) \, D_\nu^{S_c} \, \mathrm{d}\nu \tag{3.131}$$

Die Berechnung von $D_\nu^{S_c}$ nach Gleichung (3.122) ist allerdings nur unter Annahme einer Nebenbedingung möglich, da die Ableitung $\frac{\partial S}{\partial S_c}$ sonst nicht berechnet werden kann. Schreibt man

$$\eta_\nu = \eta_l + \eta_c, \; \kappa_\nu = \kappa_l + \kappa_c \tag{3.132}$$

wobei die mit c indizierten Größen den Kontinuumsanteil wiedergeben, erhält man

$$S_\nu = \frac{\eta_l + \eta_c}{\kappa_l + \kappa_c} = \frac{\eta_l}{\kappa_l + \kappa_c} + S_c \cdot \frac{\kappa_c}{\kappa_l + \kappa_c} \tag{3.133}$$

Eine Ableitung nach S_c kann z.B. unter der Annahme $\kappa = \mathrm{Const.}$ gebildet werden.

$$\frac{\partial S_\nu}{S_c} = \frac{\kappa_c}{\kappa_l + \kappa_c} \tag{3.134}$$

Weiterhin wird für die Kontinua die Frequenzableitung in Gleichung (3.122) vernachlässigt. Mit der Diagonalen D aus Gleichung (3.122) erhält man dann

$$\bar{\mathcal{D}}^{S_c} = \int w_k(\nu) \, D(\nu) \frac{\kappa_c}{\kappa_l + \kappa_c} \, \mathrm{d}\nu \tag{3.135}$$

Kapitel 4

Spektralanalysen

In diesem Kapitel werden Standard-Spektralanalysen (Hamann & Koesterke 1996; Hillier 1996) von WC/WO-Sternen in der Großen Magellanschen Wolke (LMC) vorgestellt. Es werden Spektren von sechs Sternen des Spektraltyps WC 4 und einem Stern des Typs WO 4 untersucht. Die Daten sind mit dem "Faint Object Spectrograph" (FOS) an Bord des "Hubble Space Telescope" (HST) aufgenommen (Abschnitt 4.1). Sie werden mit Hilfe von Non-LTE-Modellen für sphärisch expandierende Atmosphären unter Standardannahmen analysiert (Abschnitt 4.2). Dabei werden komplexe Modellatome von Helium, Kohlenstoff und Sauerstoff verwendet.

Es ergeben sich Leuchtkräfte im Bereich von $10^{5.1}$ - $10^{5.6} L_\odot$ und Massenverlustraten von etwa $10^{-4} D^{-\frac{1}{2}}\ M_\odot\,\mathrm{yr}^{-1}$ (Dichtekontrast D, siehe Abschnitt 3.1.4). Die ermittelten Effektivtemperaturen $T_\star$ liegen im Bereich um 100 kK. Die Oberflächenhäufigkeiten entsprechen den Häufigkeitsmustern in He-brennenden Kernen mit den Massenbruchteilen $\beta_\mathrm{C} \simeq 0.4$ und $\beta_\mathrm{O} = 0.1 - 0.5$ (Abschnitt 4.3).

Stellare Parameter aus quantitativen Spektralanalysen bilden eine empirische Grundlage für das Verständnis der späten Entwicklungsphasen massereicher Sterne. Das Verhältnis (C+O)/He an der Sternoberfläche, das in theoretischen Entwicklungsmodellen berechnet wird, hängt z.B. empfindlich von den Werten ab, die für den Massenverlust bzw. die Metallizität des Vorläufersterns, das konvektive Überschießen und die Reaktionsrate $^{12}\mathrm{C} + \alpha \rightarrow {}^{16}\mathrm{O}$ angenommen werden. In Abschnitt 4.4 werden die Ergebnisse mit Sternentwicklungsrechnungen und mit einem Sample von galaktischen WC-Sternen verglichen. Die ermittelten Leuchtkräfte und Oberflächenhäufigkeiten sind in Übereinstimmung mit einigen Entwicklungsrechnungen, zu anderen zeigen sich deutliche Diskrepanzen. Die ermittelten Massenverlustraten sind in Übereinstimmung mit den üblicherweise angenommenen Relationen. Systematische Unterschiede zwischen dem galaktischen und dem LMC-Sample deuten auf eine mögliche Abhängigkeit der WC-Massenverlustraten von der Metallizität hin.

4.1 Beobachtungen

Im Rahmen des Beobachtungsprogramms wurden spektrophotometrische Beobachtungen hoher Qualität des vollständigen Samples von bekannten WC-"Einzelsternen" in der LMC aufgenom-

Stern	Spektraltyp	andere Bezeichnungen
Br 7	WC 4	HD 32125, WS 3, Sk -66°21, FD 4
Br 8	WC 4	HD 32257, L-40, WS 4, Sk -69°42, FD 5
Br 10	WC 4	HD 32402, AL-37, WS 6, Sk -68°15, BE-1717, FD 7
Br 43	WC 4	HD 37026, S 41, AL-242, WS 31, Sk -67°144
Br 50	WC 4	HD 37680, L-286, WS 35, Sk -69°191, BE-598
Br 74	WC 4	HDE 269888, WS 42, Sk -69°234, BE-409, FD 61
Br 93	WO 4	Sand 2, Sk -68°145, FD 73

Tabelle 4.1: Programmsterne mit den Bezeichnungen aus dem Katalog von Breysacher (1981), ihrem Spektraltyp und anderen Benennungen.

men. Alle Sterne mit Anzeichen für einen Doppelsternpartner (mit der Klassifikation WC+[abs] im Katalog von Breysacher (1981)) wurden ausgeschlossen, da für diese Sterne der (sehr unsichere) Beitrag des anderen Sterns mit berücksichtigt werden müßte. Außerdem soll die Diskussion der Ergebnisse auf die Entwicklung von Einzelsternen begrenzt werden. Die beobachteten Sterne sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

Die UV-Spektren im Wellenlängenbereich von 1150-3300 Å wurden mit dem "Faint Object Spectrograph" (FOS) an Bord des "Hubble Space Telescope" (HST) im Rahmen des Projekts "Constraints on Massive Star Evolution from Carbon and Oxygen Abundances of LMC WC Stars" (PI: John Hillier) im Zeitraum von September '94 bis Juni '95 aufgenommen. Mit den Gittern G130H (1150-1606 Å), G190H (1573-2330 Å) und G270H (2222-3301 Å) in Kombination mit der runden 0.26" Apertur (0.3) wird eine Auflösung von etwa 0.9 Å für G130H, 1.4 Å für G190H und 1.9 Å für G270H erzielt. Mit totalen Belichtungszeiten im Bereich von 22 min für den hellsten Stern (Br 10) bis zu 95 min für den dunkelsten (Br 74) wird ein Signal-zu-Rausch-Verhältnis von ungefähr 30 erreicht.

Für den optischen Spektralbereich werden Daten aus dem Atlas von Torres & Massey (1987) verwendet, die über den Wellenlängenbereich von 3400-6800 Å eine Auflösung von 10-15 Å bieten. Für die Sterne Br 10 und Br 93 werden optische Spektren von Wessolowski mit einer besseren Auflösung (ungefähr 3 Å) und höherem S/N verwendet, die im Dezember 1989 am ESO 3.6 m Teleskop aufgenommen wurden. Mit dem "ESO Faint Object Spectrograph" (EFOSC) wird im Echellemodus mit dem "Blue Cross Disperser" (BCD) ein Wellenlängenbereich von 4000-7000 Å abgedeckt. Die ursprünglich unkalibrierten EFOSC-Spektren sind auf den Kontinuumsfluß der Spektren von Torres & Massey (1987) skaliert.

4.2 Modellannahmen

Die Atmosphärenmodelle für die Standardanalysen werden mit dem Kieler Atmosphärencode berechnet (Koesterke et al. 1992; Hamann et al. 1992; Koesterke & Hamann 1995; Leuenhagen & Hamann 1994; Leuenhagen et al. 1996). Die Unterschiede zu der in Kapitel 3 beschriebenen Programmversion betreffen hauptsächlich den Strahlungstransport. Der Streuterm in Gleichung (3.60) wird durch ein interpoliertes Strahlungsfeld aus einem reinen Kontinuumstransport er-

Ion	Grobanalysen Energieniveaus	Feinanalysen Energieniveaus
He I	17	17
He II	16	16
He III	1	1
C II	3	3
C III	40	40
C IV	19	54
C V	1	1
O III	1	1
O IV	25	25
O V	36	36
O VI	15	15
O VII	1	1
Summe	175	210

Tabelle 4.2: Zusammenfassung der Modellatome

setzt. Dadurch kann die Transportgleichung direkt integriert werden. Der Strahlungstransport im CMF wird nur für die Frequenzen gelöst, wo Linien zur Opazität beitragen. Zur Berechnung von Kontinuumsraten wird das Strahlungsfeld aus dem statischen Kontinuumstransport verwendet, das bezüglich der Linienbeiträge durch "Blockingfaktoren" korrigiert wird.

Der Dichte- und Geschwindigkeitsverlauf wird wie in Abschnitt 3.1.3 beschrieben entsprechend einem β-Gesetz angenommen. Der Exponent β im Geschwindigkeitsgesetz (3.1) wird dabei auf 1 gesetzt. Inhomogenitäten (Abschnitt 3.1.4) werden nicht berücksichtigt. Die verwendeten Modellatome beinhalten die relevanten Ionisationsstufen von He, C und O. Dabei wird für Grob- bzw. Feinanalysen eine unterschiedliche Anzahl von Modellniveaus verwendet (Tabelle 4.2).

Die Elemente der Eisengruppe werden in den Standardanalysen nicht berücksichtigt. Pilotstudien (Schmutz 1991; Hillier & Miller 1998) zeigen, daß nur geringe Auswirkungen auf die Ergebnisse quantitativer Analysen zu erwarten sind. Das wird durch einen direkten Vergleich mit einer Vorversion des Codes von Hillier (Hillier & Miller 1998) für die hier durchgeführten Analysen bestätigt. Die leichte Tendenz zur Unterschätzung von Leuchtkräften und zur Überschätzung von Sauerstoffhäufigkeiten bei der Vernachlässigung des Line-Blanketing ist für die Interpretation der quantitativen Ergebnisse dieser Arbeit von untergeordneter Bedeutung.

4.3 Analysen

Die Spektren der sechs Programmsterne vom Spektraltyp WC 4 ähneln sich sehr. Sie zeigen Emissionslinien der Ionen He II, C III, C IV und O IV - O VI. Linienäquivalentbreiten unterscheiden sich höchstens um einen Faktor drei. Zur Bestimmung des relevanten Parameterbereichs wer-

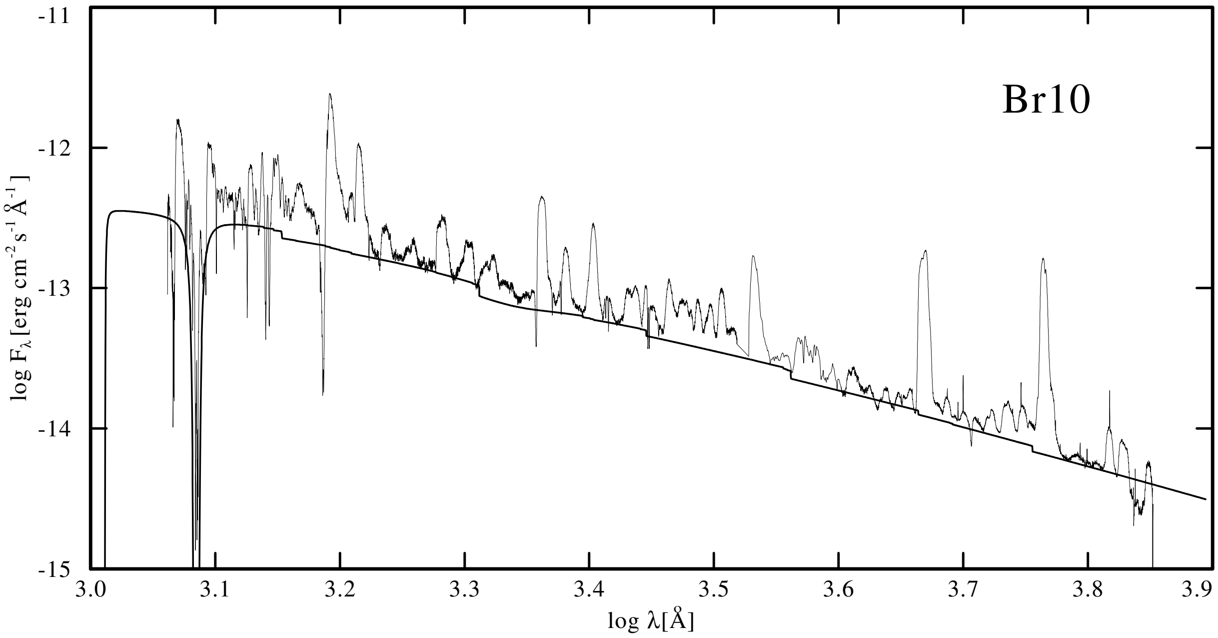

Abbildung 4.1: Vergleich des Modell-Kontinuumsflusses (dicke Linie) mit dem beobachteten Fluß (dünne Linie) für den Programmstern Br 10. Als Entfernungsmodulus wird ein Wert von 18.5 mag angenommen. Das Modellkontinuum ist bezüglich der interstellaren Absorption entsprechend Tabelle 4.3 korrigiert. Zusätzlich wird eine Ly α-Absorption mit einer Wasserstoffsäulendichte von $7\,10^{21}\,\mathrm{cm}^{-2}$ berücksichtigt.

den zunächst Vergleiche mit einem groben Modellgitter im Temperaturbereich $T_\star = 60 - 180$ kK mit den Oberflächenhäufigkeiten $\beta_\mathrm{C} = 0.25$ und $\beta_\mathrm{O} = 0.15$ durchgeführt, das einen sehr weiten Bereich von R_t abdeckt. Danach wird ein Feingitter im Bereich $T_\star = 60 - 130$ kK berechnet, bei dem R_t auf den Bereich eingeschränkt wird, in dem die beobachteten Linienstärken reproduziert werden. Schließlich folgt eine Feinanalyse, bei der die Oberflächenchemie, die Windendgeschwindigkeit und die Leuchtkraft für jeden Stern separat angepaßt wird. Dabei wird ein erweitertes Modellatom verwendet, bei dem die Drehimpulszustände für C IV bis zur Hauptquantenzahl $n = 10$ aufgespalten sind (Tabelle 4.2), um systematische Fehler bei der Bestimmung der Kohlenstoffhäufigkeit zu vermeiden (Hamann et al. 1992).

4.3.1 Kontinua

Aufgrund der bekannten Entfernung zur LMC, der geringen interstellaren Extinktion und der genauen UV-Photometrie des HST können die Leuchtkräfte der Programmsterne durch einen Vergleich der Beobachtungen mit Modellkontinua sehr genau bestimmt werden. Auf dieser Basis ist es möglich, zuverlässige stellare Radien und Massenverlustraten zu bestimmen (vgl. Abschnitt 3.1.5). Bei dem Vergleich der beobachteten Flüsse mit geröteten Modellkontinua wird ein Entfernungsmodulus von 18.5 mag ($\equiv\ 50.1\,\mathrm{kpc}$, vgl. z.B. Jones et al. (1994)) angenommen. Galaktische Vordergrundextinktion wird nach Seaton (1979) mit einem Farbexzeß von

Stern	$\log L$	$E_{B-V}^{\rm LMC}$	$\log(n_{\rm Phot}\,{\rm s}^{-1})$ für		
	$[L_\odot]$	[mag]	H I	He I	He II
Br 7	5.29	0.08	49.17	48.88	38.23
Br 8	5.13	0.06	49.02	48.67	38.07
Br 10	5.62	0.05	49.50	49.20	38.64
Br 43	5.26	0.01	49.15	48.81	38.26
Br 50	5.55	0.05	49.43	49.11	38.31
Br 74	5.13	0.28	49.02	48.67	38.07
Br 93	5.10	0.13	48.97	48.73	46.31

Tabelle 4.3: Resultate aus dem Vergleich der absoluten Modellflüsse mit der Beobachtung: Stellare Leuchtkraft L; Farbexzeß durch interne LMC-Extinktion $E_{B-V}^{\rm LMC}$; Modellflüsse: Zahl der ionisierenden Photonen, die pro Sekunde jenseits der Ionisationskanten von H I, He I und He II emittiert werden.

$E_{B-V}^{\rm gal} = 0.03\,\rm mag$ berücksichtigt. Der Beitrag der LMC wird für jedes Modell separat durch eine Anpassung des Extinktionsparameters bestimmt, so daß die Steigung des Modellkontinuums mit dem beobachteten Kontinuum übereinstimmt. Dabei wird das Extinktionsgesetz für die LMC von Howarth (1983) verwendet. Bei der detaillierten Analyse der Linienspektren (Abschnitt 4.3.2) wird das so angepaßte Modellkontinuum zur Normalisierung der beobachteten Spektren verwendet. Auf diese Weise werden absolute Flüsse verglichen, und das Problem der Kontinuumsnormalisierung bei den linienreichen WC-Spektren auf die Anpassung des Extinktionsparameters reduziert. Das angepaßte Modellkontinuum für Br 10 ist in Abb. 4.1 dargestellt. Es wird eine gute Übereinstimmung mit der Beobachtung erzielt. Bei kurzen Wellenlängen beeinflußt allerdings das Pseudokontinuum durch Linienemission von Fe V und Fe VI die Energieverteilung deutlich (siehe auch Kapitel 5).

Die ermittelten Werte für $E_{B-V}^{\rm LMC}$ sind in Tabelle 4.3 aufgelistet. Nur für Br 93 und Br 74, den dunkelsten der Programmsterne, wird ein Wert höher als 0.1 mag für den LMC-Beitrag ermittelt. Nach einer Entrötung stellen sich die Spektren und Leuchtkräfte von Br 74 von Br 8 als nahezu identisch heraus. Die starke Ähnlichkeit deutet darauf hin, daß das verwendete Extinktionsgesetz für die LMC (Howarth 1983) zumindest für Br 74 und Br 8 Gültigkeit hat. In vorangegangenen Arbeiten bestimmen Morris et al. (1993) Farbexzesse für die Sterne Br 7, Br 8, Br 43 und Br 50 unter der Annahme, daß die Kontinuumsflüsse durch ein Potenzgesetz repräsentiert werden können. Außer für Br 7, für den sie $E_{B-V}^{\rm tot} = 0.01 \pm 0.05$ ermitteln, liegen die Werte aus der vorliegenden Arbeit innerhalb ihrer 1σ Fehlerangabe. Der für den WO-Stern Br 93 ermittelte Wert stimmt gut mit den Werten von Kingsburgh et al. (1995) überein ($E_{B-V}^{\rm gal} = 0.08$, $E_{B-V}^{\rm LMC} = 0.10$).

Als Ergebnis der Analysen erhält man Leuchtkräfte im Bereich von $10^{5.1}$-$10^{5.6} L_\odot$ bei stellaren Effektivtemperaturen um 100 kK, womit sich Radien von 1.1-$2.5 R_\odot$ ergeben. Die Empfindlichkeit der ermittelten Leuchtkräfte bezüglich einer Variation von $T_\star$ stellt sich als relativ klein heraus, da die Änderung in der bolometrischen Korrektur durch die notwendige Anpassung des Rötungsparameters teilweise kompensiert wird. Die Leuchtkraft von Modellen mit ähnlichen Linienstärken variiert innerhalb des untersuchten Temperaturbereichs lediglich um etwa 0.1 dex.

Stern	$T_\star$ [kK]	$T_{2/3}$ [kK]	R_t $[R_\odot]$	$R_\star$ $[R_\odot]$	$R_{2/3}$ $[R_\star]$	$\log \dot{M}$ $[M_\odot\,\mathrm{yr}^{-1}]$	v_∞ [km/s]	$\log L$ $[L_\odot]$	β_C (Massenanteil)	β_O
Br 7	94.6	49.8	2.00	1.65	3.60	-4.16	2300	5.29	0.4	0.2
Br 8	104.2	43.6	1.17	1.13	5.72	-4.06	2300	5.13	0.4	0.3
Br 10	92.5	45.6	2.00	2.52	4.11	-3.80	2800	5.62	0.5	0.2
Br 43	103.9	42.1	1.17	1.32	6.08	-3.91	2600	5.26	0.4	0.3
Br 50	94.0	38.8	1.58	2.25	5.86	-3.72	2800	5.55	0.4	0.1
Br 74	104.2	43.6	1.17	1.13	5.72	-4.06	2300	5.13	0.4	0.3
Br 93	101.0	72.5	2.82	1.17	1.93	-4.41	3600	5.10	0.4	0.5

Tabelle 4.4: Resultate der quantitativen Spektralanalysen: Effektivtemperaturen $T_\star$ und $T_{2/3}$, bezogen auf die Radien $R_\star$ bzw. $R_{2/3}$; der Transformierte Radius R_t nach Gleichung (3.2); stellare Radien $R_\star$; der Radius $R_{2/3}$ mit $\tau_\mathrm{R} = 2/3$ (vgl. Abschnitt 3.1.1); Massenverlustrate $\dot{M}$; Windendgeschwindigkeit v_∞; stellare Leuchtkraft L; Oberflächenhäufigkeiten von Kohlenstoff β_C und Sauerstoff β_O.

Variationen in der Winddichte oder der chemischen Zusammensetzung der Modellatmosphären beeinflussen die spektrale Energieverteilung hingegen bedeutend, so daß kein Zusammenhang zwischen den visuellen Helligkeiten und den Leuchtkräften der Sterne besteht.

Die Auswirkungen des Eisen-Line-Blanketing auf die spektrale Energieverteilung werden durch einen Vergleich mit dem Code von Hillier (Hillier & Miller 1998) ermittelt. Modelle mit ähnlichen Spektren und derselben visuellen Helligkeit zeigen stärkere Flüsse unterhalb von 1100 Å. Die Auswirkungen auf die Zahl der ionisierenden Photonen jenseits der Kanten von H I und He I liegen für WC 4-Modelle im Bereich von 0.13 dex (vgl. Tabelle 4.3).

4.3.2 Feinanalysen

Die Ergebnisse der quantitativen Analysen sind in Tabelle 4.4 aufgelistet. Die entsprechenden Modellspektren sind in Abb. 4.2-4.8 im Vergleich zur Beobachtung dargestellt. Die beobachteten Spektren werden in dieser Darstellung durch eine Division durch die geröteten Modellkontinua (Tabelle 4.3) normalisiert.

Durch die Einbeziehung des UV-Spektralbereichs kann die C III/C IV-Ionisationsstruktur unter Berücksichtigung von Linien wie C III 1620 Å, 1923 Å, 2010 Å und 2297 Å und C IV 2405 Å, 2525 Å, 2595 Å und 2699 Å sehr präzise ermittelt werden. Das Verhältnis $\beta_\mathrm{C}/\beta_\mathrm{He}$ wird durch die Anpassung der benachbarten Linien He II/C IV 5412/ 5470 Å und der UV-Linien He II 2734 Å und 3204 Å mit einer Genauigkeit um 20% bestimmt. Im untersuchten Parameterbereich können die beobachteten Linienstärken für Helium und Kohlenstoff bei jeder Temperatur durch die Anpassung von R_t reproduziert werden, so daß ein schmaler Streifen in der R_t-$T_\star$-Ebene definiert wird.

Die weitere Eingrenzung der stellaren Parameter wird durch die Anpassung der Sauerstofflinien erzielt. Die stellare Temperatur $T_\star$ und die Sauerstoffhäufigket β_O werden durch die Mo-

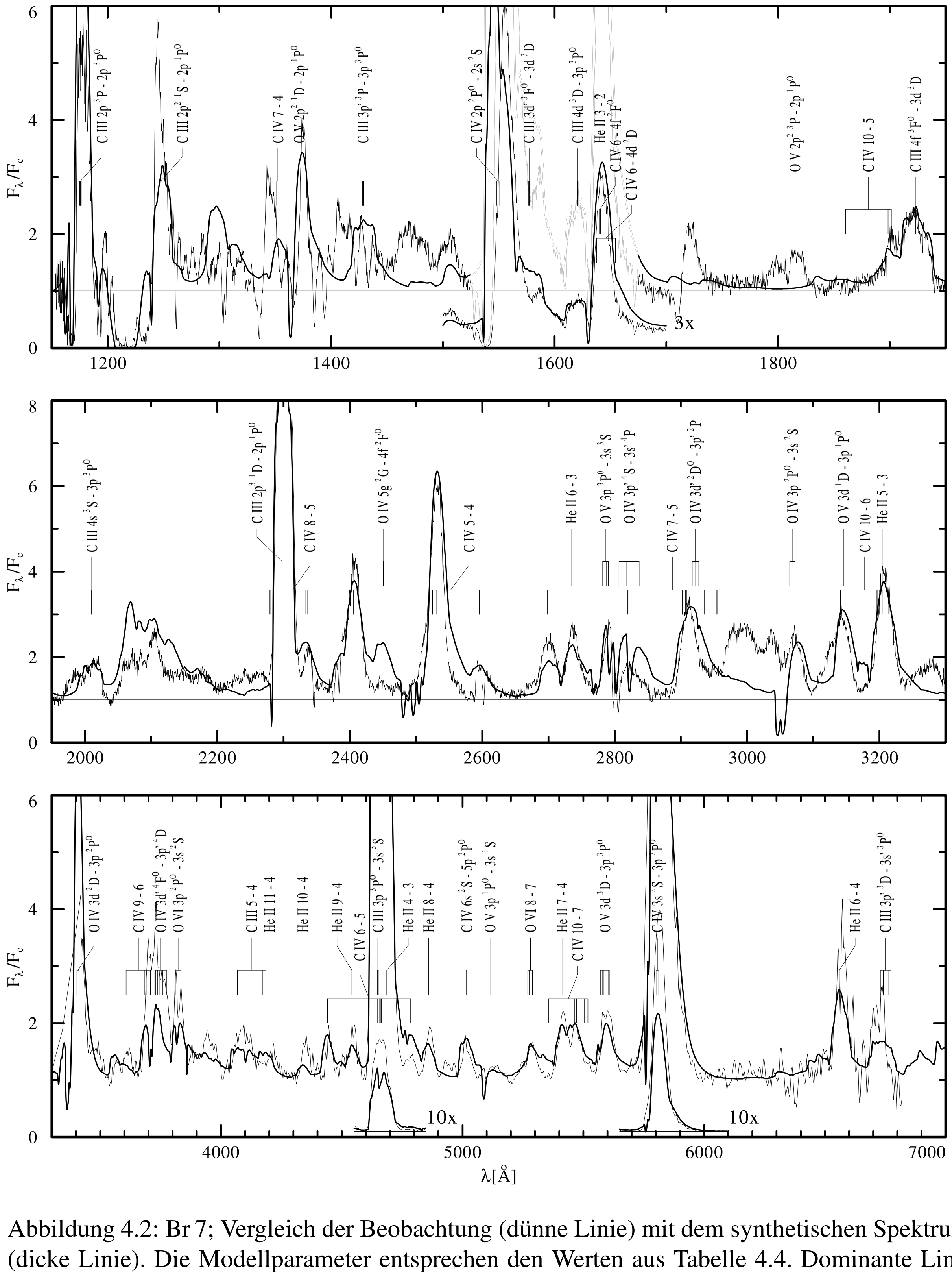

Abbildung 4.2: Br 7; Vergleich der Beobachtung (dünne Linie) mit dem synthetischen Spektrum (dicke Linie). Die Modellparameter entsprechen den Werten aus Tabelle 4.4. Dominante Linienübergänge sind identifiziert.

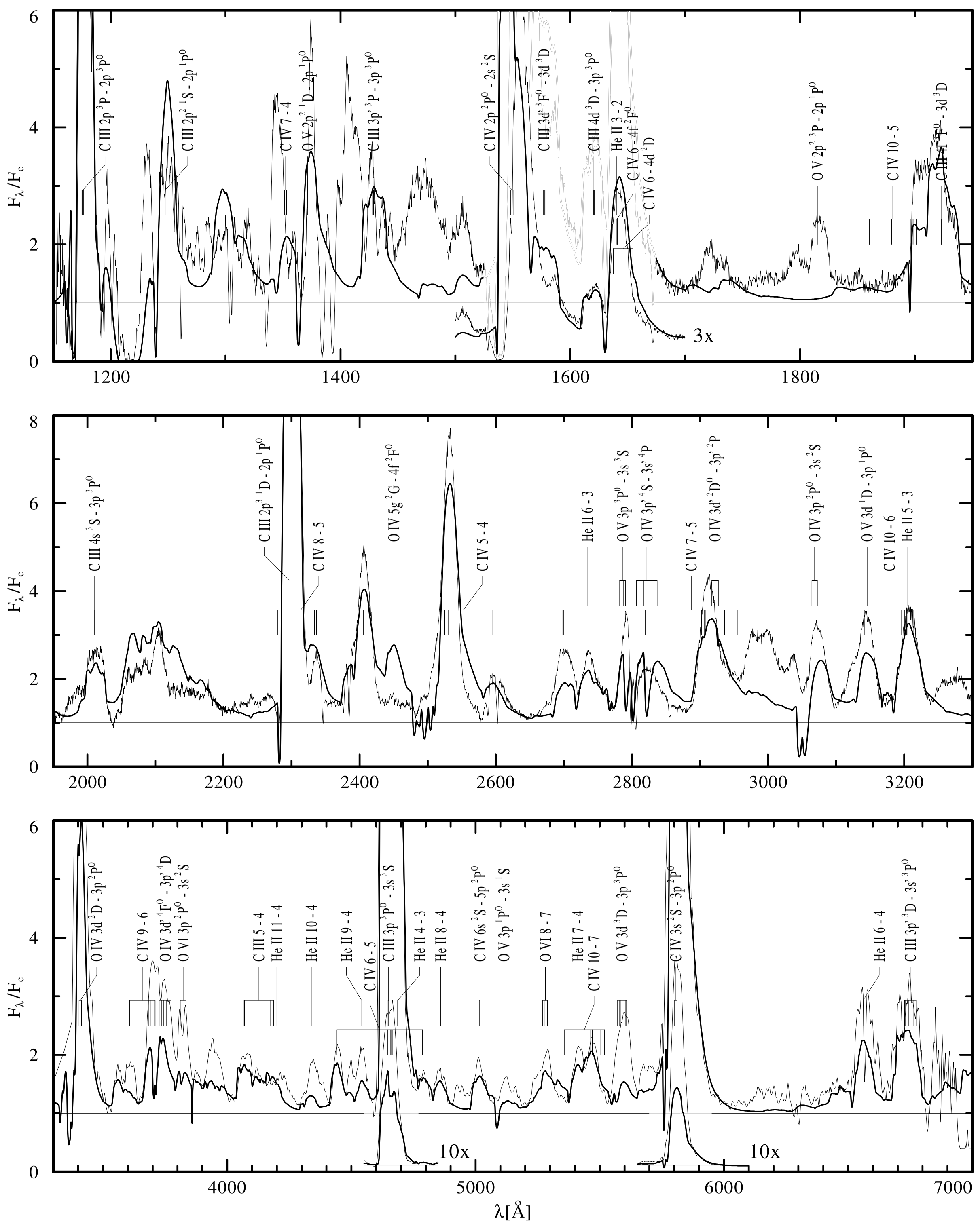

Abbildung 4.3: Br 8; Vergleich der Beobachtung (dünne Linie) mit dem synthetischen Spektrum (dicke Linie). Die Modellparameter entsprechen den Werten aus Tabelle 4.4. Dominante Linienübergänge sind identifiziert.

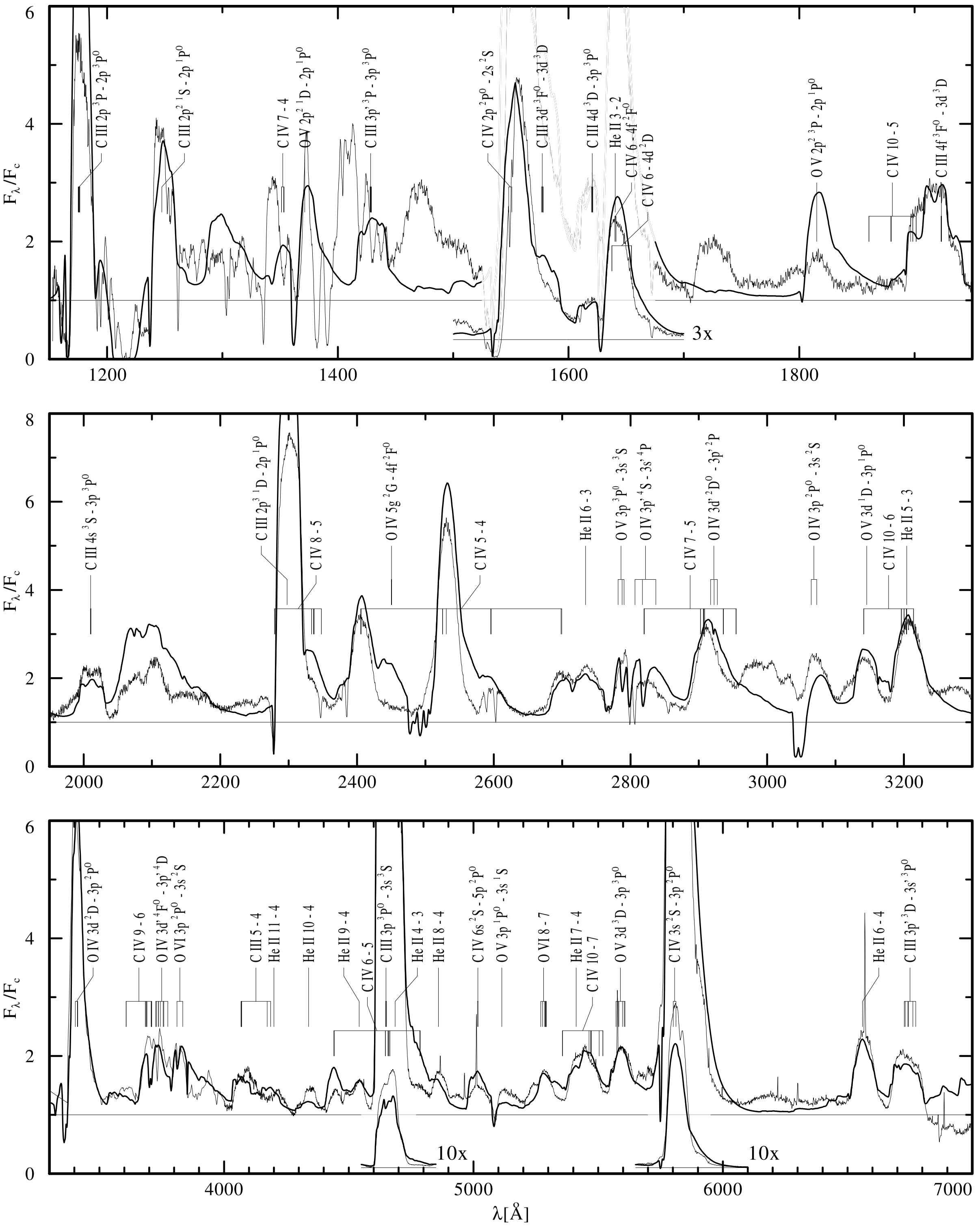

Abbildung 4.4: Br 10; Vergleich der Beobachtung (dünne Linie) mit dem synthetischen Spektrum (dicke Linie). Die Modellparameter entsprechen den Werten aus Tabelle 4.4. Dominante Linienübergänge sind identifiziert.

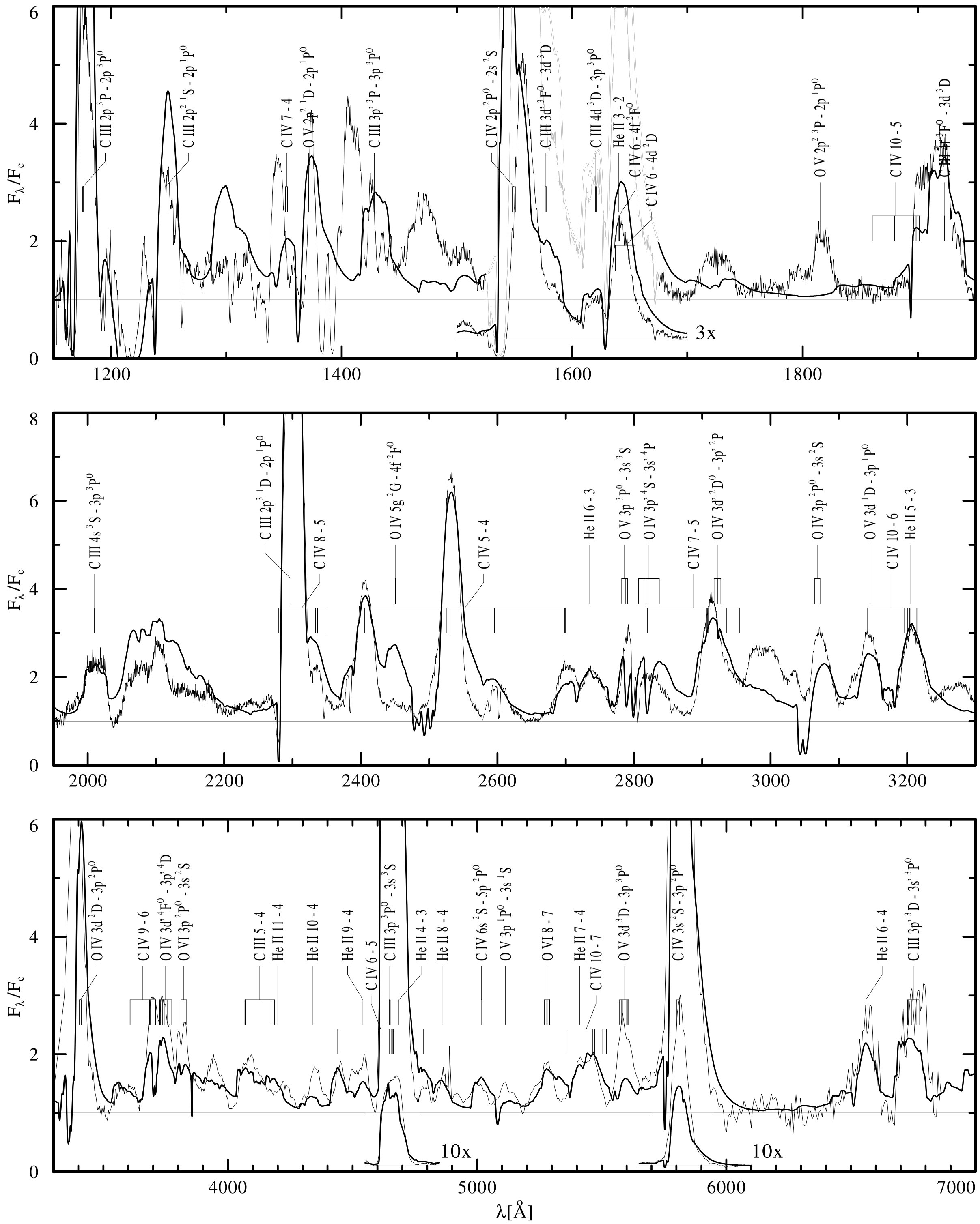

Abbildung 4.5: Br 43; Vergleich der Beobachtung (dünne Linie) mit dem synthetischen Spektrum (dicke Linie). Die Modellparameter entsprechen den Werten aus Tabelle 4.4. Dominante Linienübergänge sind identifiziert.

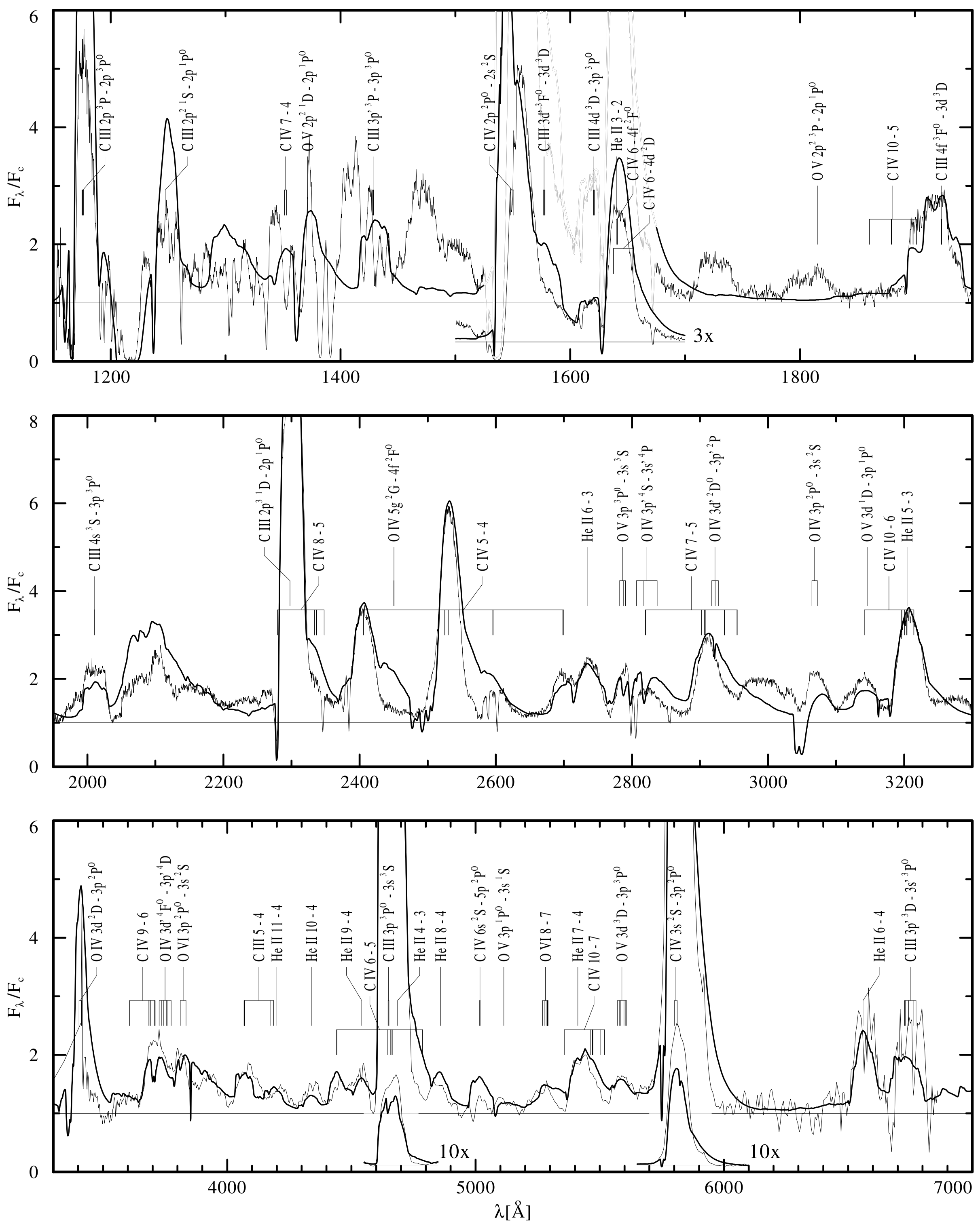

Abbildung 4.6: Br 50; Vergleich der Beobachtung (dünne Linie) mit dem synthetischen Spektrum (dicke Linie). Die Modellparameter entsprechen den Werten aus Tabelle 4.4. Dominante Linienübergänge sind identifiziert.

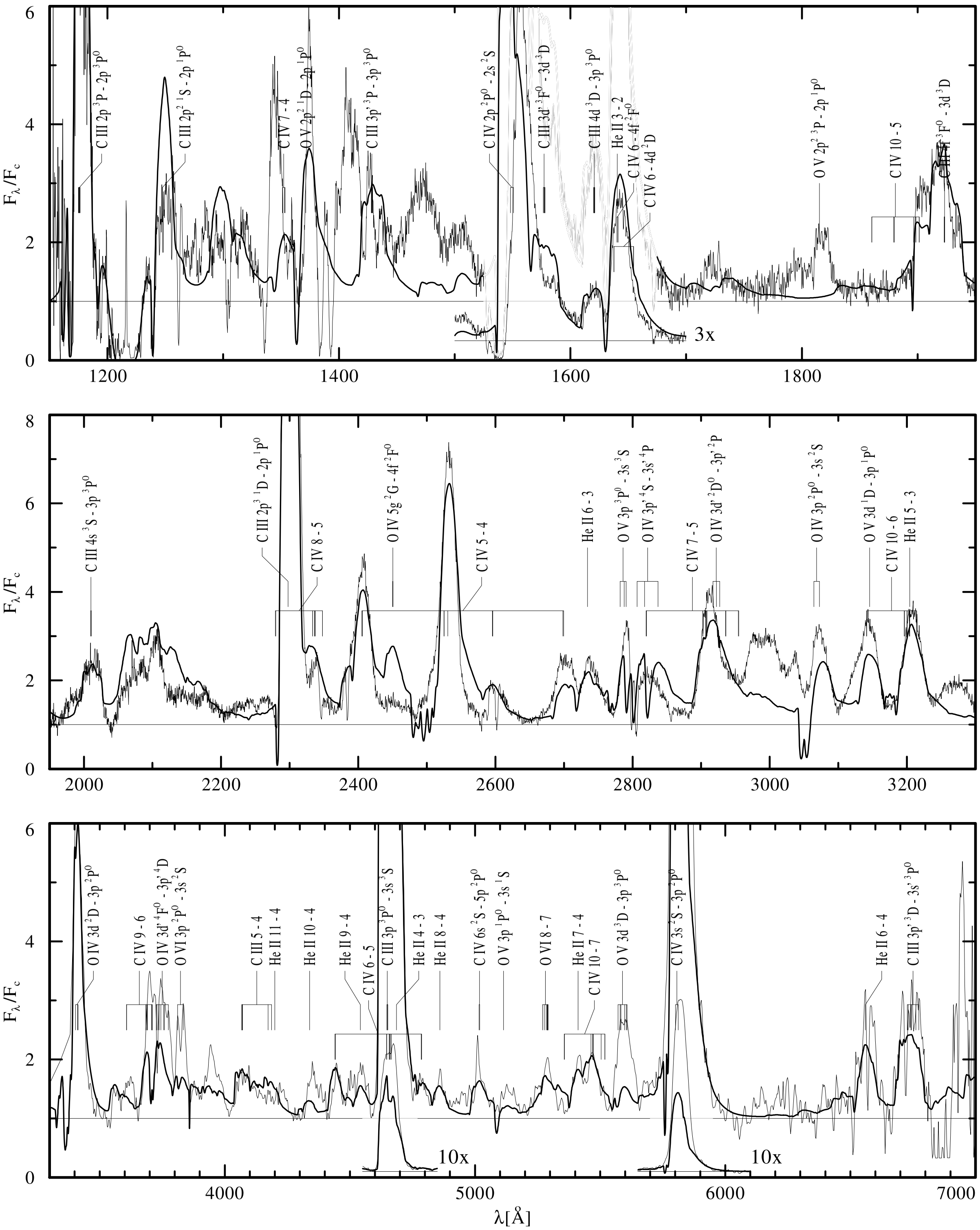

Abbildung 4.7: Br 74; Vergleich der Beobachtung (dünne Linie) mit dem synthetischen Spektrum (dicke Linie). Die Modellparameter entsprechen den Werten aus Tabelle 4.4. Dominante Linienübergänge sind identifiziert.

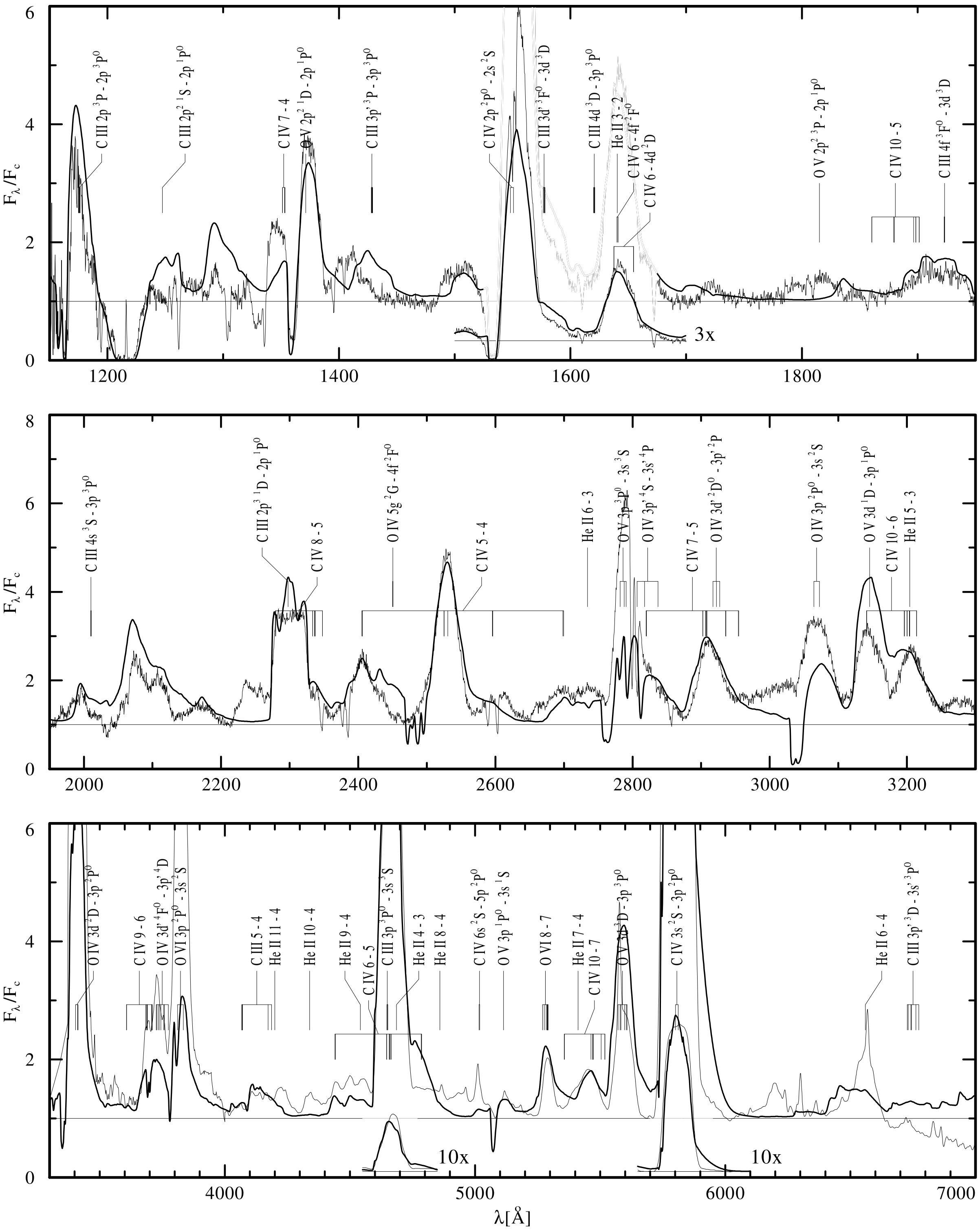

Abbildung 4.8: Br 93; Vergleich der Beobachtung (dünne Linie) mit dem synthetischen Spektrum (dicke Linie). Die Modellparameter entsprechen den Werten aus Tabelle 4.4. Dominante Linienübergänge sind identifiziert.

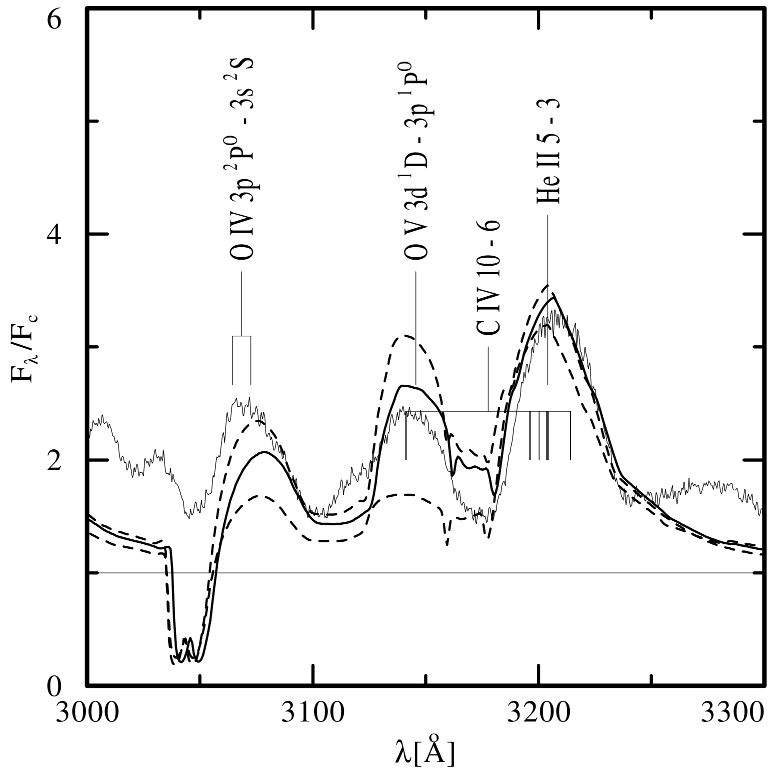

Abbildung 4.9: Synthetische Spektren mit einer Kohlenstoffhäufigkeit von $\beta_{\mathrm{C}} = 0.5$ und unterschiedlichen Sauerstoffhäufigkeiten werden mit der Beobachtung von Br 10 (dünne Linie) verglichen: $\beta_{\mathrm{O}} = 0.2$ (dicke Linie) und $\beta_{\mathrm{O}} = 0.1$ bzw. 0.3 (unterbrochene Linien)

dellierung von Linien der Ionisationsstufen O IV-O VI bestimmt. Die Linien von O V und O VI entstehen in sehr kleinen räumlichen Bereichen, so daß ihre Stärken von der genauen Ionisationsstruktur und somit von $T_\star$ abhängen. Auf der anderen Seite hängen die Stärken der O IV-Linien, die vorwiegend in den Außenbereichen der Atmosphäre entstehen, hauptsächlich von der Sauerstoffhäufigkeit β_{O} ab. Leider ist diese Abhängigkeit relativ schwach, und nur die Linie bei 3070 Å ist für eine quantitative Analyse geeignet. Überdies treten Probleme auf, weil in den Modellspektren zu starke Absorptionskomponenten für O IV-Linien vorhergesagt werden. In Abb. 4.9 ist die Abhängigkeit der Sauerstofflinien von der Sauerstoffhäufigkeit dargestellt. Modellspektren mit $\beta_{\mathrm{O}} = 0.1$, 0.2 bzw. 0.3 werden mit der Beobachtung von Br 10 verglichen. Die Genauigkeit der so bestimmten Sauerstoffhäufigkeiten liegt etwa im Bereich von 50%.

Die Bestimmung der Windendgeschwindigkeit v_∞ basiert primär auf der Breite der starken C III-Linien (besonders auf der sehr genau definierten Absorptionskomponente von C III 2297 Å), die in den Außenbereichen der Atmosphäre entstehen, und durch die Modelle sehr gut reproduziert werden. Für die Radialgeschwindigkeit der LMC wird dabei der Standardwert von $250\ \mathrm{km\,s^{-1}}$ (Jones et al. 1994) verwendet. Das C IV 1550 Å Resonanzdublett, das im allgemeinen zur Bestimmung von v_∞ benutzt wird, wird durch die Modellrechnungen nicht gut reproduziert. Neben der Kontamination durch interstellare Absorption, die den blauen Linienflügel stark abschwächt, sind möglicherweise Wiederverteilungs- und Linienverbreiterungseffekte, die in den Modellen nicht berücksichtigt werden, bei dieser Linie von großer Bedeutung.

In vorangegangenen Arbeiten wurden für drei der untersuchten WC 4-Sterne (Torres 1988) und den WO-Stern Br 93 (Kingsburgh et al. 1995) Oberflächenhäufigkeiten im Rahmen einer Rekombinationslinienanalyse bestimmt. Dabei werden die Verhältnisse von Emissionsmaßen zur Bestimmung der Häufigkeitsverhältnisse verwendet, ohne daß die Ionisationsstruktur der Atmosphären berücksichtigt wird. Die Ergebnisse sind somit nur approximativ. Die Häufigkeitsverhältnisse $\beta_\mathrm{C}/\beta_\mathrm{He}$ aus der vorliegenden Arbeit für die Programmsterne Br 7, Br 8 und Br 74 liegen etwa um einen Faktor zwei über den von Torres (1988) ermittelten Werten. Dasselbe gilt für den WO-Stern Br 93, für den Kingsburgh et al. (1995) die Werte $\beta_\mathrm{C} = 0.54$ und $\beta_\mathrm{O} = 0.21$ finden. Hier liegen die Werte allerdings im Rahmen der Fehlergrenzen. Generell bestätigen die Rekombinationslinienanalysen für den WO-Stern die Tendenz zu einem stark erhöhten Wert von $\beta_\mathrm{C+O}$ in Bezug zu den WC-Sternen.

Torres et al. (1986) bestimmen Windendgeschwindigkeiten für alle WC 4 Programmsterne durch eine Extrapolation der Linienbreiten von Rekombinationslinien auf ein Ionisationspotential von 0. Auf diese Weise erhalten sie deutlich höhere Werte als in der vorliegenden Arbeit ermittelt werden. Diese Diskrepanzen können möglicherweise durch den starken Linienüberlapp bei WC-Sternen, oder durch Schwierigkeiten bei der Extrapolation der gemessenen FWHM-Geschwindigkeiten erklärt werden. Die Windendgeschwindigkeiten in der vorliegenden Arbeit werden durch eine gute Übereinstimmung der synthetischen Linienprofile über den gesamten beobachteten Spektralbereich bestätigt.

4.3.3 Unterschiede zwischen den Programmsternen

Obwohl die Leuchtkräfte der Programmsterne einen großen Bereich abdecken, sind die Spektren der sechs WC 4-Sterne sehr ähnlich. Nur der WO 4-Stern unterscheidet sich signifikant in seinem Erscheinungsbild. Durch die komplexe Ionisationsstruktur von Sauerstoff werden Modelle für eine gegebene Leuchtkraft auf eine definierte Dichtestruktur eingeschränkt, die sich in Abhängigkeit der stellaren Temperatur $T_\star$ leicht ändert. Skaliert man die Modelle bei festgehaltenem transformiertem Radius (Gleichung (3.2)) auf die gleiche Leuchtkraft, ergeben sich für die WC 4-Sterne daher auch sehr ähnliche transformierte Winddichten ($\propto \dot{M}/v_\infty$). Zur Reproduktion der feinen Unterschiede bezüglich der C III/C IV Linienstärken bei den WC 4-Sternen ist eine geringe Variation der Winddichte notwendig, die dann durch eine Änderung von $T_\star$ kompensiert wird. Für den WO-Stern, der sich ja bezüglich der Sauerstoff-Anregungsverhältnisse stark von den WC 4-Sternen unterscheidet, erhält man hingegen nach der Transformation eine deutlich geringere Winddichte. Die geringere Dichte der WO-Atmosphäre ist neben den Häufigkeitsverhältnissen der Hauptgrund für die Unterschiede in der Ionisationsstruktur, und somit im spektralen Erscheinungsbild.

Die ermittelten Oberflächenhäufigkeiten unterscheiden sich hauptsächlich in Bezug auf das Verhältnis O/He. Obwohl die absolute Genauigkeit der ermittelten Sauerstoffhäufigkeiten nicht sehr groß ist, werden die relativen Unterschiede in den Linienstärken durch die Modelle korrekt reproduziert.

4.4 Diskussion

Wie bereits in der Einführung erläutert wurde, können stellare Parameter, wie sie in dieser Arbeit bestimmt werden, wertvolle Informationen über den Entwicklungsstand und den Massenverlustmechanismus von WR-Sternen liefern. Dazu werden zunächst gängige Relationen für den Massenverlust von WR-Sternen mit den ermittelten Massenverlustraten verglichen (Abschnitt 4.4.1). Danach wird die Konsistenz der ermittelten Leuchtkräfte und Radien mit theoretischen Sternmodellen überprüft (Abschnitt 4.4.2). Schließlich folgt eine Diskussion des Entwicklungsstatus in Bezug auf die Entwicklung massiver Einzelsterne und ein Vergleich mit Spektralanalysen von WC-Sternen in der Galaxis (Abschnitt 4.4.3).

4.4.1 Massenverlustraten

Die Bestimmung der Massenverlustraten von WC-Sternen ist wegen des starken Einflusses auf die Sternentwicklung im WC-Stadium von besonderem Interesse. Durch einen Vergleich der empirisch ermittelten Werte mit theoretischen Relationen zwischen stellaren Parametern und Massenverlustraten können darüber hinaus Informationen bezüglich des treibenden Mechanismus für den WR-Massenverlust gewonnen werden.

Abb. 4.10 zeigt einen Vergleich der beobachteten Werte mit Standardrelationen, wie sie für Sternentwicklungsrechnungen benutzt werden. Dabei muß beachtet werden, daß die beobachteten Massenverlustraten ohne eine Berücksichtigung von Inhomogenitäten ermittelt wurden, die tatsächlichen Werte also um einen Faktor $D^{\frac{1}{2}}$ unterhalb der angegebenen Werte liegen (Dichtekontrast D, siehe Abschnitt 3.1.4). Für WC-Sterne sind Werte um $D^{\frac{1}{2}} = 3$ zu erwarten (Hillier 1996; Hamann & Koesterke 1998), so daß eine ungefähre Übereinstimmung mit den von Meynet et al. (1994) angenommenen Massenverlustraten erzielt wird. Die Relation von Hamann (1995), die ebenfalls auf unkorrigierten Massenverlustraten basiert, liegt dementsprechend um einen Faktor 2.5 höher.

Ein weiterer interessanter Aspekt ist die mögliche Abhängigkeit der WR-Massenverlustraten von der Metallizität – analog zu der Abhängigkeit der Massenverlustraten von OB-Sternen, bei denen der Strahlungsdruck auf Metallinien für den Massenverlust verantwortlich ist. Tendenziell ist in Abb. 4.10 eine solche Abhängigkeit zu erkennen. Für einen weiterführenden Vergleich mit WC-Sternen in Gebieten sehr hoher Metallizität wurden im September 1997 Beobachtungen von WC-Sternen in M 31 mit dem TWIN Spektrographen am Cala Alto 3.5 m Teleskop durchgeführt. Abb. 4.11 zeigt einen Vergleich der emergenten Flüsse des WC 5-Sterns MS 21 in M 31 mit dem galaktischen WC-Stern WR 111. Nach einer Skalierung auf die gleiche Entfernung und einer Entrötung des Spektrums von MS 21 zeigen beide Sterne nahezu identische spektrale Flüsse. Offenbar bestehen keine signifikanten Unterschiede zwischen beiden Objekten. Für eine Klärung der Frage nach der Metallizitätsabhängigkeit wären wesentlich umfangreichere Analysen notwendig, die eine spektroskopische Bestimmung der Eisenhäufigkeiten der Einzelobjekte einschließen.

In Abb. 4.12 werden die ermittelten Massenverlustraten mit einer Relation aus Puls et al. (1996) für liniengetriebene Sternwinde nach der CAK-Theorie (Castor et al. 1975) verglichen. Die Inverse der Steigung der eingezeichneten Relation entspricht dem sog. “force multiplier”-

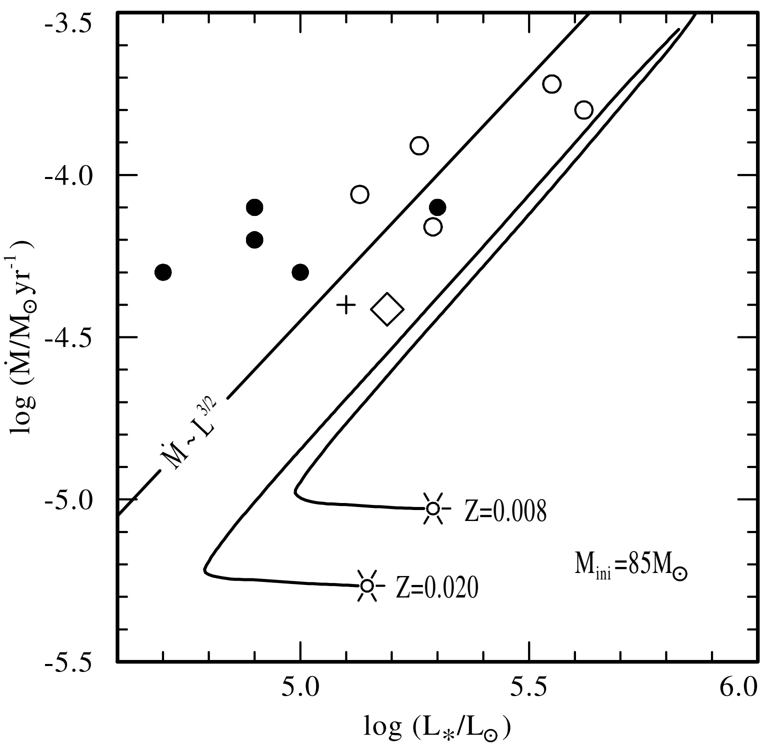

Abbildung 4.10: Beobachtete Massenverlustraten $D^{\frac{1}{2}}\dot{M}$ in Abhängigkeit von den stellaren Leuchtkräften $L_\star$. Es sind alle WC-Sterne mit bekannter Entfernung dargestellt. Die offenen Symbole repräsentieren die Ergebnisse aus der vorliegenden Arbeit für LMC-Sterne ($\circ$ Spektraltyp WC 4, $\diamond$ Spektraltyp WO 4), und die ausgefüllten Symbole galaktische WC-Sterne aus Koesterke & Hamann (1995) ($\bullet$ WC-s, $+$ WC-w). Zum Vergleich sind verschiedene Massenverlust-Leuchtkraft-Relationen dargestellt: Eine Relation für galaktische WR-Sterne ohne Wasserstoff mit $\dot{M} \propto L^{\frac{3}{2}}$ (Hamann 1995) und Massenverlustraten aus Sternentwicklungsrechnungen mit einer Anfangsmasse von $85 M_\odot$ und unterschiedlichen Metallizitäten (Meynet et al. 1994) nach der massenabhängigen Relation von Langer (1989a).

Parameter α'. Dieser rein atomphysikalische Parameter charakterisiert die statistische Verteilung von Linienstärken im Flußmaximum. Der Wert von $\alpha' \sim 0.7$ liegt in dem entsprechend der Atomphysik typischen Bereich von 0.5-0.7. Die Tatsache, daß die beobacheten Massenverlustraten dieser Relation gehorchen, ist ein starkes Indiz für den großen Einfluß des Strahlungsdrucks auf Spektrallinien für die Entstehung von WR-Winden.

4.4.2 Sternaufbau

Die Oberflächenzusammensetzung der untersuchten Sterne entspricht der Zusammensetzung von Material, das bereits Helium-Brennprozessen ausgesetzt war. Daher ist es sehr wahrscheinlich, daß es sich bei WC-Sternen um Sterne in der Phase des zentralen He-Brennens handelt. Sol-

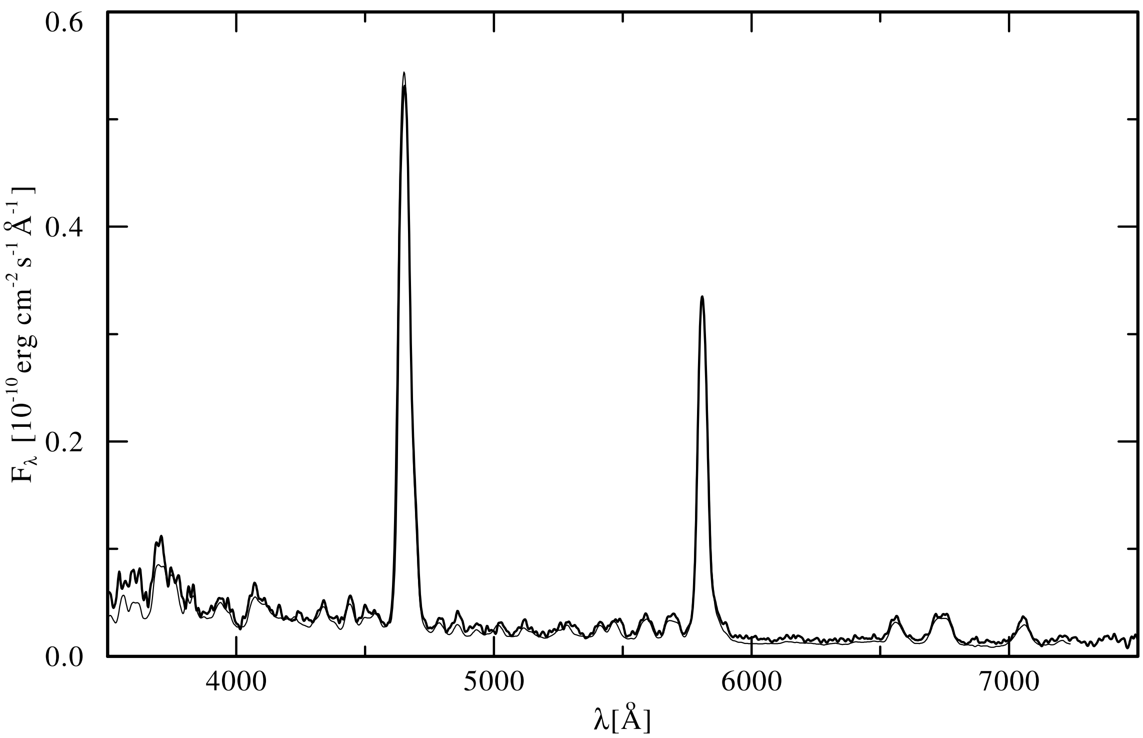

Abbildung 4.11: Vergleich der beobachteten Spektren des WC 5-Sterns MS 21 in M 31 (dicke Linie) und seinem galaktischen Gegenstück WR 111 (dünne Linie). Das Spektrum von MS 21 ist auf die Entfernung von WR 111 skaliert (Entfernungsmodul 24.2 mag für M 31 und 11.09 mag für WR 111), und um $\Delta E^{\rm gal}_{B-V} = 0.06$ gegenüber WR 111 gerötet.

che Sterne bestehen aus einem kompakten, He-brennenden Kern großer Masse, der konvektiv durchmischt ist. Die ausgedehnte radiative Hülle nimmt nur einen kleinen Teil der Gesamtmasse ein. Da die Zeitskala, auf der die Hülle abgetragen wird, klein gegenüber der Brennzeitskala ist, kann der Stern als nahezu chemisch homogen angenommen werden. Somit werden WR-Sterne in der Phase des zentralen He-Brennens nur durch ihre Masse und ihre Oberflächenzusammensetzung charakterisiert (Langer 1989b). Hydrodynamische Rechnungen zeigen, daß der Einfluß des WR-Windes auf die Schichten unterhalb des Schallpunktes vernachlässigbar ist, und der Radius in hydrostatischen Modellen mit dem Schallpunkt in hydrodynamischen Rechnungen übereinstimmt (Heger & Langer 1996).

Zur Überprüfung der Konsistenz zu Sternaufbaurechnungen können die ermittelten stellaren Parameter deshalb mit der Masse-Leuchtkraft- und Masse-Radius-Relation von Langer (1989b) verglichen werden. Ein Vergleich mit berechneten HRD-Positionen ist unsicher, da die Definition einer Effektivtemperatur durch die starke räumliche Ausdehnung der WR-Atmosphären schwierig ist. Wegen des unbekannten Zusammenhangs zwischen stellaren Parametern und Windstruktur ist es nicht möglich, einen sinnvollen Bezugsradius für eine Effektivtemperatur zu definieren.

Weitere Probleme entstehen durch den möglicherweise sehr hohen Anteil des mechanischen

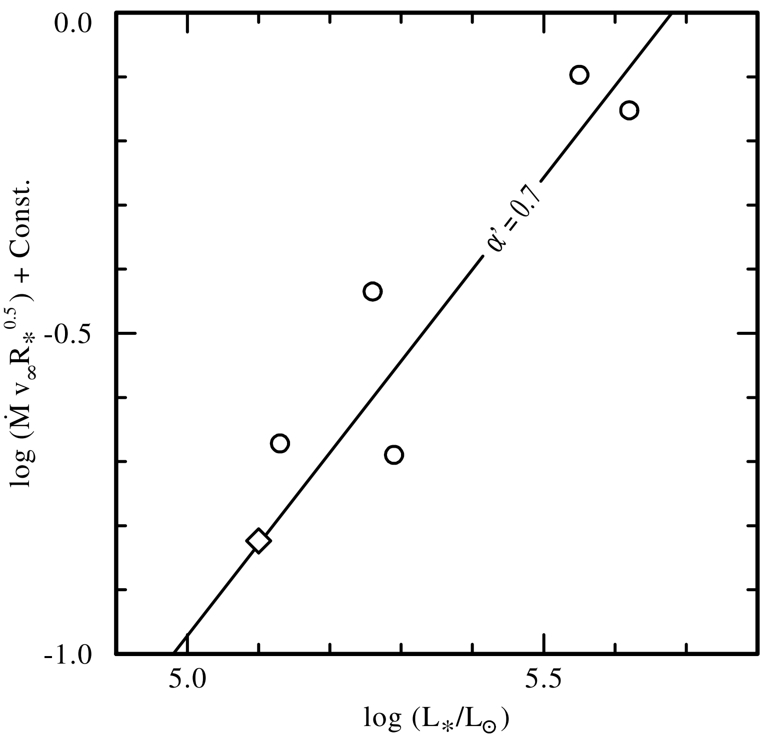

Abbildung 4.12: Ermittelte Massenverlustraten im Vergleich zu einer theoretischen Windimpuls-Leuchtkraft-Relation nach Puls et al. (1996) für Strahlungsdruckgetriebene Winde. Die Steigung entspricht einem “force multiplier”-Parameter von $\alpha' \sim 0.7$.

Energieflusses an der Gesamtleuchtkraft. Neben dem Hauptbeitrag durch den Sternwind $L_{\rm W} = \dot{M}\frac{v_\infty^2}{2} + \frac{\dot{M}\,M_\star G}{R_\star}$ finden Heger & Langer (1996) noch einen signifikanten Anteil für die Änderung der inneren Energie und der Gravitationsenergie des Materials, das aus dem Sterninnern zum Schallpunkt transportiert wird. Für homogene Atmosphären ($D = 1$) beträgt der Anteil der mechanischen Leuchtkraft an der Gesamtleuchtkraft etwa $\frac{1}{4}$. Mit Werten um $D = 10$ (Hillier 1996; Hamann & Koesterke 1998) wird dieser Effekt allerdings vernachlässigbar.

In Tabelle 4.5 werden die spektroskopisch ermittelten Radien mit den theoretischen Werten verglichen. Die theoretisch ermittelten Radien liegen etwas unterhalb der beobachteten Werte. Unter der Annahme von homogenen Winden werden die Leuchtkräfte durch die zusätzliche Windleuchtkraft angehoben, und es werden größere theoretische Massen und Radien abgeleitet, so daß eine bessere Übereinstimmung mit den Spektralanalysen erzielt wird. Die beste Übereinstimmung wird für Br 93 erzielt, bei dem der Unterschied zwischen $R_{2/3}$ und $R_\star$ am kleinsten ist. Die Abweichungen stellen keinen Widerspruch zur Theorie dar, da die emergenten Spektren in Bereichen weit oberhalb des hydrostatischen Radius entstehen ($R_{2/3} = 2\text{-}6R_\star$, vgl. Tabelle 4.4). Die spektroskopischen Radien stellen also nur eine Extrapolation des beobachteten Dichteverlaufs in der Atmosphäre dar. Der tatsächliche Dichteverlauf in den Schichten nahe am hydrostatischen Radius kann aber durchaus vom Standard-β-Gesetz (Gleichung 3.1), das für die Modellrechnungen verwendet wird, abweichen.

Stern	$\log L_\star$ $[L_\odot]$	$\log L_{\rm nuc}$ $[L_\odot]$	$R_\star^{\rm spec}$ $[R_\odot]$	$R'_\star$ $[R_\odot]$	$R_\star^{\rm th}$ $[R_\odot]$	$M'_\star$ $[M_\odot]$	$M_\star^{\rm th}$ $[M_\odot]$
Br 7	5.29	5.43	1.65	1.22	1.09	13.4	11.2
Br 8	5.13	5.35	1.13	1.10	0.94	11.8	9.1
Br 10	5.62	5.79	2.52	1.78	1.48	21.8	17.1
Br 43	5.26	5.52	1.32	1.35	1.07	14.8	10.6
Br 50	5.55	5.78	2.25	1.71	1.34	21.9	15.9
Br 74	5.13	5.35	1.13	1.10	0.94	11.8	9.1
Br 93	5.10	5.27	1.17	1.20	1.13	12.3	10.4

Tabelle 4.5: Stellare Leuchtkräfte $L_\star$, die sich aus den Spektralanalsen ergeben, und nukleare Leuchtkräfte $L_{\rm nuc}$, die den Anteil an mechanischer Leuchtkraft nach Heger & Langer (1996) unter Annahme von Homogenität der Atmosphären ($D = 1$) beinhalten. Theoretische Werte für die stellaren Massen und Radien $M_\star^{\rm th}$ und $R_\star^{\rm th}$ werden aus $L_\star$ nach den Relationen von Langer (1989a) bestimmt. Die spektroskopisch bestimmten Radien $R_\star^{\rm spec}$ sind in genereller Übereinstimmung mit den theoretischen Werten. Unter der Annahme eines homogenen Windes ($D = 1$) trägt die Windleuchtkraft wesentlich zur Gesamtleuchtkraft bei. Zur Veranschaulichung sind die theoretischen Radien $R'_\star$ und Massen $M'_\star$, die sich aus $L_{\rm nuc}$ ergeben, ebenfalls angegeben. Für die hohen Inhomogenitätsgrade um $D = 10$, die wahrscheinlich in WC-Atmosphären auftreten, verliert die Windleuchtkraft an Bedeutung.

4.4.3 Entwicklungsstatus

Oberflächenhäufigkeiten:

In He-brennenden Sternen tragen zwei Reaktionen zur Energieproduktion bei. Am Anfang der He-Brennphase dominiert die Reaktion $3\,\alpha \rightarrow {}^{12}$C, bei der Helium zu Kohlenstoff umgesetzt wird. Mit zunehmender Kohlenstoffhäufigkeit gewinnt die Reaktion ${}^{12}\text{C} + \alpha \rightarrow {}^{16}$O immer mehr an Bedeutung. Nach Einsetzen des He-Brennens steigt die Kohlenstoffhäufigkeit also zunächst an, bis ein Maximalwert erreicht wird, bei dem genausoviel Kohlenstoff aus Helium erzeugt, wie bei der Produktion von Sauerstoff verbraucht wird. Danach nimmt die Kohlenstoffhäufigkeit wieder ab, bis am Ende der Phase des zentralen He-Brennens das gesamte Helium im Kern aufgebraucht ist. Der Maximalwert für Kohlenstoff und die Häufigkeitsverhältnisse am Ende der He-Brennphase hängen empfindlich vom Verhältnis der beiden Raten ab. Die maximale beobachtete Kohlenstoffhäufigkeit setzt eine Untergrenze für die unsichere Rate von ^{12}C nach ^{16}O.

Abb. 4.13 zeigt einen Vergleich der ermittelten Oberflächenhäufigkeiten mit den Häufigkeiten im Kern massiver He-brennender Sterne unter der Annahme unterschiedlicher ${}^{12}\text{C}\,(\alpha,\gamma)\,{}^{16}$O-Raten. Aufgrund der starken Temperaturabhängigkeit des He-Brennens sind die Zentraltemperaturen, und somit auch das Verhältnis der beiden Raten, für alle massiven, He-brennenden Sterne sehr ähnlich. Da die äußeren Schichten von WC-Sternen durch den starken Massenverlust schnell abgetragen werden, sind diese zentralen Häufigkeitsmuster auch an der Oberfläche von WC-Sternen zu erwarten. Die ermittelten Häufigkeiten entsprechen für alle Programmsterne den

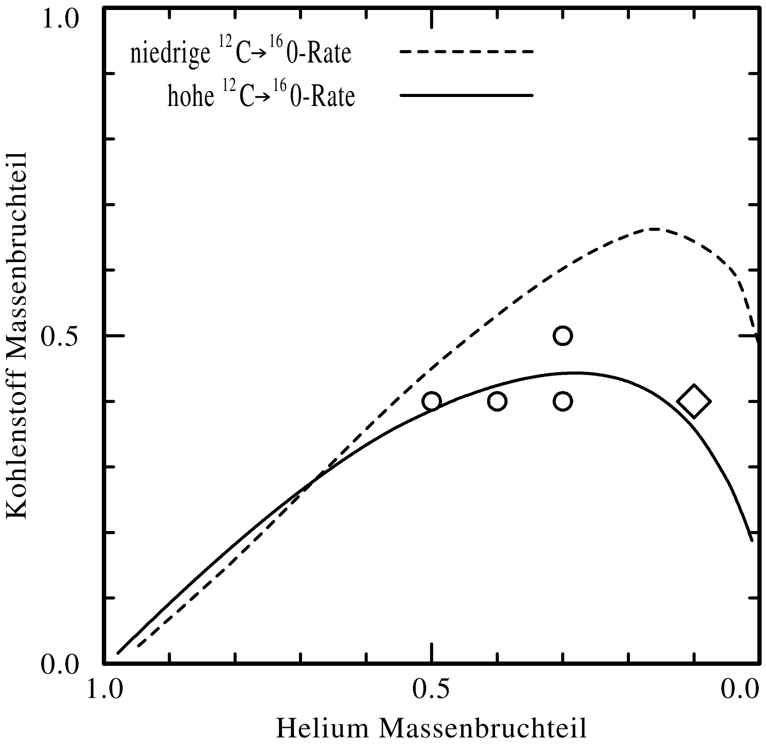

Abbildung 4.13: Ermittelte Oberflächenhäufigkeiten (○ WC 4, ◇ WO 4) im Vergleich zu typischen Werten für die zentralen Häufigkeiten massiver Sterne in der He-Brennphase. Die beiden Kurven entsprechen einem hohen (durchgezogene Linie) bzw. einem niedrigen (unterbrochene Linie) Wert für die Rate ^{12}C (α, γ) ^{16}O.

Werten, die für eine schnelle ^{12}C (α, γ) ^{16}O-Rate (Caughlan et al. 1985) zu erwarten sind. Dieser Wert wird auch in gängigen Sternentwicklungsrechnungen, wie z.B. denen, die im folgenden diskutiert werden, verwendet.

Vergleich mit Entwicklungsmodellen:

Zusammen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.4.2 wird klar, daß die in dieser Arbeit ermittelten stellaren Parameter vollständig mit der Annahme in Einklang stehen, daß es sich bei den untersuchten WC/WO-Sternen um Objekte in der Phase des zentralen He-Brennens handelt, die oberhalb des He-brennenden Kerns keine wasserstoffhaltigen Schichten aufweisen. Unabhängig vom vorangegangenen Entwicklungsweg verläuft die Entwicklung nach dem Eintritt in die WC-Phase immer nach demselben Schema. Durch den starken Sternwind nimmt die Masse, und damit auch die Leuchtkraft des Sterns, stetig ab. Das Verhältnis (C+O)/He nimmt im Laufe der Entwicklung durch das Fortschreiten des He-Brennens zu. Ist das Helium im Kern aufgebraucht, folgt eine sehr kurze Phase im He-Schalenbrennen, bei der die Leuchtkraft wieder zunimmt. In Abschnitt 4.4.1 wurde gezeigt, daß die WC-Massenverlustraten in Einklang mit Standardannahmen sind,

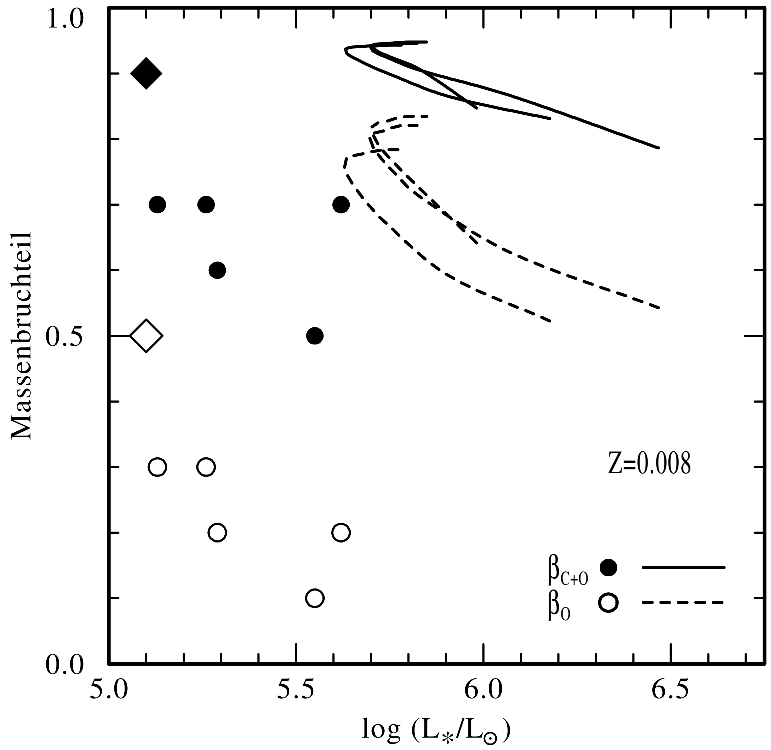

Abbildung 4.14: Beobachtete Massenbruchteile β_O (○) und β_{C+O} (•) in Abhängigkeit von der Leuchtkraft $L_\star$. Die ermittelten Werte werden mit den theoretischen Häufigkeiten β_O (unterbrochene Linie) und β_{C+O} (durchgezogene Linie) aus Standard-Entwicklungsrechnungen von Schaerer et al. (1993) für $Z = 0.008$ und unterschiedliche Anfangsmassen von 60 – 120 $M_\odot$ verglichen. Die theoretischen Leuchtkräfte sowie Kohlenstoff- und Sauerstoffhäufigkeiten liegen deutlich oberhalb der spektroskopisch ermittelten Werte.

so daß für die Entwicklung in der WC-Phase eine gute Übereinstimmung der Beobachtungen mit theoretischen Entwicklungswegen zu erwarten ist.

Ob theoretische Entwicklungsmodelle allerdings den beobachteten Parameterbereich erreichen, hängt von den stellaren Parametern beim Eintritt in die WC-Phase ab. Dieser "Startwert" wird stark von den Annahmen beeinflußt, die bezüglich der Entwicklung vor dem WC-Stadium gemacht werden. Im folgenden wird darauf im Hinblick auf die Entwicklung von Einzelsternen eingegangen. Dabei ist besonders der Einfluß der niedrigen Metallizität in der LMC von Bedeutung. Durch die niedrige Metallizität sind in der LMC niedrigere Massenverlustraten für die Vorläufersterne von WR-Sternen zu erwarten, als z.B. in der Galaxis. Dadurch erreichen weniger Sterne das WR-Stadium. Da das WR-Stadium später erreicht wird, ist die Masse des konvektiven Kerns beim Eintritt größer. Daher sind größere Massen, und somit auch höhere Leuchtkräfte für WC-Sterne zu erwarten. Durch die längere Dauer des He-Brennens vor Eintritt in die WC-Phase, wird ein größeres Verhältnis der Häufigkeiten (C+O)/He erreicht (Meynet et al. 1994). Ein Vorteil ergibt sich aus dem eingeschränkten Anfangsmassenbereich der LMC-WC-Sterne. Durch

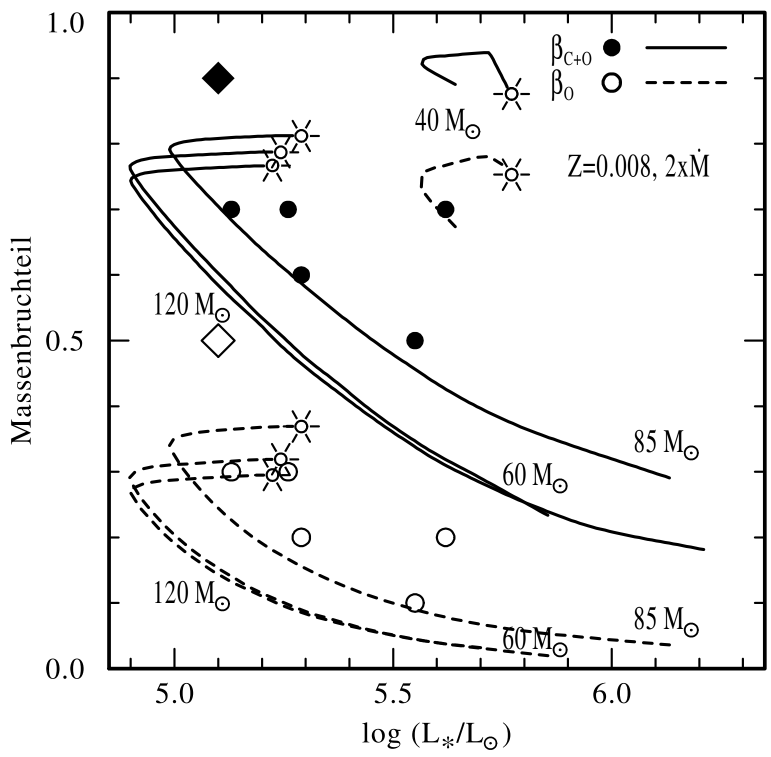

Abbildung 4.15: Beobachtete Massenbruchteile β_{O} (○) und $\beta_{\mathrm{C+O}}$ (•) in Abhängigkeit von der Leuchtkraft $L_\star$. Die ermittelten Werte werden mit den theoretischen Häufigkeiten β_{O} (unterbrochene Linie) und $\beta_{\mathrm{C+O}}$ (durchgezogene Linie) aus Entwicklungsrechnungen von Meynet et al. (1994) für $Z = 0.008$ verglichen. Das Ende der Entwicklungssequenzen wird durch Supernova-Symbole angedeutet. Bei den Entwicklungsrechnungen wurden die Massenverlustraten in Entwicklungsphasen vor dem WR-Stadium gegenüber den Standardwerten (Schaerer et al. 1993) verdoppelt. Es wird eine sehr gute Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung erzielt.

den verkleinerten Parameterbereich gestaltet sich der Vergleich der spektroskopisch ermittelten Parameter mit Entwicklungsrechnungen für die LMC-Sterne einfacher, als bei ihren galaktischen Gegenstücken.

In Abb. 4.14 werden die beobachteten Leuchtkräfte und Oberflächenzusammensetzungen mit Entwicklungsrechnungen von Schaerer et al. (1993) mit $Z = 0.008$ im relevanten Anfangsmassenbereich verglichen. Die Theoretischen Leuchtkräfte liegen etwa 0.7 dex oberhalb der Leuchtkräfte, die sich aus den Atmosphärenmodellen ergeben, und das Verhältnis (C+O)/He ist höher als die spektroskopisch ermittelten Häufigkeitsverhältnisse. Meynet et al. (1994) verwenden Massenverlustraten für die O- und WNL-Phasen, die gegenüber dem Modellgitter von Schaerer et al. (1993) um einen Faktor 2 erhöht sind. Die übrigen Modellannahmen sind in beiden Arbeiten gleich. Wie in Abb. 4.15 zu sehen ist, wird unter der Annahme von hohen Massenverlustraten eine sehr gute Übereinstimmung mit der Beobachtung erzielt.

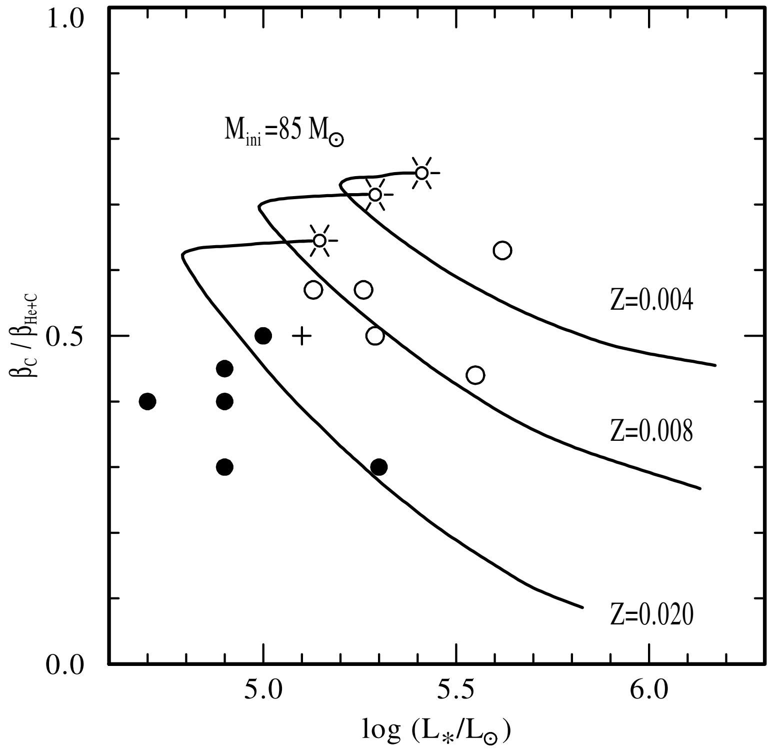

Abbildung 4.16: Häufigkeitsverhältnisse $\beta_{\mathrm{C}}/\beta_{\mathrm{C+He}}$ in Abhängigkeit von der Leuchtkraft $L_\star$. WC-Sterne mit bekannter Entfernung aus der LMC (∘) und der Galaxis (• WC-s, + WC-w) Werden mit Entwicklungsrechnungen von Meynet et al. (1994) verglichen. Es sind Entwicklungswege für eine Anfangsmasse von $85\,M_\odot$ und unterschiedliche Metallizitäten dargestellt. Die beobachteten Daten für die galaktischen WC-Sterne stammen aus Koesterke & Hamann (1995).

Vergleich mit galaktischen WC Sternen:

In Abb. 4.16 werden die Leuchtkräfte und Kohlenstoffhäufigkeiten der LMC-Sterne mit galaktischen WC-Sternen bekannter Entfernung verglichen. Die stellaren Parameter für die galaktischen Objekte wurden durch Non-LTE-Analysen unter Berücksichtigung von Kohlenstoff und Helium bestimmt (Koesterke & Hamann 1995). Zum Vergleich sind theoretische Entwicklungswege von Meynet et al. (1994) für unterschiedliche Metallizitäten dargestellt. Die beiden Gruppen unterscheiden sich in der erwarteten Weise: Durch den späten Eintritt in die WC-Phase und die größeren konvektiven Kerne zeigen WC-Sterne bei kleineren Metallizitäten größere Leuchtkräfte und höhere Kohlenstoffhäufigkeiten an der Oberfläche.

Kapitel 5

Der Einfluß des Eisen-Line-Blanketing

In diesem Kapitel werden Modellrechnungen vorgestellt, die das Eisen-Line-Blanketing im Rahmen der Opacity-Sampling-Methode, wie in Abschnitt 3.2.5 beschrieben, berücksichtigen. Dabei wird eine einfache Formulierung verwendet, bei der eine Besetzung der Feinniveaus in einem Energieband entsprechend der statistischen Gewichte ($T_{\rm exc} \rightarrow \infty$) angenommen wird, und die Übergangsraten entsprechend den Gleichungen (3.51), (3.52), (3.53) und (3.54) berechnet werden. Dielektronische Rekombination durch doppelt angeregte Niveaus oberhalb der Ionisationsschwelle (Abschnitt 3.2.3) wird in der vorliegenden Programmversion nicht berücksichtigt.

In Abschnitt 5.1 wird ein Beispielmodell für den galaktischen WC-Stern WR 111 vorgestellt. Anhand dieses Modells werden die Auswirkungen des Eisen-Line-Blanketing auf die Ionisationsverhältnisse (Abschnitt 5.2), die spektrale Energieverteilung (Abschnitt 5.3) und die Winddynamik (Abschnitt 5.4) demonstriert.

5.1 Beispielrechnungen für WR 111

Abb. 5.1 zeigt den Vergleich eines synthetischen Spektrums mit Eisen-Line-Blanketing mit Beobachtungen des WC-Sterns WR 111. WR 111 ist ein früher galaktischer WC-Stern vom Spektraltyp WC 5 mit einem bekannten Entfernungsmodulus von 11.09 mag (Lundstrom & Stenholm 1984). Die optischen Beobachtungen stammen aus dem Atlas von Torres & Massey (1987), und die UV-Daten aus der INES-Datenbank (IUE Newly Extracted Spectra; Verwendete Datensätze: SWP 02518, SWP 02872, SWP 04313, SWP 02847, LWR 10489 und LWR 10490). Die dabei verwendeten IUE-Spektren hoher Auflösung sind auf den mittleren Fluß der korrespondierenden Spektren niedriger Auflösung skaliert worden.

Das verwendete Modellatom ist in Tabelle 5.1 zusammengefaßt. Es ist gegenüber den Analysen in Kapitel 4 um die Ionen O III und Fe III-Fe X erweitert, und beinhaltet 258 Modellniveaus. Es wird eine solare Eisenhäufigkeit von $\beta_{\rm Fe} = 1.6\,10^{-3}$ angenommen (Gray 1992). Die Oberflächenhäufigkeiten von Kohlenstoff und Sauerstoff liegen bei $\beta_{\rm C} = 0.5$ und $\beta_{\rm O} = 0.05$. Weiterhin wird ein Radius von $R_\star = 0.796\,R_\odot$ und eine Effektivtemperatur von $T_\star = 141\,{\rm kK}$ angenommen, was einer Leuchtkraft von $L_\star = 10^{5.35}\,L_\odot$ entspricht. Die Massenverlustrate liegt bei $\dot{M} = 10^{-4.75}\ M_\odot\,{\rm yr}^{-1}$ mit einer Windendgeschwindigkeit von $2000\ {\rm km\,s^{-1}}$ und einem

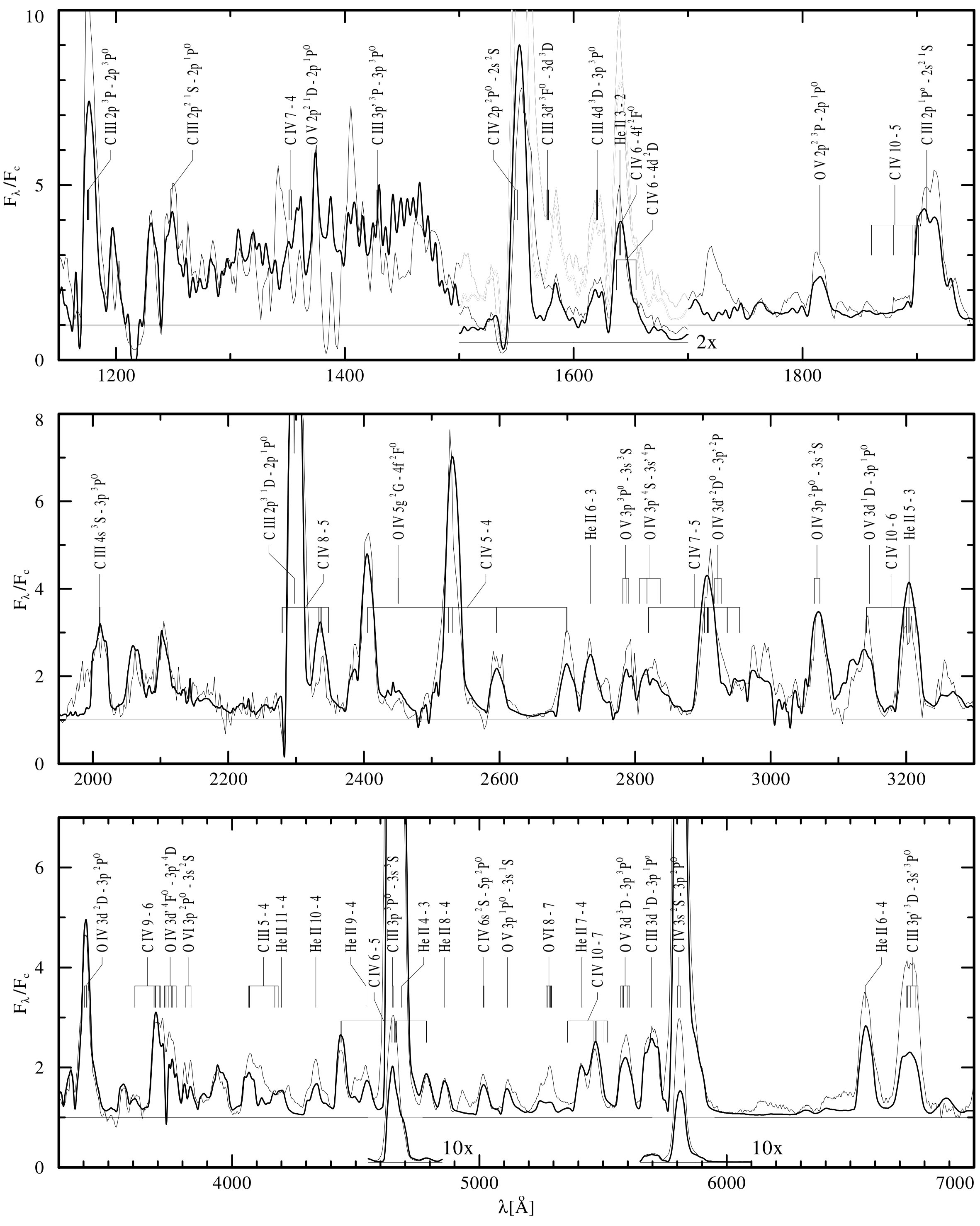

Abbildung 5.1: WR 111; Vergleich der Beobachtung (dünne Linie) mit einem synthetischen Spektrum (dicke Linie). Die Modellparameter sind $L = 10^{5.35} L_{\odot}$, $R_{\star} = 0.746\,R_{\odot}$, $\dot{M} = 10^{-4.75}\ M_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ mit $D = 10$, $\beta_{\mathrm{C}} = 0.5$, $\beta_{\mathrm{O}} = 0.05$ und $\beta_{\mathrm{Fe}} = 1.6\,10^{-3}$. Das beobachtete Spektrum ist mit $E_{B-V}^{\mathrm{gal}} = 0.29\,\mathrm{mag}$ entrötet, und durch das Modellkontinuum dividiert. Interstellare Ly α-Absorption ist entsprechend einer Wasserstoffsäulendichte von $5\,10^{20}\,\mathrm{cm}^{-2}$ berücksichtigt.

Ion	Energieniveaus
He I	17
He II	16
He III	1
C II	3
C III	40
C IV	19
C V	1
O II	3
O III	33
O IV	25
O V	36
O VI	15
O VII	1
Fe III	1
Fe IV	9
Fe V	8
Fe VI	9
Fe VII	8
Fe VIII	6
Fe IX	6
Fe X	1
Summe	258

Tabelle 5.1: Zusammenfassung des Modellatoms für WR 111

Dichtekontrast von $D = 10$. Das Modellspektrum ist unter Anwendung des Extinktionsgesetzes von Seaton (1979) mit einem Extinktionsparameter von $E^{\rm gal}_{B-V} = 0.29\,{\rm mag}$ gerötet. Interstellare Ly α-Absorption wird entsprechend einer H I-Säulendichte von $5\,10^{20}\,{\rm cm}^{-2}$ berücksichtigt.

Oberhalb von etwa 2000 Å wird eine sehr gute Übereinstimmung von Modell und Beobachtung erzielt. Besonders die simultane Reproduktion von C III- und O VI-Linien ist für den vorliegenden Spektraltyp ohne eine Berücksichtigung der Eisenopazitäten nicht möglich. Unterhalb von 2000 Å bildet der “Eisen-Wald” aus Emissions- und Absorptionslinien von Fe V und Fe VI ein Pseudokontinuum aus. In den Wellenlängenbereichen von 1200-1500 Å und um 1800 Å wird das Pseudokontinuum sehr gut wiedergegeben. Bei 1600 Å zeigt das Modellspektrum normalerweise eine breite Fe IV-Emission, die nicht beobachtet wird. In Abb. 5.1 wird diese Emission unterdrückt, indem bei der Integration des synthetischen Spektrums keine Fe IV-Opazitäten berücksichtigt werden. Möglicherweise ist diese Emission durch eine Wechselwirkung des entsprechenden Eisenbandes mit der C IV-Resonanzlinie bei 1550 Å zu erklären. Durch die Umverteilung von in der C IV-Linie absorbierten Photonen über das breite Eisenband können unter Umständen artifizielle Signaturen im emergenten Spektrum entstehen.

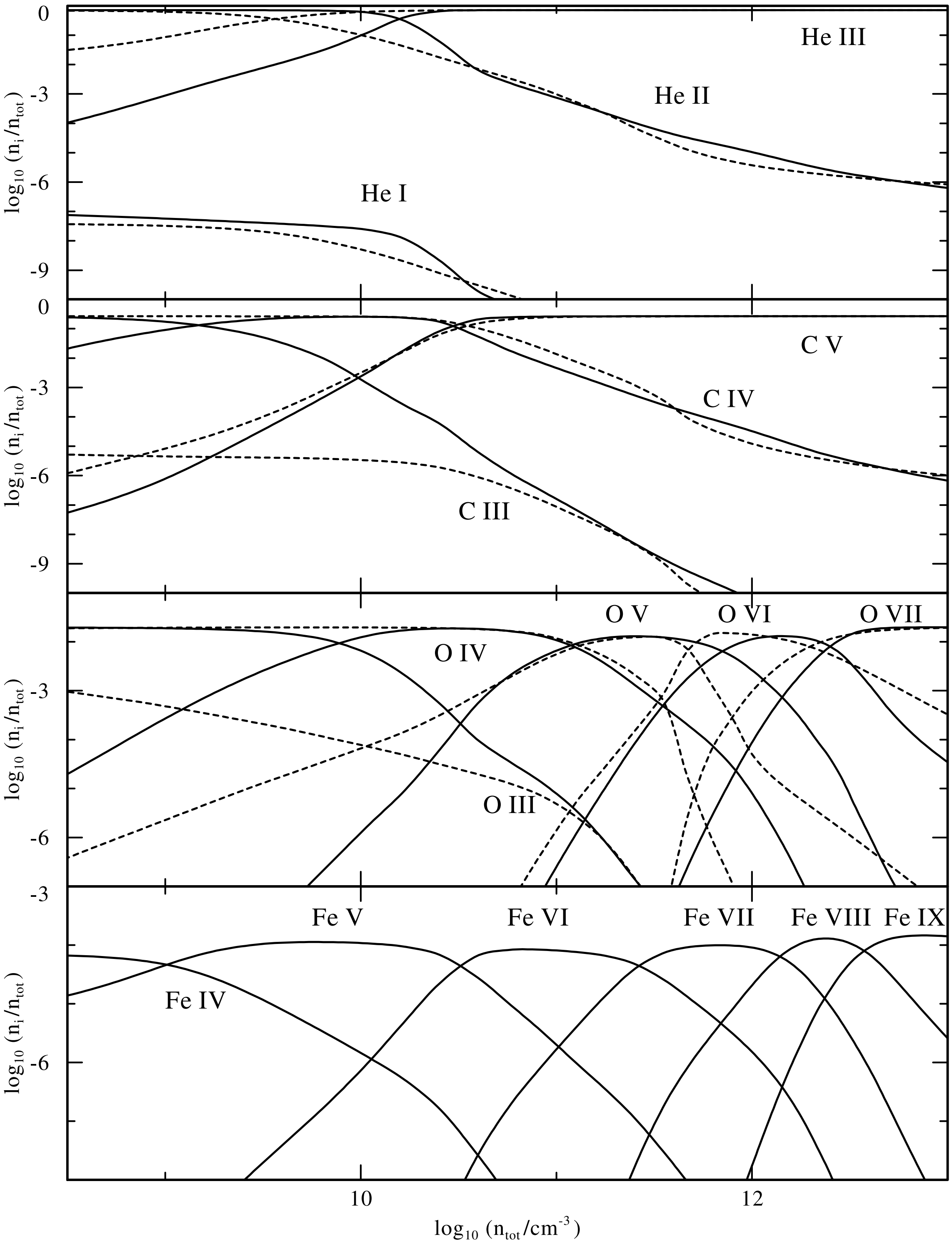

Abbildung 5.2: Relative Besetzungszahlen der Grundzustände der berücksichtigten Ionen für Modelle mit Eisen-Line-Blanketing (durchgezogene Linien) und ohne (unterbrochene Linien). Als Tiefenskala ist die Ionendichte gewählt.

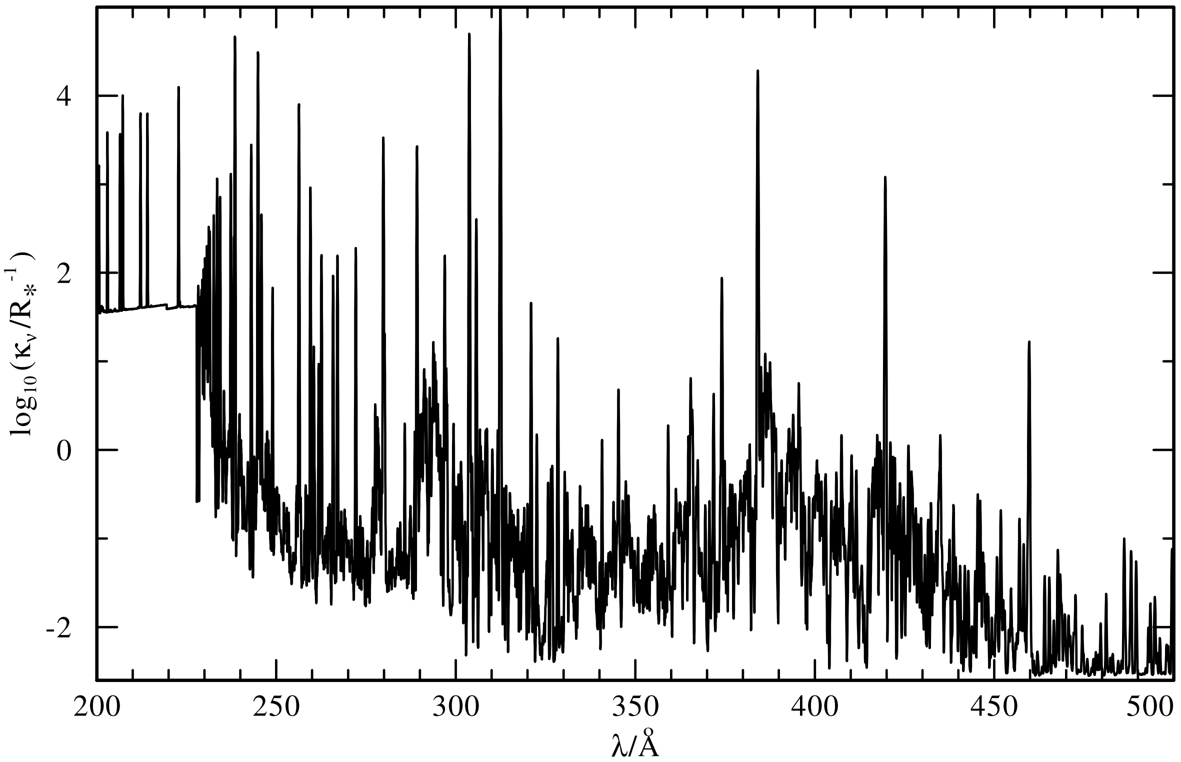

Abbildung 5.3: Opazitätsverlauf im Bereich des Ionisationsumschlags von Fe VI nach Fe V.

5.2 Auswirkungen auf die Ionisationsstruktur

In Abb. 5.2 wird das Modell für WR 111 mit einem Modell ohne Eisen verglichen, das sonst mit denselben Modellparametern berechnet worden ist. Die Auswirkungen der Eisenopazitäten auf die Ionisationsstruktur sind sehr komplex. Im Innenbereich unterscheiden sich die beiden Modelle hauptsächlich in Bezug auf die Rekombination von O VI nach O V, die bei dem Modell mit Eisen weiter innen einsetzt. Dieser Effekt ist auf die höheren Temperaturen in den Innenbereichen des Eisenmodells zurückzuführen ("backwarming", siehe unten). In den Außenbereichen des Eisenmodells ist mit dem Auftreten von Fe V eine verstärkte Rekombination von He III nach He II, von C IV nach C III und von O IV nach O III zu beobachten, die für das spektrale Erscheinungsbild entscheidend ist. Die simultane Reproduktion von C III- und O VI-Linien für WR 111 ist nur durch diesen Effekt möglich.

In Abb. 5.3 ist der Opazitätsverlauf im Bereich des Ionisationsumschlags von Fe VI nach Fe V, wo die verstärkte Rekombination auftritt, dargestellt. Als Einheit ist dabei der inverse stellare Radius $R_\star^{-1}$ gewählt. In der betrachteten Tiefe beträgt die Abmessung einer Gitterzelle einige $R_\star$, so daß für $\kappa_\nu > 1/R_\star$ ein deutlicher Einfluß der Opazität auf das Strahlungsfeld zu erwarten ist. Im Bereich von der He II-Kante bei 228 Å bis etwa 500 Å dominieren Fe-Linienopazitäten gegenüber Kontinuumsopazitäten, und erreichen große optische Tiefen. Dadurch ist ein starker Einfluß auf die ionisierenden Flüsse, besonders für den Kontinuumsübergang von C III nach C IV unterhalb von 258 Å zu erwarten. Das He II-Kontinuum unterhalb von 228 Å ist optisch dick, so

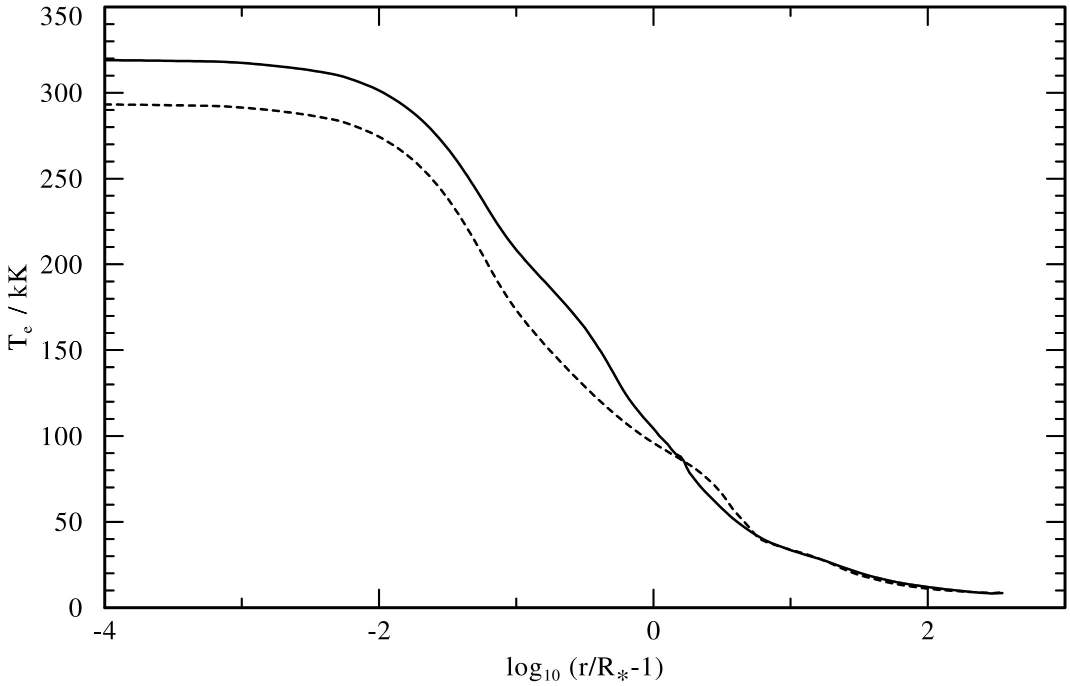

Abbildung 5.4: Temperaturstruktur in Abhängigkeit vom Radius für das Modell für WR 111 (durchgezogene Linie) und für das entsprechende Modell ohne Berücksichtigung von Eisenopazitäten (unterbrochene Linie).

daß eine Photoionisation von He II nur noch vom 1. angeregten Niveau aus möglich ist. Deshalb ist durch eine zufällige Koinzidenz der Resonanzlinie von He II bei 303.78 Å mit Linien der Eisengruppenelemente und der O III-Linie bei 303.80 Å (Bowen-Resonanz) ein Einfluß auf die Ionisation von Helium denkbar (Schmutz 1997).

Die Temperaturstruktur beider Modelle ist in Abb. 5.4 dargestellt. Das Eisenmodell zeigt einen steileren Temperaturverlauf in den Innenbereichen, und eine höhere Temperatur am inneren Rand. Dieser Effekt ist als "backwarming" bekannt. Durch die zusätzlichen Eisenopazitäten steigt das Rosseland'sche Mittel der Opazität (Gleichung (2.26)) an, und der Temperaturgradient wird steiler (Gleichung (2.27)). Weiter außen zeigt das Modell ohne Eisen eine Aufheizung in dem Bereich, in dem O VI über O V nach O IV rekombiniert. Das Eisenmodell, bei dem die Rekombination von O VI nach O IV langsamer verläuft, zeigt demgegenüber einen glatten Temperaturverlauf.

5.3 Auswirkungen auf die emergente Flußverteilung

Das Eisen-Line-Blanketing beeinflußt die ermittelten Leuchtkräfte und ionisierenden Flüsse für Nebelanalysen auf unterschiedliche Art und Weise. Einerseits ändert sich die Flußverteilung im fernen UV, einem Bereich der nicht beobachtet wird. Dadurch liefern Modelle, die ähnliche

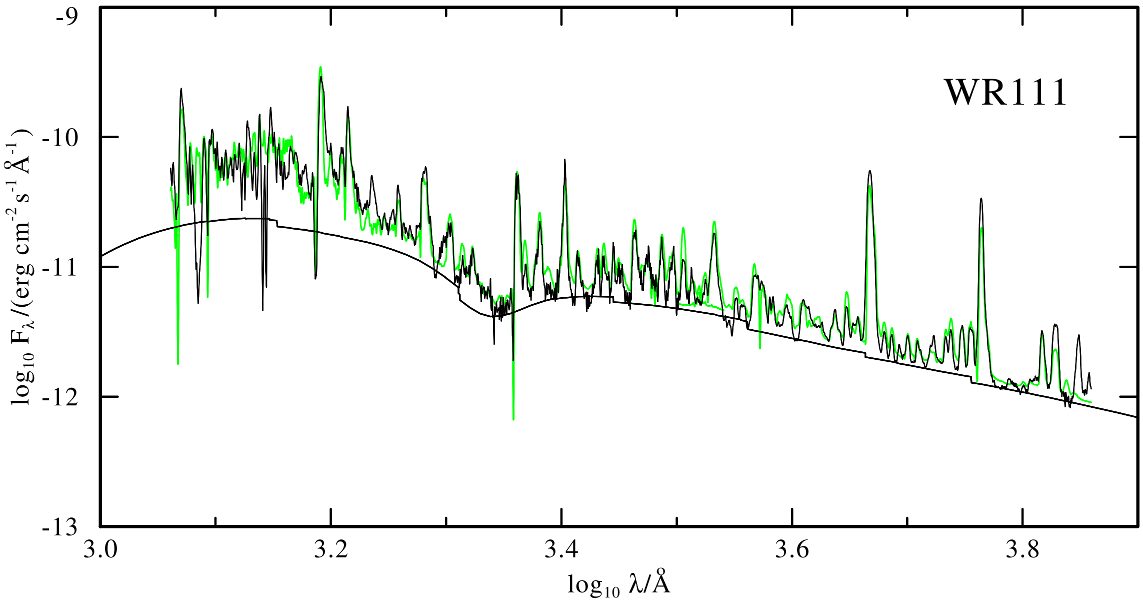

Abbildung 5.5: Vergleich des beobachteten Spektrums von WR 111 (schwarze Linie) mit dem Modellspektrum (graue Linie) und einem reinen Kontinuumsmodell (schwarze glatte Linie).

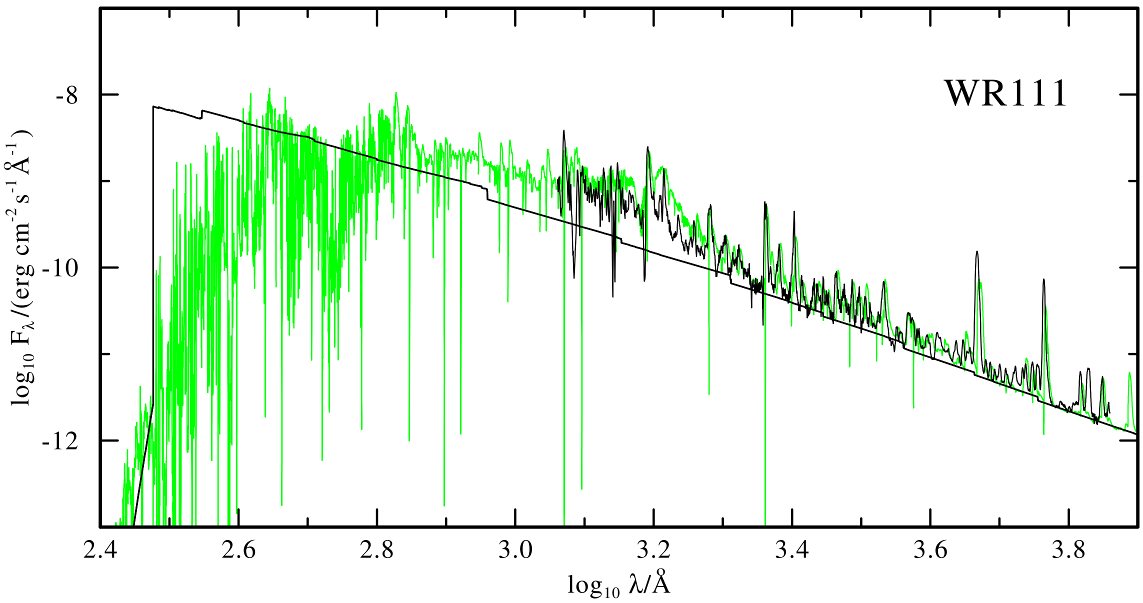

Abbildung 5.6: Flußverteilung im Flußmaximum von WR 111. Der Modellfluß im CMF (grau) wird mit einem reinen Kontinuumsmodell (schwarze glatte Linie) und dem entröteten Spektrum von WR 111 (schwarz) verglichen.

optische Spektren haben, unterschiedliche Leuchtkräfte. Andererseits ändert sich die mittlere Steigung des Kontinuums durch das Pseudokontinuum im UV. Das führt zu Fehlern bei der Bestimmung der interstellaren Extinktion, was wiederum zu fehlerhaften Leuchtkraftbestimmungen führt.

Der Einfluß des Pseudokontinuums auf den ermittelten Extinktionsparameter wird in Abb. 5.5 deutlich. Der beobachtete Fluß wird mit dem Modellspektrum und dem Ergebnis eines reinen Kontinuumstransports verglichen. Die Modellspektren sind beide bezüglich der interstellaren Extinktion korrigiert. Durch eine große Zahl von Linien der Eisengruppenelemente tritt unterhalb von etwa 2000 Å eine deutliche Anhebung des Modellspektrums gegenüber dem Modellkontinuum auf. Dadurch wird das interstellare 2200 Å-Feature verstärkt, und es wird ein größerer Wert für die interstellare Extinktion ermittelt. Das führt wiederum zu einer größeren ermittelten Leuchtkraft.

Abb. 5.6 zeigt einen Vergleich des Modellflusses im CMF mit dem Modellkontinuum über das gesamte Flußmaximum. Zusätzlich ist noch das entrötete beobachtete Spektrum dargestellt. Im Gegensatz zu der oben schon erwähnten Anhebung des Kontinuumsniveaus im Bereich von 1000-2000 Å bewirkt eine große Zahl von Absorptionslinien unterhalb von etwa 800 Å eine starke Abschwächung des emergenten Flusses.

Die in dieser Arbeit bestimmte Leuchtkraft von $L_\star = 10^{5.35}\,L_\odot$ mit einem Extinktionskoeffizienten von $E_{B-V} = 0.29\,\mathrm{mag}$ liegt oberhalb der Werte, die in früheren Arbeiten bestimmt wurden. Generell zeigt sich unter der Berücksichtigung von Eisen-Line-Blanketing eine Tendenz zu höheren ermittelten Leuchtkräften und Extinktionskoeffizienten. So ergibt sich aus Analysen mit Helium-Kohlenstoff-Modellen eine Leuchtkraft von $10^{5.0}\,L_\odot$ (Hillier 1989; Koesterke & Hamann 1995) mit einem Extinktionskoeffizienten von $E_{B-V} = 0.25\,\mathrm{mag}$ (Koesterke & Hamann 1995). Hillier & Miller (1998) ermitteln unter Berücksichtigung von Eisen-Line-Blanketing einen Wert von $10^{5.2}\,L_\odot$ mit $E_{B-V} = 0.26\,\mathrm{mag}$, wobei die Autoren allerdings Schwierigkeiten bei der Bestimmung des Extinktionsparameters im UV haben.

5.4 Auswirkungen auf die Dynamik von WR-Winden

Der treibende Mechanismus für WR-Winde ist bislang ungeklärt. Trotz der hohen Leuchtkraft von WR-Sternen scheint eine Erklärung des Massenverlusts durch Strahlungsdruck schwierig zu sein, da für den Windeffizienzfaktor $\eta = \dot{M} v_\infty/(L_\star/c)$, der das Verhältnis von mechanischem Windimpuls zum Impuls des Strahlungsfeldes angibt, bislang sehr hohe Werte im Bereich $\eta = 5 - 50$ ermittelt wurden (Hamann & Koesterke 1998; Koesterke & Hamann 1995; Gräfener et al. 1998). Das bedeutet, daß im Mittel jedes Photon zahlreichen Streuprozessen ausgesetzt sein muß, damit der beobachtete Impuls auf den Wind übertragen werden kann. In Abschnitt 1.2 wurde bereits darauf eingegangen, daß neuere Untersuchungen darauf hinweisen, daß multiple Streuprozesse an den Spektrallinien der Eisengruppenelemente in Verbindung mit der ausgeprägten Ionisationsstruktur der WR-Atmosphären zu einer adäquaten Windbeschleunigung führen können (Springmann 1994; Springmann & Puls 1998; Schaerer & Schmutz 1994; Schmutz 1997).

Für WR 111 wird in dieser Arbeit ein deutlich niedrigerer Effizienzfaktor ermittelt, als in vor-

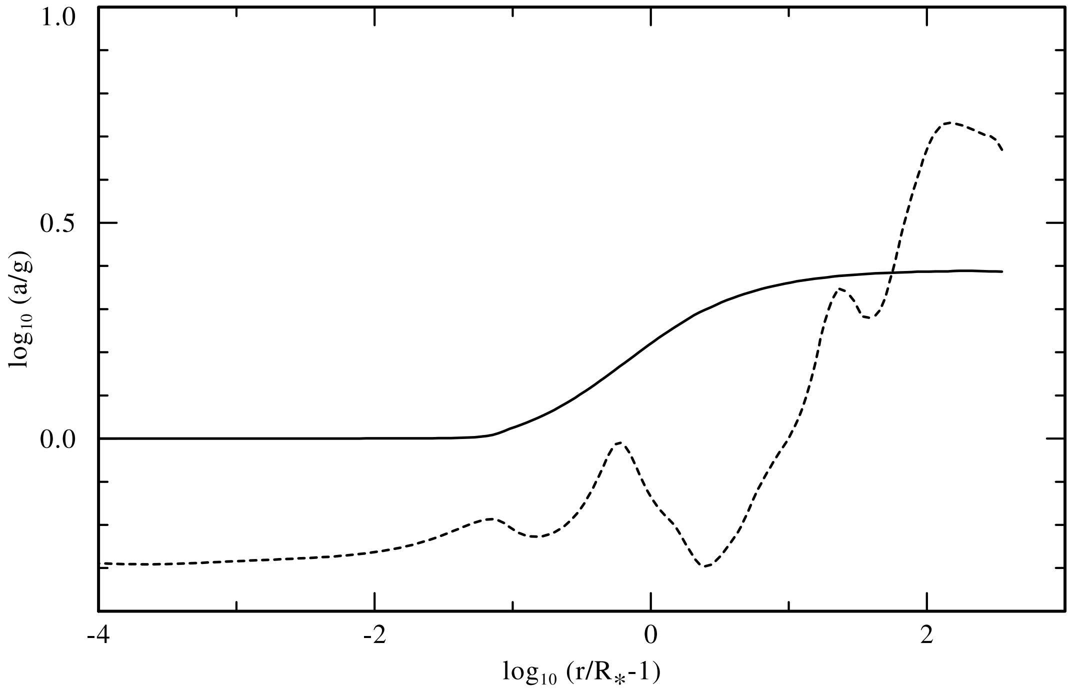

Abbildung 5.7: Die Windbeschleunigung $\dot{v}(r)+g(r)$ für das Modell von WR 111 (durchgezogene Linie) im Vergleich zur radiativen Beschleunigung a_{rad} (Gleichung (5.1), unterbrochene Linie) in Einheiten der Gravitationsbeschleunigung $g(r) = \frac{M_\star G}{r}$.

angegangenen Arbeiten. Das wird einerseits durch die höhere Leuchtkraft, und andererseits durch die Absenkung der ermittelten Massenverlustrate $\propto D^{-1/2}$ bei der Berücksichtigung von Inhomogenitäten erreicht (vgl. Abschnitt 3.1.4). So ergibt sich für das vorliegende Modell mit dem Dichtekontrast von $D = 10$ ein Wert von $\eta = 11.8$. Der in Abschnitt 5.1 durch die Anpassung der Linienflügel ermittelte Wert von $D = 10$ wird generell durch Spektralanalysen von WC-Sternen bestätigt (Hillier 1996; Hamann & Koesterke 1998). Durch die vollständige Berücksichtigung der Eisenopazitäten ($\sim 10^7$ Linienübergänge), sind in dieser Arbeit alle Voraussetzungen für eine Reproduktion solcher Effizienzfaktoren gegeben. Im Gegensatz zu Monte-Carlo-Simulationen wird die Ionisationsschichtung durch die Lösung der Ratengleichungen genau bestimmt, und das Strahlungsfeld für die komplexe Opazitätsverteilung exakt berechnet. Dadurch werden Fehler bezüglich der atomaren Besetzungsverhältnisse und der Berechnung der Windbeschleunigung (Sobolevnäherung) vermieden. Da allerdings das Geschwindigkeitsfeld in der Atmosphäre fest vorgegeben ist, kann die Wechselwirkung zwischen dem Geschwindigkeitsgradienten und der radiativen Beschleunigung nicht berücksichtigt werden. Trotz dieser Einschränkung kann eine qualitative Aussage über die Möglichkeit einer Windbeschleunigung durch Strahlungsdruck gewonnen werden.

Die radiative Windbeschleunigung a_{rad} wird durch eine Integration des Photonimpulses, der pro Zeiteinheit durch Absorption auf die Materie übertragenen wird, ermittelt.

$$a_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{\rho}\,\frac{4\pi}{c}\int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu \,\mathrm{d}\nu \tag{5.1}$$

Abb. 5.7 zeigt einen Vergleich der so ermittelten Werte mit der Beschleunigung a_{wind}, die durch das vorgegebene Geschwindigkeitsgesetz und durch die stellare Masse gefordert wird.

$$a_{\mathrm{wind}} = v(r)\,v'(r) + \frac{M_\star G}{r^2} \tag{5.2}$$

Für das vorliegende Modell ergibt sich aus der Leuchtkraft von $10^{5.35}\,L_\odot$ nach der Relation von Langer (1989b) eine Masse von $12.3\,M_\odot$. Damit wird der erforderliche Wert zwar in den Innenbereichen noch unterschritten, es ist aber ersichtlich, daß die radiative Beschleunigung einen wesentlichen Anteil an der Windbeschleunigung hat. Für das Verhältnis der Arbeit L_{rad}, die vom Strahlungsfeld pro Zeiteinheit geleistet wird,

$$L_{\mathrm{rad}} = \int_{R_\star}^\infty 4\pi r^2 \rho\, a_{\mathrm{rad}}\, v \,\mathrm{d}r = \dot{M}\int_{R_\star}^\infty a_{\mathrm{rad}}\,\mathrm{d}r \tag{5.3}$$

zur Windleuchtkraft

$$L_{\mathrm{wind}} = \dot{M}\int_{R_\star}^\infty a_{\mathrm{wind}}\,\mathrm{d}r = \dot{M}\left(\frac{1}{2}\,v_\infty^2 + \frac{M_\star G}{R_\star}\right) \tag{5.4}$$

erhält man für das vorliegende Modell einen Wert von 0.5. Die starke Zunahme der Beschleunigung in den Außenbereichen der Atmosphäre steht im Einklang mit den Ergebnissen anderer Autoren (Schaerer & Schmutz 1994; Schmutz 1997).

Abb. 5.8 zeigt das Ergebnis einer Testrechnung, bei der die Dichteskalenhöhe am inneren Rand verkleinert wurde. Im Verhältnis zu dem Modell für WR 111 mit $\log(g) = 3.5$ wurde hier ein realistischerer Wert entsprechend $\log(g) = 5.0$ gewählt. Der Wert für eine hydrostatische Schichtung entspräche $\log(g) = 5.7$. Durch den steileren Geschwindigkeitsgradienten nimmt die radiative Beschleunigung am inneren Rand deutlich zu. Zusätzlich liefert der größere Druckgradient einen signifikanten Beitrag entsprechend der hydrodynamischen Bewegungsgleichung

$$\dot{v} = \frac{1}{\rho}\left(f_{\mathrm{rad}} - \nabla p\right) \tag{5.5}$$

Insgesamt ergibt sich damit ein Wert am inneren Rand, der oberhalb der Gravitationsbeschleunigung liegt.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts zeigen, daß der radiativen Beschleunigung zumindest ein wesentlicher Anteil am WR-Massenverlust zukommt. Ob aber der Massenverlust allein durch Strahlungsdruck erklärt werden kann, kann nur durch eine konsistente Lösung von Gleichung (5.5) in Verbindung mit den Gleichungen des statistischen- und radiativen Gleichgewichts geklärt werden.

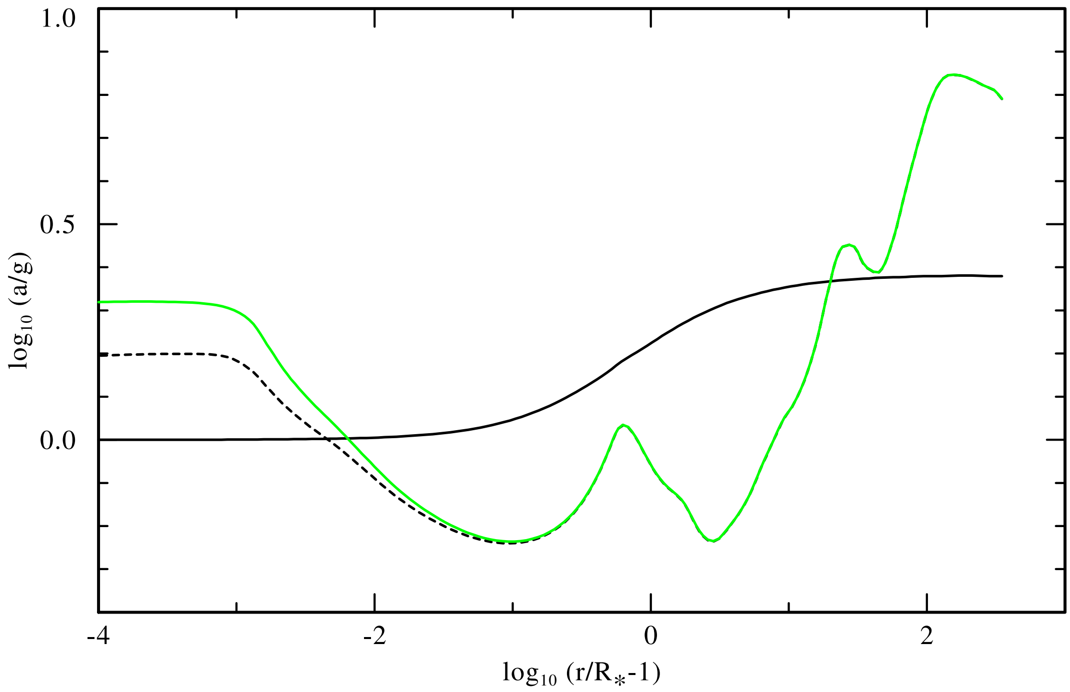

Abbildung 5.8: Windbeschleunigung und radiative Beschleunigung entsprechend Abb. 5.7 für ein Modell, bei dem die Dichteskalenhöhe am inneren Rand entsprechend einem Wert von $\log(g) = 5.0$ verkleinert wurde. Die graue Kurve gibt die Summe der radiativen Beschleunigung und des Beitrages durch den Druckgradienten an (Gleichung (5.5)).

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Unter Berücksichtigung der Elemente Helium, Kohlenstoff und Sauerstoff ist eine Reproduktion der Spektren früher WC-Sterne durch Non-LTE-Modelle für expandierende Sternatmosphären möglich. Für ein Sample von WC-Sternen in der LMC werden stellare Parameter ermittelt. Oberflächenhäufigkeiten, Leuchtkräfte und Radien entsprechen theoretischen Modellen für Sterne in der Phase des zentralen Heliumbrennens ohne wasserstoffreiche Hülle. Vergleiche mit Sternentwicklungsrechnungen zeigen eine Übereinstimmung mit Modellen für $Z = 0.008$ unter der Annahme erhöhter Massenverlustraten in Entwicklungsstadien vor der WR-Phase. Die Massenverlustraten entsprechen Standardrelationen, wobei aber eine Absenkung der ermittelten Werte $\propto D^{-\frac{1}{2}}$ (Dichtekontrast D) durch die Berücksichtigung von Inhomogenitäten beachtet werden muß. Weiterhin wird eine mögliche Abhängigkeit der WR-Massenverlustraten von der Metallizität festgestellt. Die beobachtete Abhängigkeit zwischen Windimpuls und Leuchtkraft entspricht einer Relation, wie sie für Sternwinde, die durch Strahlungsdruck auf Linienopazitäten getrieben werden, erwartet wird.

Die Auswirkungen des Line-Blanketing durch die Elemente der Eisengruppe werden anhand eines Modells für den galaktischen WC-Stern WR 111 untersucht. Die Berücksichtigung von Eisen mit solarer Häufigkeit führt zu einer verstärkten Rekombination von C IV nach C III und zu einer Beeinflussung der spektralen Energieverteilung unterhalb von etwa 2000 Å. Darüber hinaus ergibt sich für die Eisenmodelle eine radiative Beschleunigung, die einen wesentlichen Beitrag zur Beschleunigung des WR-Windes liefert.

Für eine genaue Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Metallizität, Massenverlust und der Verteilung der WC-Spektraltypen ist eine Umfangreiche Analyse von WC-Sternen in Umgebungen unterschiedlicher Metallizität erforderlich. Mit der Berücksichtigung des Eisen-Line-Blanketing ist eine direkte Bestimmung der Metallizitäten der Einzelobjekte möglich. Mit dem vorliegenden Programmcode steht die Möglichkeit offen, die Prozesse, die für den WR-Massenverlust verantwortlich sind, genau zu untersuchen. Durch die Erweiterung des bestehenden Codes um eine konsistente Lösung der Impulsgleichung würde die Parametrisierung des Dichte- und Geschwindigkeitsverlaufs überflüssig. Neben der zu erwartenden Verbesserung der Fit-Qualität könnte dann die Abhängigkeit der Massenverlustraten heißer Sterne von stellaren Parametern untersucht werden.

Literatur

Anderson L.S. 1989, *ApJ* **339**, 558

Baschek B., Efimov G.V., von Waldenfels W., Wehrse R. 1997, *A&A* **317**, 630

Breysacher J. 1981, *A&AS* **43**, 203

Castor J.I., Abbott D.C., Klein R.I. 1975, *ApJ* **195**, 157

Caughlan G.R., Fowler W.A., Harris M.J., Zimmermann B.A. 1985, *Atomic Data Nuc. Data Tables* **32**, 197

Conti P.S. 1976, *Memoires of the Societe Royale des Sciences de Liege* **9**, 193

Conti P.S., Vacca W.D. 1990, *Astron. J.* **100**, 431

Crowther P.A., Smith L.J. 1997, *A&A* **320**, 500

Dreizler S., Werner K. 1993, *A&A* **278**, 199

Gräfener G., Hamann W.-R., Hillier D.J., Koesterke L. 1998, *A&A* **329**, 190

Gräfener G., Hamann W.-R., Koesterke L. 1999, in *Wolf-Rayet Phenomena in Massive Stars and Starburst Galaxies*, K.A. van der Hucht, G. Königsberger, and P.R.J. Eenens (eds.), *IAU Symp.*, Vol. 193, San Francisco: ASP, in press

Gray D.F. 1992, *The observation and analysis of stellar photospheres*, Cambridge University Press

Haas S., Dreizler S., Heber U., Jeffery S., Werner K. 1996, *A&A* **311**, 669

Hamann W.-R. 1985, *A&A* **148**, 364

Hamann W.-R. 1986, *A&A* **160**, 347

Hamann W.-R. 1987, in *Numerical Radiative Transfer*, W. Kalkofen (ed.), p. 35, Cambridge University Press

Hamann W.-R. 1995, in *Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution*, K.A. van der Hucht and P.M. Williams (eds.), *IAU Symp.*, Vol. 163, p. 105, Kluwer, Dodrecht, Holland

Hamann W.-R., Koesterke L. 1996, in *Wolf-Rayet Stars in the Framework of Stellar Evolution*, J.M. Vreux, A. Detal, D. Fraipont-Caro, E. Gosset, and G. Rauw (eds.), Proc. of the 33rd Liége International Astrophysical Colloquium, *Proc. of the 33rd Liége International Astrophysical Colloquium*, p. 491

Hamann W.-R., Koesterke L. 1998, *A&A* **335**, 1003

Hamann W.-R., Koesterke L. 1999, , in preparation

Hamann W.-R., Koesterke L., Gräfener G. 1999, in *Wolf-Rayet Phenomena in Massive Stars and Starburst Galaxies*, K.A. van der Hucht, G. Königsberger, and P.R.J. Eenens (eds.), *IAU Symp.*, Vol. 193, San Francisco: ASP, in press

Hamann W.-R., Leuenhagen U., Koesterke L., Wessolowski U. 1992, *A&A* **255**, 200

Heger A., Langer N. 1996, *A&A* **315**, 421

Hempe K., Schoenberg K. 1986, *A&A* **160**, 141

Hillier D.J. 1989, *ApJ* **347**, 392

Hillier D.J. 1996, in *Wolf-Rayet Stars in the Framework of Stellar Evolution*, J.M. Vreux, A. Detal, D. Fraipont-Caro, E. Gosset, and G. Rauw (eds.), Proc. of the 33rd Liége International Astrophysical Colloquium, *Proc. of the 33rd Liége International Astrophysical Colloquium*, p. 509

Hillier D.J., Miller D.L. 1998, *ApJ* **496**, 407

Howarth I.D. 1983, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **203**, 301

Jones B.F., Klemola A.R., Lin D.N.C. 1994, *Astron. J.* **107**, 1333

Kingsburgh R.L., Barlow M.J., Storey P.J. 1995, *A&A* **295**, 75

Koesterke L., Hamann W.-R. 1995, *A&A* **299**, 503

Koesterke L., Hamann W.-R., Kosmol P. 1992, *A&A* **255**, 490

Koesterke L., Hamann W.-R., Wessolowski U., Schmutz W. 1991, *A&A* **248**, 166

Kurucz R.L. 1991, in *Stellar Atmospheres - Beyond Classical Models*, L. Crivellary, I. Hubeny, and D.G. Hummer (eds.), *NATO ASI Series*, Vol. 341, p. 441

Langer N. 1989a, *A&A* **220**, 135

Langer N. 1989b, *A&A* **210**, 93

Langer N. 1998, *A&A* **329**, 551

Langer N., Hamann W.-R., Lennon M., Najarro F., Pauldrach A.W.A., Puls J. 1994, *A&A* **290**, 819

Langer N., Heger A. 1998, in *New Views of the Magellanic Clouds*, Chu et al. (ed.), *IAU Symp.*, Vol. 190, p. E17, San Francisco: ASP, in press

Lanz T., Hubeny I. 1995, *ApJ* **439**, 905

Leuenhagen U., Hamann W.-R. 1994, *A&A* **283**, 567

Leuenhagen U., Hamann W.-R., Jeffery C.S. 1996, *A&A* **312**, 167

Lundstrom I., Stenholm B. 1984, *A&AS* **58**, 163

Maeder A. 1991, in *Wolf-Rayet Stars and interrelations with other Massive Stars in Galaxies*, K.A. van der Hucht and B. Hydayat (eds.), *IAU Symp.*, Vol. 143, p. 445, Kluwer, Dodrecht, Holland

Maeder A. 1998, in *Properties of Hot Luminous Stars*, I.D. Howarth (ed.), *ASP Conf. Ser.*, Vol. 131, p. 85

Meynet G., Maeder A., Schaller G., Schaerer D., Charbonnel C. 1994, *A&AS* **103**, 97

Mihalas D. 1978, *Stellar Atmospheres*, W. H. Freeman and Company, San Francisco

Mihalas D., Kunasz P.B., Hummer D.G. 1976a, *ApJ* **206**, 515

Mihalas D., Kunasz P.B., Hummer D.G. 1976b, *ApJ* **210**, 419

Mihalas D., Mihalas B.W. 1984, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, Inc.

Morris P.W., Brownsberger K.R., Conti P.S., Massey P., Vacca W.D. 1993, *ApJ* **412**, 324

Puls J., Kudritzki R.-P., Herrero A., Pauldrach A.W.A., Haser S.M., Lennon D.J., Gabler R., Voels S.A., Vilchez J.M., Wachter S., Feldmeier A. 1996, *A&A* **305**, 171

Schaerer D., Meynet G., Maeder A., Schaller G. 1993, *A&AS* **98**, 523

Schaerer D., Schmutz W. 1994, *A&A* **288**, 231

Schaller G., Schaerer D., Meynet G., Maeder A. 1992, *A&AS* **96**, 269
Scharmer G.B. 1981, *ApJ* **249**, 720
Scharmer G.B. 1984, in *Methods in Radiative Transfer*, W. Kalkofen (ed.), p. 173, Cambridge University Press
Schmutz W. 1991, in *Stellar Atmospheres - Beyond Classical Models*, p. 191
Schmutz W. 1997, *A&A* **321**, 268
Schmutz W., Hamann W.-R., Wessolowski U. 1989, *A&A* **210**, 236
Schoenberg K., Hempe K. 1986, *A&A* **163**, 151
Seaton M.J. 1979, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **187**, 73P
Smith L.F. 1968, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **138**, 109
Smith L.F., Shara M.M., Moffat A.F.J. 1996, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **281**, 163
Springmann U. 1994, *A&A* **289**, 505
Springmann U., Puls J. 1998, in *Properties of Hot Luminous Stars*, I.D. Howarth (ed.), *ASP Conf. Ser.*, Vol. 131, p. 286
Torres A.V. 1988, *ApJ* **325**, 759
Torres A.V., Conti P.S., Massey P. 1986, *ApJ* **300**, 379
Torres A.V., Massey P. 1987, *ApJS* **65**, 459
van Regemorter H. 1962, *ApJ* **136**, 906