N A T U R A L   P H I L O S O P H Y

Vorlesung Sommersemester 2007
Universität Potsdam
Achim Feldmeier

Vorab

Woran ist eine Philosophie-Vorlesung erkennbar?

An Selbstreflexivität.

Also wird diese Vorlesung nicht philosophisch sein.

Bestimmung “Positivismus”: vor allem: “unproblematisch”.

In den Naturwissenschaften werden Dinge unproblematisch angenommen.

Andererseits: Originalquellen

Quellen gelten in empirischen Wissenschaften praktisch nichts.

Bis hin zu absichtlichen Fehlzuordnungen von Entdeckungen:

Die Lagrangeableitung, das Lagrangebild, die Lagrangegleichung stammen alle drei von Euler.

Diese Vorlesung ist dagegen an Originaltexten orientiert.

Zu den Originalen: von der Homepage der Bibliothek der Uni Graz:

“Das 17. Jahrhundert brachte einen starken Qualitätsverfall – mit einigen wenigen Ausnahmen – im Druckgewerbe, wenn auch die Produktion quantitativ weiter zunahm. Es war das Jahrhundert der großen Autoren und der schlechten Drucker. Shakespeare, Cervantes, Corneille und La Fontaine sollten ihre Werke nie in typographisch hochrangigen Drucken zu Gesicht bekommen. Der Kupferstich setzte sich als vorherrschende Illustrationstechnik im Buche durch. Als einzige echte Neuerung ist die Einführung periodisch erscheinender Zeitungen und Zeitschriften hervorzuheben. Das älteste wissenschaftliche Periodikum ist das Journal des Scavans, das ab 1665 in Paris erschien. Zur gleichen Zeit wie in Paris begann in London eine wissenschaftliche Zeitschrift zu erscheinen: die Philosophical Transactions der Royal Society.”

Literatur:

Ostwalds Klassiker: Originalarbeiten (in Übersetzung) von Leibniz, Newton

Moritz Cantor: Geschichte der Mathematik, 5 umfangreiche Bände a 1000 Seiten.

Aus der Besprechung zum Erscheinen (1894) des dritten Bandes von Cantor:

Bei der allgemein anerkannten großen Bedeutung des fundamentalen Werkes Cantor's haben wir dieser Abtheilung nicht etwa durch ein Wort des Lobes oder der Empfehlung den Weg zu ebnen, sondern nur unserer großen Freude über das Erscheinen derselben Ausdruck zu geben und den Wunsch auszusprechen, dass die noch fehlenden zwei Abschnitte (I. Von 1700 bis zum Tode Newton's (1726); II. Von 1726 bis zu den ersten Arbeiten von Lagrange in den Abhandlungen der Pariser Akademie (1759)) recht bald veröffentlicht werden möchten.

Cantor inzwischen auf dem Internet:

`http://www.archive.org/details/117719411_002`

Allerdings 1.5 GByte pro Band.

Zu den Quellen: John Rawls

Amerikanischer Philosoph (Harvard), 1921-2002

Hauptwerk: A theory of justice (1971).

Aus seiner "Geschichte der Moralphilosophie" (Suhrkamp-Verlag, S. 17):

„In meinen Vorlesungen habe ich nicht gesagt (jedenfalls nicht absichtlich), was der betreffende Autor nach meinem Dafürhalten hätte sagen sollen, sondern ich habe wiedergegeben, was er tatsächlich gesagt hat... Der Text mußte bekannt sein und respektiert werden, und sein Lehrgehalt mußte in der besten Form vorgestellt werden. Den Text beiseite zu lassen, erschien mir kränkend; es wäre eine Art von Anmaßung gewesen."

„Ich bin stets davon ausgegangen, daß die Autoren, die wir studierten, viel gescheiter gewesen waren als ich selbst. Wären sie es nicht gewesen, warum hätte ich dann meine eigene Zeit und die der Studenten mit ihrer Lektüre vergeuden sollen? Wenn ich in ihren Argumenten einen Fehler erblickte, nahm ich an, daß diese Autoren ihn auch selbst gesehen hatten und irgendwie damit fertig geworden waren. Aber wo? Ich suchte keinen eigenen Ausweg, sondern ihren Ausweg."

„Das Ergebnis war, daß ich eine Abneigung dagegen verspürte, Einwände gegen die Vorbilder zu erheben; das ist zu bequem und geht am Wesentlichen vorbei. Wichtig war es jedoch, auf Schwierigkeiten hinzuweisen."

„Wenn es um Kant ging, habe ich überhaupt kaum Kritik geübt."

Nochmals: keine Philosophievorlesung

Heidegger: “”Die Wissenschaft denkt nicht.”

Vortragsweise und Skript

Physikalischer Vortrag hält sich eng an die mathematischen Herleitungen.

Hier Textmitschrift in skizzenhafter Form.

In das Skript sind die Originalquellen eingebaut.

Viele Originaltexte in Ostwalds Klassikern:

Ins Deutsche übersetzte Originalarbeiten von Leibniz, Newton, Euler, Lagrange.

Wichtigste Einzelbücher:

Principia Mathematica und Kritik der reinen Vernunft.

Behandelte Themen

Wir werden uns auf die Zeit etwa von 1650 bis 1830 beschränken.

Also Barock, Empirismus, Aufklärung, Klassik.

Kein Kopernikus, Galilei, Kepler, Descartes.

Grob: von Newton bis Gauß.

Lesetipp zu Gauß: „Die Vermessung der Welt"von Daniel Kehlmann.

I: Differentialrechnung bei Newton und Leibniz

II: Newtons Principia Mathematica

III: Humes Kritik am Kausalitätsgesetz

IV: Kant

V: Variationsrechnung

VI: Nichteuklidische Geometrie

Lebenszeiten

```
                    1560   80  1600  20   40   60   80  1700  20   40   60   80  1800  20  1840
                       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

Galilei     1564-1642   ____________________Galilei
Kepler      1571-1630     _______________Kepler
Descartes   1596-1650           ______________ Descartes
Barrow+     1630-1677                    ___________Barrow
Newton      1642-1727                       _____________________Newton
Leibniz*    1646-1716                        _________________Leibniz
J.Bernoulli 1655-1705                          ____________J.Bernoulli
Euler       1707-1783                                       ___________________Euler
Hume        1711-1776                                        _________________Hume
d’Alembert  1717-1783                                         _________________d’Alembert
Kant        1724-1804                                           ____________________Kant
Lagrange    1736-1813                                              ____________________Lagrange
Gauss       1777-1855                                                        _____________________


+ Lehrer Newtons
* geboren in Leipzig
```

Also grob drei Epochen:

1. (frühes 17. Jhd) Grundlegung Physik und Philosophie (Galilei, Kepler, Descartes)

2. (spätes 17. Jhd) Grundlegung Analysis (Newton, Leibniz, Bernoulli)

3. (18. Jhd) Ausformulierung; Aufklärung (Euler + Lagrange, Hume + Kant)

Einführung: Kepler

Kepler und Galilei begründen die moderne Physik:

Physik ist mehr als Geometrie: von der Sonne ausgehende *Kraft*.

Heute eher wieder pre-Keplersch.

Ellipsenbahnen der Planeten:

Untersuchung zu Sehfehlern anhand von Ochsenaugen.

Sind die Bahnellipsen nur durch Sehfehler verursacht?

Der Traum vom Mond

“Die Schwere definiere ich als eine Kraft, die dem Magnetismus ähnlich ist und mit der Attraktion in Wechselwirkung steht. Die Gewalt dieser Anziehung ist größer unter nahestehenden als unter entfernteren Körpern; daher leisten sie der Trennung voneinander stärkeren Widerstand, wenn sie sich noch nahestehen.”

Bereits richtiges Konzept von $v_{\rm esc}$:

“Diese Anfangsbewegung ist für ihn [den Mondreisenden] die schlimmste; denn er wird gerade so emporgeschleudert, als wenn er, durch die Kraft des Pulvers gesprengt, über Berge und Meere dahinflöge. Deshalb muß er zuvor durch Opiate betäubt ... werden.”

“Infolge der bei Annäherung an unser Ziel [den Mond] stets zunehmenden Anzieung würden sie [die Mondreisenden] durch zu harten Anprall an den Mond Schaden leiden.”

Beschreibung von Erdfinsternissen auf der erdzugewandten Seite: da die Erde deutlich größer ist als die

Sonne, sind Tag und Nacht dort nicht allzu verschieden. Wenn es aber zu einer Sonnenfinsternis kommt (die wegen der großen Fläche der Erde am Himmel erstens häufig, zweitens lang sind), erlöschen beide Lichtquellen zugleich, was einen drastischen Effekt gibt.

Teil I: Anfang der Differentialrechnung bei Newton und Leibniz

Nach Newton

Literatur: Oswalds Klassiker, Band 164.

Bereits Newtons Lehrer Barrow in Cambridge erkennt 1670 in seinem Hauptwerk:

Differentiation und Integration sind Umkehroperationen.

Sein "inverses Tangentenproblem" (viel bei Leibniz genannt) heißt heute:

Integration von DGL erster Ordnung.

Teilweise war Newton hier Anregender. Hat aber auch Anregungen erhalten.

Newton beginnt im Alter von 19 Jahren Studium der Mathematik in Cambridge.

Hervorragende Rahmenbedingungen und Lehrer.

Leibniz dagegen mathematischer Autodidakt.

Barrow verzichtet im Alter von 39 Jahren zugunsten von Newton auf seine Professur und wird wieder (!) Priester.

Im Alter von 23 beginnt Newtons eigene Produktion:

Binomialformel, Fluxionsmethode 1665-67.

Erhaltenes erstes handschriftliches Manuskript zur Diff.Rechnung von 1665.

1671 (29) Newtons Methodus Fluxionum fertig, aber lange ungedruckt.

Erste Veröffentlichung zur Inf.rechnung erst 1704:

Fast 40 Jahre nach ihrer Entwicklung.

Ebenfalls erhalten: Brief von Newton an Collins von 1672 über Fluxionsrechnung:

Kalkül zur Bestimmung von Tangenten, Krümmung, Quadratur (Flächeninhalt), und Schwerpunkte beliebiger Kurven.

Newton gab Manuskript von 1665 (23) Barrow, dieser gab es Collins in London zur Veröffentlichung.

Der zeigte es 11 Jahre später, 1676, dem durchreisenden Leibniz.

Beachte aber: Leibniz hat schon 1675 das Integralzeichen eingeführt.

In Leibniz Nachlass gefunden, in dessen Handschrift:

"Auszüge aus einer handschriftlichen Abhandlung Newtons."

Kann nur während der Reise angefertigt worden sein:

Mindestens ein Abschnitt ist praktisch identisch übernommen.

Auch Newtons Principia mathematica erschien 1687 nur nach Überredung durch Halley.

Heute sicher: Ergebnisse der Principia wurden mit Fluxionsrechnung gefunden.

Danach erst in geometrische Beweise umgemünzt.

Möglicher Grund: neue Methode schreckt Leser ab.

Noch in der zweiten Auflage der P.M. von 1713 schreibt Newton:

Leibniz habe 1676 auf seine, Newtons, briefliche Andeutungen zur Differentialrechnung sofort mit dem fertigen Kalkül geantwortet; diesen also gekannt.

Newtons Schrift: Abhandlung über die Quadratur der Kurven

1704 erschienen.

Abgedruckt in Ostwalds Klassiker Bd 162.

Großer Unterschied zu Leibniz:

Newton kommt von Kinematik (Leibniz von Geometrie).

Differential als Bewegung entlang Kurven, also Zeitdifferential.

Geschwindigkeit des Wachstums, der Bewegung.

“Bewegungs- oder Wachstumsgeschwindigkeiten heißen Fluxionen”.

Fluxionsrechnung.

Z.B. bestimme $s(t)$ bei gegebenem $v(t)$: Quadratur von Kurven.

Laut Newton selbst zwischen 1665 (23) und 1666 erfunden.

Bereits erster Satz der Einleitung (diese erst 1704 geschrieben) ist Front gegen Leibniz:

“Ich betrachte hier die mathematischen Größen nicht als aus äußerst kleinen Teilen bestehend, sondern als durch stetige Bewegung beschrieben.”

Das antike Problem der Zusammensetzung der Bewegung aus Ortsänderungen wird von Newton radikal gelöst:

Für ihn ist Bewegung das primäre, nicht zerlegbare.

“Die Wachstumsgeschwindigkeiten $(v\,dt)$ verhalten sich wie die in gleichen Zeitteilchen erzeugten Zunahmen der erzeugten Größen (ds), und sie stehen, um genau zu reden, im ersten Verhältnis der Zunahmen.”

4. Soll die Sekante Cc mit der Tangente CH zusammenfallen, so müssen die Punkte C und c zusammenrücken.

Das Dreieck CET, im limes infinitesimaler Seitenlänge, ist Pascals *charakteristisches Dreieck*, das Leibniz – Pascal zitierend! – regelmäßig verwendet.

8. Gerade, die sich um Pol dreht. Auch Cantor S.280.

10. Die Größe x möge gleichförmig fließen, und es sei die Fluxion der Größe x^n zu finden.

In der Zeit, in der x zu $x+o$ wird, wird x^n zu $(x+o)^n$, d.h. nach der Methode der unendlichen Reihen zu

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \text{usw.}$$

Die Zunahmen o und

$$nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}\, o^2 x^{n-2} + \text{usw}$$

verhalten sich zueinander wie 1 zu

$$nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o x^{n-2} + \text{usw.}$$

Nun mögen jene Zunahmen verschwinden.

Dann wird ihr letzten Verhältnis 1 zu nx^{n-1} sein.

Es verhält sich daher die Fluxion der Größe x zu der Fluxion der Größe x^n wie 1 zu nx^{n-1}.

Siehe auch Cantor für diese Stelle.

11. "Es harmoniert aber mit der Geometrie der Alten, die Analysis in endlichen Größen anzustellen und von endlichen Größen, die eben beginnen oder verschwinden, die ersten oder letzten Verhältnisse aufzuspüren. Und ich wollte zeigen, daß es bei der Fluxionsmethode nicht nötig ist, unendlich kleine Figuren in die Geometrie einzuführen.

"Erste und letzte Verhältisse" sind, was heute Differentialquotient heißt:

Ein Verhältnis im limes infinitesmialer Größen:

die “eben beginnen oder verschwinden”.

Der erste Satz ist also klar und modern.

Andererseits hadert Newton hier, wie auch in der P.M.:

“Man kann den Einwand machen, daß es kein letztes Verhältnis verschwindender Größen gebe, indem dasselbe vor dem Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältnis mehr stattfinde.”

Die Antwort ist aber ganz klar in der P.M.:

Man muß den limes des Verhältnisses finden;

nicht das Verhältnis der limites: das ist $0/0$:

“Die letzten Verhältnisse sind nicht die Verhältnisse der letzten Größen, sondern die limites, denen sich die Verhältnisse der unbegrenzt abnehmenden Größen nähern.”

Leibniz führt aber auch keine uendlich kleinen Figuren ein.

Newton führt als nächstes die Schreibweise $\dot{x}$ ein für die Fluxionen.

Fluxion der Fluxion ist $\ddot{x}$.

Er findet nun durch Reihenentwicklung die Zeitableitung von

$$x^3 - xy^2 + a^2 z - b^3 = 0.$$

Diese ist

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0.$$

Newton: die erste Glg ist Beziehung zwischen x, y, z; die zweite Glg ist Beziehung zwischen den Fluxionen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Dann Übergang zur Integration, die ein schwierigeres Problem sei als die Differentiation.

§10 gibt Integral von Potenzfunktionen.

Es folgt eine Tabelle "Form der Kurve", "Fläche der Kurve":

die erste Integraltafel.

Darin auch Kegelschnitt-Integrale.

Newtons Schlußsatz:

“Durch diese Anfänge wird der Weg zu Größerem geebnet.”

Wann wurde die Schrift verfaßt?

Laut Newton war das meiste schon in dem Brief an Leibniz von 1676.

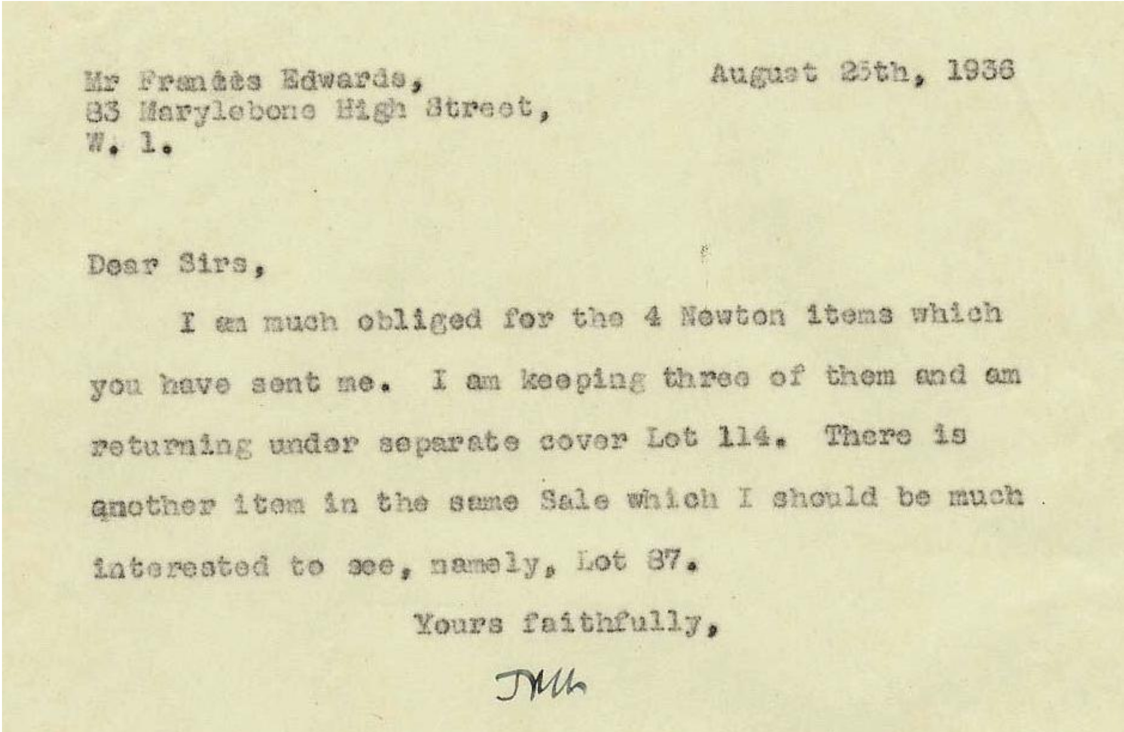
Der Inhalt selbst wurde wohl zur Veröffentlichung 1704 aktualisiert.

Die Einleitung mit vielen wichtigen Stellen zur Idee der Fluxionsrechnung (siehe auch unten) ist sicher neu.

Viele Originalhandschriften Newtons zusammengeführt von Keynes.

Archiv `http://www.newtonproject.ic.ac.uk`

Nach Leibniz 1684



Mr Francis Edwards,
83 Marylebone High Street,
W. 1.

August 25th, 1936

Dear Sirs,

I am much obliged for the 4 Newton items which you have sent me. I am keeping three of them and am returning under separate cover Lot 114. There is another item in the same Sale which I should be much interested to see, namely, Lot 87.

Yours faithfully,

JMK

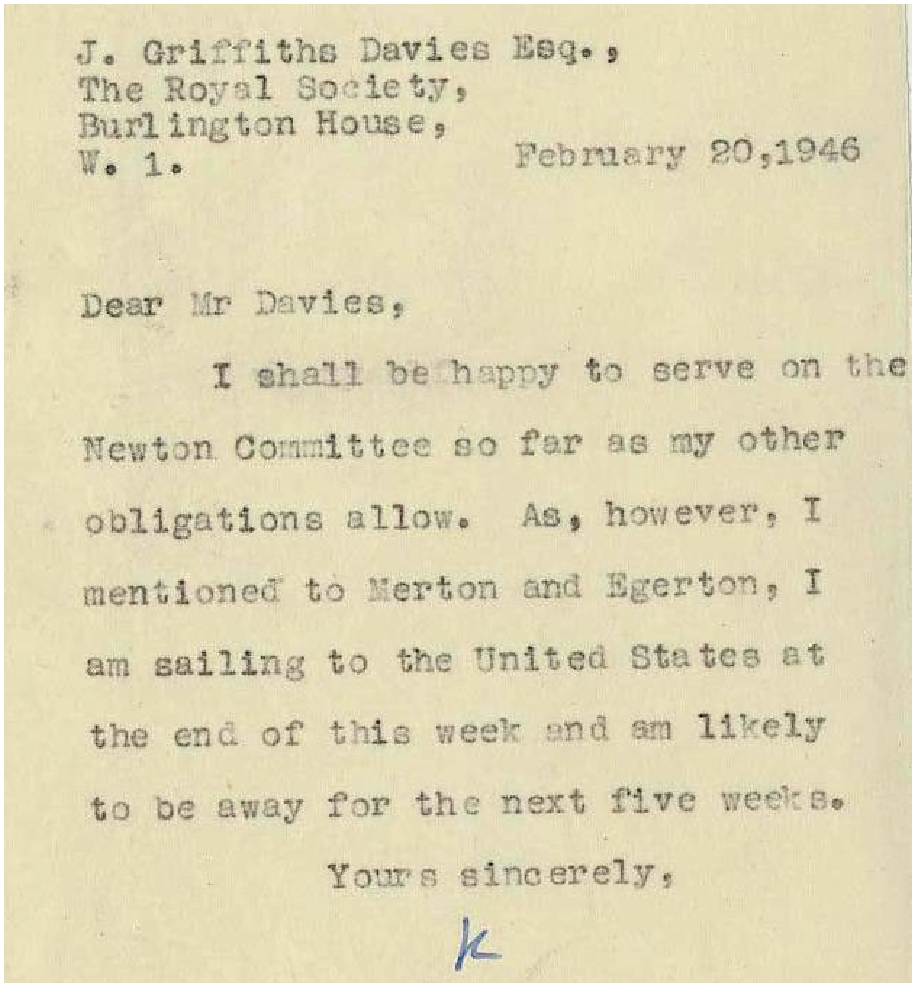
Die neuen Leibnizbände zu mathematischem und naturwissenschaftlichem Briefwechsel bei

`http://www.leibniz-edition.de/Baende/ReiheIII.htm`

Literatur: Oswalds Klassiker Band 162.

Zur Geschichte (siehe “Anmerkungen” dort):

seit 1673 (27) versucht Leibniz, bei allen Tangentenkonstruktionen Pascals charakteristisches Dreieck anzuwenden:



J. Griffiths Davies Esq.,
The Royal Society,
Burlington House,
W. 1.
February 20,1946

Dear Mr Davies,

I shall be happy to serve on the Newton Committee so far as my other obligations allow. As, however, I mentioned to Merton and Egerton, I am sailing to the United States at the end of this week and am likely to be away for the next five weeks.

Yours sincerely,

K

Dieses besteht aus einem unendlich kleinen Bogenstück und den zugehörigen Abszissen- und Ordinatendifferenzen.

In einem Brief von 1675 taucht das Integralzeichen auf.

1675 (29) taucht das Differential dx in heutiger Bedeutung auf.

“Quia istud dx est modification quaedam ipsius x”

(1686).

Newtons Fluxionsrechnung leistete dasselbe, war auch früher entstanden, aber unveröffentlicht.

Aber: 1675 kam Tschirnhaus von London, wo er Newton getroffen hatte, zu Leibniz.

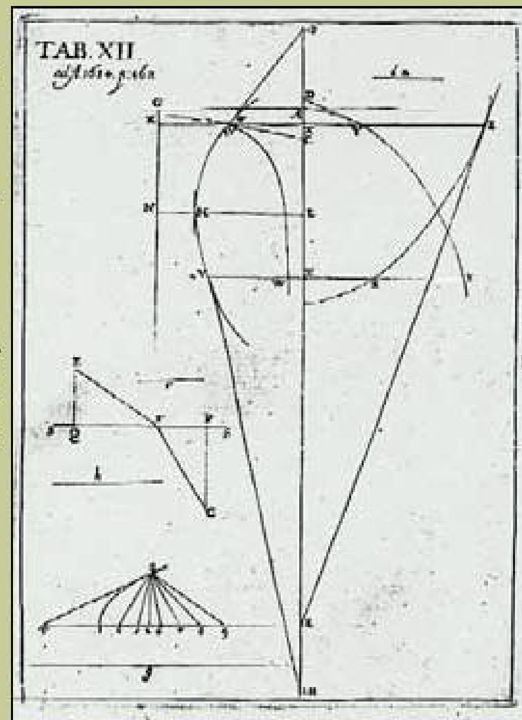
Und: 1676 ist Leibniz einige Tage bei Collins in London, der Newtonsche Manuskripte aufbewahrt.

Auch: 1676 zwei Briefe Newtons an Leibniz mit versteckten Andeutungen.

Aber: schnelle Antwort auf diese Briefe zeugt von eigener Vertrautheit mit dem Kalkül.

The Dibner Library completes its set of the Heralds of Science with the purchase of a set of the Acta Eruditorum containing Leibniz's article on the new method of differential calculus.

The Dibner Library is at long last happy to announce that it has now collected all of the works listed as being in Bern Dibner's *Heralds of Science*. The last piece of the puzzle was Herald 109, Leibniz's 1684 article in the journal *Acta eruditorum* on the invention of the differential calculus. The Spring 2001 issue of *Dibner Library News* noted how we managed to obtain three of the four Heralds that we were missing, but the Leibniz article still eluded us. Fortunately, the opportunity arose for us to not only purchase the Leibniz article, but also a complete run of the *Acta eruditorum* from the first volume of 1682 through 1731.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), a German philosopher and mathematician, although largely self-trained, became adept at working on some of the most sophisticated mathematical problems of the time, including work on infinite series and infinitesimals. In 1675 to 1676, Leibniz made his breakthrough on the development of calculus, a mathematical method used to determine the rates of change of quantities. Such problems were not solvable through algebra or geometry alone, and their solution occupied mathematicians throughout the seventeenth century.

Isaac Newton (1642–1727) had developed calculus independently back in 1665 and 1666 but shared his discovery with only a few colleagues and his early treatises on the matter went unpublished. It was not until 1687 that Newton published his discovery in his monumental work, *Philosophiae naturalis principia mathematica* [Mathematical principles of natural philosophy]. Like Newton, Leibniz did not publish anything on his discovery, and only hinted in his correspondence that he had developed the calculus. It was not until 1684 that Leibniz published his method of finding tangents to curves, the "calculus differentialis," in an article titled "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationals quantitates moratur [A new method for maxima and minima, and also for tangents, which is not obstructed by irrational qualities]." This article is the famous Herald of Science 109 and was published in the Acta eruditorum. In 1686, he followed up this work with a second article on his method of finding the areas under curves, the "calculus integralis," and demonstrated that it was an inverse method of the differential calculus.

Auch: Newton nennt Leibniz in der Erstauflage der Principia 1687 als unabhängigen Entdecker der Differentialrechnung.

Und: wegen diplomatischer Pflichten im hannoverschen Staatsdienst seit 1676 veröffentlicht Leibniz erst 1684 erstmals zum Differentialkalkül.

Seit 1699 Plagiatsstreit mit Newton.


GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
Sämtliche Schriften und Briefe

Leibniz' Fürst (Hannover!) wurde (auch dank Leibniz) englischer König

...und stellte sich im Prioritätsstreit mit Newton gegen Leibniz.

Artikel von 1684 in Acta Eruditorum

Leibniz erste publizierte Schrift zur Diff.rechnung.

"Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten... und eine eigentümlich darauf bezügliche Rechnungsart."

Die Ideen darin sind bereits bis zu zehn Jahre alt.

Leibniz' Zeichnung ist etwas verwirrend;

auch manche Symbole nur im Text, nicht in der Zeichnung;

vor allem: xy Achsen vertauscht; und dx zeigt in y-Richtung.

Für die dritte seiner vier beliebigen Kurven YY sind Bild und Bezeichnung:

```
             |/
             /D
 Y.         /|
    .      / |
      .   /  |x
       . /   |
      Y./    |X
------./-----|--------
     ./   y  |
   .         |
.            |
      |---|
       dx
```

Achtung: dx sollte senkrecht zu sich gezeichnet werden.

Leibniz fordert: es soll die Strecke, die sich zu dx verhält wie y zu x (er statt x: XD), mit dy bezeichnet werden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Mit dieser Festsetzung behauptet er wenige Zeilen darauf die Produktregel

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Interessanterweise schreibt er keine allgemeine Produktregel für $d(yz)$. (Beliebige zweite Kurve $z(x)$ neben $y(x)$.)

Aber wenige Zeilen später schreibt er die Quotientenregel für allgemeines $d(y/z)$.

Er stellt fest, daß bei Kurvenextrema $dy = 0$ ist:

“... in dem Augenblick, wo die y weder zunehmen noch abnehmen, sondern im Stillstand begriffen sind, wird alsdann dy gleich 0.”

Kurz darauf die Regeln $dx^n = nx^{n-1}dx$

Dann die Ableitung der allgemeinen Wurzel.

“Diesen Kalkül, den ich Differentialrechnung nenne.”

“Es lassen sich [damit] Maxima und Minima erhalten.”

“Der Beweis alles dessen wird für einen in diesen Dingen Erfahrenen leicht sein.”

“Man muß nur festhalten, daß eine Tangente zu finden so viel ist wie eine Gerade zeichnen, die zwei Kurvenpunkte mit unendlich kleiner Entfernung verbindet.”

Es gelingt ihm, im Gegensatz zu Newton, $1/x$ zu integrieren.

Trick: er erkennt arithmetische vs geometrische Progression bei y vs x, und dies ist genau Ausdruck des Logarithmus.

Er diskutiert Krümmungen und Wendepunkte mittels ddv.

Krümmungswechsel, wenn $ddv = 0$, ohne daß $v = 0$ oder $dv = 0$ sein muß.

Am Ende des Artikels leitet er mit diesem Kalkül her:

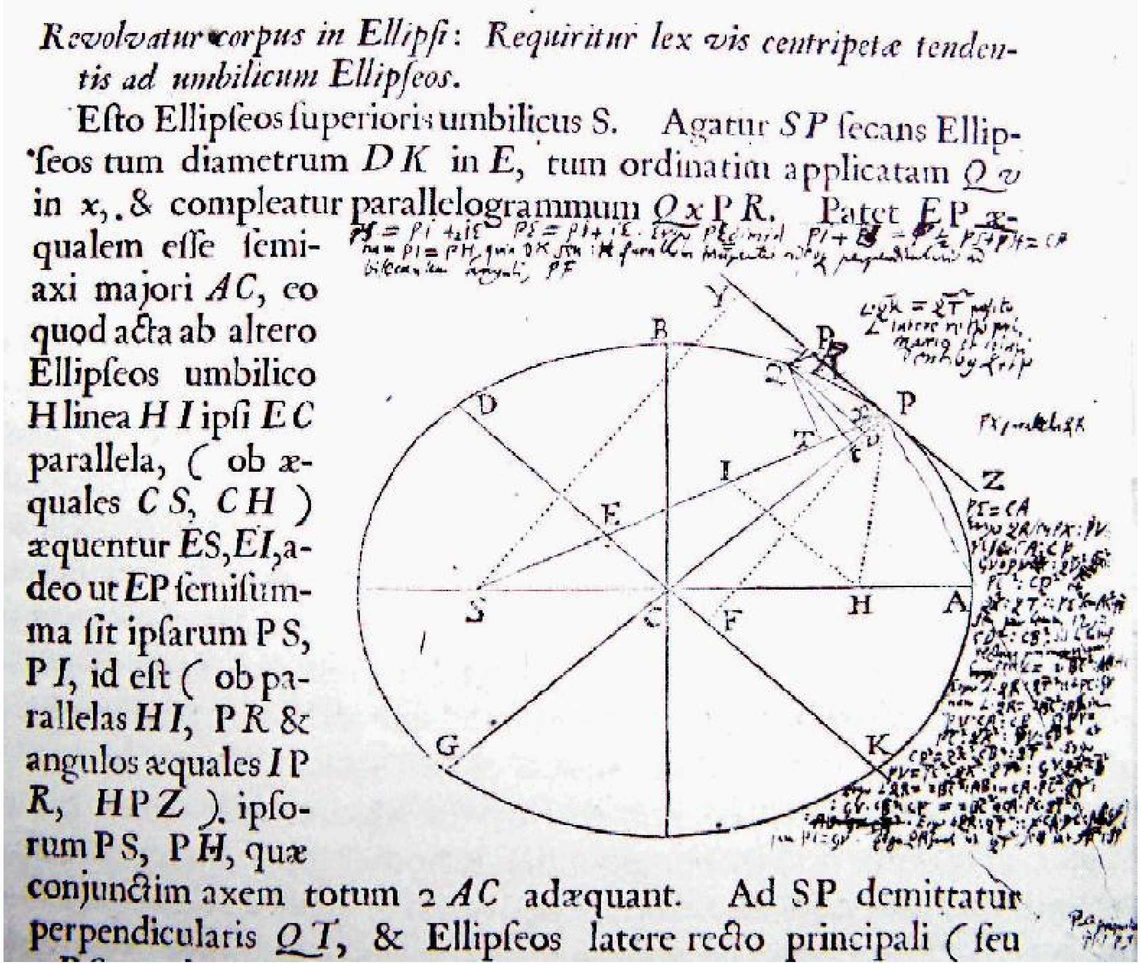
Snelliussches Brechungsgesetz aus dem Extremalprinzip von Fermat:

“Daß der Weg der leichteste ist”.

1684 schrieb Newton an der Principia, und beachtete wohl die Leibnizsche Schrift kaum.

Umgekehrt: Leibniz handschriftliche Anmerkungen zu Newtons Hauptbeweis in der Abbildung

Warum schickte Newton 1684 nicht seine Meth flux ein?



Revolvatur corpus in Ellipſi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.

Eſto Ellipſeos ſuperioris umbilicus S. Agatur SP ſecans Ellipſeos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi majori AC, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico H linea HI ipſi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquentur ES, EI, adeo ut EP ſemiſumma ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſorum PS, PH, quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu

In Leibniz Aufsatz von 1686 erscheint erstmals das Integralzeichen in Druck.

Alte und neue Zeit:

Noch 1694 schreibt Huygens an Leibniz, dessen Methode bleibe ihm nicht gegenwärtig, wenn er eine Zeit lang aufgehört habe, sich mit ihr zu beschäftigen.

Auch glaubt er, die relevanten Ergebnisse einfacher, direkt finden zu können.

Dagegen Jakob und Johann Bernoulli seit 1684 Anhänger der neuen Methode.

Brauchten laut eigener Aussage Jahre, bis sie Leibniz Schrift verstanden hatten.

Damit 1690 DGL der Isochrone durch Jakob Bernoulli aufgestellt,

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$$

aus geometrischer Überlegung.

Überhaupt 1691/92 Durchsetzung der Differential- und Integralrechnung:

Mehrere Artikel von Jakob Bernoulli in A.E. zeigen deren Verwendbarkeit bei schwierigen Aufgaben.

Newtons und Leibnizens erste Entdeckungen im Gebiete der Infinitesimalrechnung

Das folgende nach Moritz Cantor.

Historisch: warum entwickelte sich Infinitesimalrechnung:

Suche nach Kurvenlängen, Körpervolumen, Flächen, Schwerpunkten.

Wallis 1655 und Newton in seiner Erstlingsschrift 1666:

Fläche unter einer Kurve

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

ist, zwischen 0 und x,

$$\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}.$$

In dieser Schrift vernachlässigt Newton erstmals Differentiale höherer als erster Ordnung:

Waagrechte Linie $y = const$ und Kurve dadurch unterscheiden sich im Intervall dx "nicht":

sive, quod perinde est.

Genauer: rechne mit ersten Differentialen, und lasse sie am Ende der Rechnung gegen Null gehen.

Differentiale sind "nachmals zum Verschwinden gebrachte Größe".

Dieser Trick wohl von James Gregory, vor Newton.

Nicht mehr zu klären, wer von wem (mehr) gelernt hat:

Newton von seinem Lehrer Barrows, oder umgekehrt.

Dabei Barrows mehr geometrisch: Tangentenmethode,

Newton mehr analytisch: binomische Entwicklung.

Neutral: Differentiation bei Barrows und Newton gleichwertig.

Aber bei Newton klarer: Differentiation ist Umkehrung von Integration.

(In seiner Sprache: Tangentensuche von Quadratur.)

Die Integration von $1/x$ schafft Newton nicht.

Leibniz 1673 in London. Sieht Newtons Artikel nicht.

Kauft aber Barrows Buch (Brief an Herrn Oldenburg)!

Ist, mit Randbemerkungen versehen, in Lebniz' Nachlass gefunden worden.

Wohl auch gleich gelesen: in Leibniz' ersten Schriften mit unendlich kleinen Dreiecken (Abszissen- und Ordinatenzuwachs von Kurven) finden sich ähnliche Symbole wie bei Barrows.

Leibniz selbst sagt aber, die Idee dieses charakteristischen Dreiecks von Pascal zu haben.

Leibniz stellt Einfluß von Barrows auf seine Ideen in Abrede.

Leibniz sagt, Barrow habe nichts über Fermat hinausgehendes geleistet für das Tangentenproblem.

Einführung von $\int$ und d durch Leibniz 1675.

Newton hatte seit 1671 streng geheim etwas ähnliches.

Cantors etwas verwegene Behauptung:

Grundlegendes Wissen zur Infinitesimalrechnung schon vor Newton und Leibniz vorhanden.

Weiterer Fortschritt hing von zweckmäßiger Bezeichnung ab.

Und diese stammt eindeutig von Leibniz.

Zurück zu Newton: Hauptaufgabe der Fluxionsrechnung:

Geschwindigkeit zu bestimmten bei bekanntem durchlaufenen Weg.

Und umgekehrt.

Def $Fluxionen$: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Der Punkt von Newton selbst.

Für Newton hat jedes Fluxion mechanischen Sinn.

Von Newton stammt der Gedanke, daß nur Differentialquotienten vorkommmen sollten, dy/dx usw.

Er unterscheidet dann drei Glgs.Arten:

heutige Namen dafür: Diff.quotient einer Funktion; gewöhnliche DGL; partielle DGL.

Newtons Problem: er entwickelt alle Funktionen in unendliche Reihen, integriert gliedweise elementar. Weiß aber nicht, was mit $1/x$ anzufangen sei.

Ausweg: Koordinatenverschiebung: ersetze

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{b+x}$$

und entwickle den neuen Ausdruck selbst wieder in eine Reihe.

Ebenfalls Newtons Idee: An Extrema verschwinden die Fluxionen.

Damit Auffinden von Maxima und Minima möglich.

Newton findet auch Kurvenkrümmung:

lege Kreise verschiedenen Radius an einen Kurvenpunkt.

Unter diesen gibt es genau einen "nächsten" zur Kurve:

in infinitesimaler Umgebung des Berührungspunkts gibt es keinen weiteren Kreis $zwischen$ der Kurve und eben diesem Kreis.

Newton gibt geometrischen Beweis dafür.

Detektivarbeit: 1673 erscheint Huygens Buch zu geometrischen Differentialproblemen. Er schickt es Newton, dessen Dankesbrief ist erhalten. In Newtons Methodus fluxionum, die in der Hauptsache vorher entwickelt worden waren, tauchen dann eindeutige Parallelen zu Huygens auf: dieselben Kurvenarten (Zykloide usw) werden in derselben Reihenfolge bearbeitet. Ausmaß der Veränderungen ist nicht feststellbar. Aber Cantor hält fest: wegen der Veränderungen "fällt die Beweiskraft für das Wissen Newtons in früher Zeit."

Nochmals: auf den Brief Newtons an Leibniz, in dem ersterer sich Priorität sichern will durch unbewiesene Nennung vieler Ergebnisse (Produktregel usw), antwortet Leibniz am gleichen Tag mit expliziten Beweisen dieser Ergebnisse. Er hatte sie also selbst.

Veröffentlichung der Newtonschen Briefe an Leibniz von 1676 und früher erst 1693.

Verwunderung bei Johann Bernoulli: ist doch Leibniz' Diff.rechnung, nur mit Pünktchen über den Größen statt d davor.

Spätere Arbeiten von Leibniz und Newton

Leibniz führt 1687 in einem *philosophischen* Streit mit Mallebranche den Begriff der Stetigkeit ein:

“Wenn die Voraussetzungen sich einander beständig nähern und sich schließlich ineinander verlieren, so müssen die Folgen, das was herauskommt, das gleiche tun.”

Dieses Gesetz benutzt er in Streitigkeiten über das Unendlichkleine in der Diff.rechnung.

Das Stetigkeitsgesetz sei das Grundgesetz der Infinitesimalrechnung.

Er geht damit den Newtonschen Weg, daß Diff.quotienten dy/dx wohldefiniert sind, auch wenn dx und dy Denkschwierigkeiten machen.

In der Einleitung seiner Diff.Schrift von 1711 schreibt Newton, was wohl der größte Unterschied zwischen ihm und Leibniz ist:

“Ich betrachte hier die mathematischen Größen nicht als aus kleinsten Teilen bestehend, sondern als durch eine stetige Bewegung beschrieben. Linien werden beschrieben und im Beschreiben erzeugt nicht etwa durch Aneinanderfügen von Teilen, sondern durch stetige Bewegung von Punkten, Oberflächen desgleichen durch Bewegung von Linien, Körper durch Bewegung von Oberflächen, Winkel durch Bewegung von Seiten, Zeiten durch ihren stetigen Fluß."

Das stimmt aber mit seinem Beweis der Drehimpulssatzes in den Principia nicht recht überein.

Und weiter, jetzt zur allgemeinen Geschichte:

"Ich suchte eine Methode, die Größen aus den Geschwindigkeiten der Bewegungen oder der Zuwächse, mittels deren sie entstehen, zu bestimmen, und indem ich diese Geschwindigkeiten der Bewegungen oder der Zuwächse Fluxionen nannte und die erzeugten Größen Fluenten, verfiel ich allmählich in den Jahren 1665 und 1666 auf die Fluxionsmethode."

"Fluxionen verhalten sich so nahezu als möglich wie die in gleichen kleinsten Zeitteilchen erzeugten Vermehrungen der Fluenten."

Leibniz führt 1692 den Begriff der krummlinigen Koordinate ein:

“Unter Koordinaten verstehe ich nicht nur Gerade, sondern beliebige Kurven, wenn nur ein Gesetz vorhanden ist, nach welchem, sofern ein bestimmter Punkt einer als Koordinate gegebenen Linie gleichfalls gegeben ist, diesem Punkte entsprechend eine Linie gezogen werden kann, welche dem anderen Systeme der als Koordinaten gewählten angehört.”

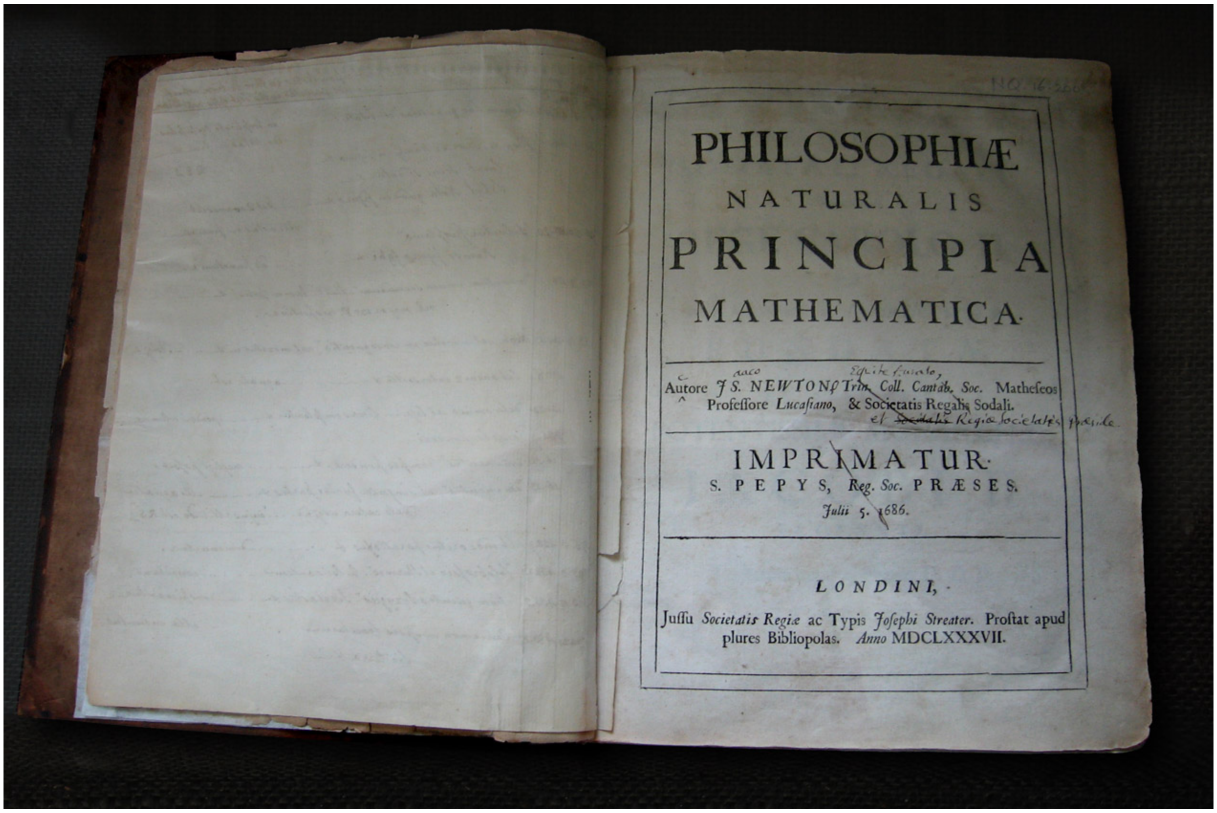
Vielleicht klarer nach dem lateinischen Original (Cantor, S. 211):
“Ego sub ordinatim ductis non tantum rectas, sed et curvas lineas qualescunque accipio, modo lex habeatur, secundum quam dato lineae cuiusdam datae (tanquam ordinatricis) puncto, respondens ei puncto linea duci possit, quae una erit ex ordinatim ducendis seu ordinatim positione datis.”

Abschließend: es sei hier nicht eingegangen auf den Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz ab 1699.

Dazu mehr als 40 (!) Seiten in Cantor.

Trägt zur Klärung der mathematischen Begriffe nichts bei.

Teil II: Die Principia Mathematica



Seit 1665 “hat” Newton Fluxionsrechnung.

1686 erster Teil der Principia druckfertig.

Doch in der Principia kein $\dot{x}$.

Infinitesimale Dreiecke dort sind durchaus aus älterer Infinitesimalrechnung bekannt.

Der Gang der Principia:

Erste Seiten: Definition.

Def II: quantity of motion is velocity (times) quantity of matter.

Also quantity of motion = Impuls.

Dann Def von Zentralkräften: wirken entlang Verbindungslinie.

Dann mehrere Seiten reiner Text über "true motion" usw.

Neues Kapitel: Axioms or laws of motion

Law II: The change of motion is proportional to the motive force impressed.

Korollar: Kräfteparallelogramm (mit Bild)

Wieder mehrere Seiten Textdiskussion (Inertialsystem! usw.)

Dann Beginn von "Book One: The Motion of Bodies"

Cantor zitiert ausführlich die ersten 11 Lemmas Newtons. Daher auch hier.

[Folien der Seiten 25 bis 30]

[Folien des Originaldrucks]

Es folgt ein längeres Scholium (einige Seiten).

Dann schlagartig: Section II

The Determination of Centripetal Forces

Beweis des Keplerschen Flächensatzes.

[Folien der Seiten 32 und 33]

[Folien des Originaldrucks]

Das Ellipsengesetz ist um einiges schwieriger:

Section III. Proposition 11. Problem 6.

[Folien der Seiten 42 und 43]

[Folie des Originaldrucks]

Dann sehr lange über:

Bestimmung von Kegelschnitten (Ellipse, Hyperbel) bei vorgegebenen Bahnelementen

(z.B. Brennpunkt gegeben u.a., wie lautet Bahn?)

(oder: welche Ellipse hat diese und jene Tangenten?)

Dann: Bahngeschwindigkeiten.

Bahnbewegungen ausgedehnter Körper.

Section XII:

The Attractive Forces of Spherical Bodies.

[Folien der Seiten 131ff]

Prop 70, Theorem 30

Prop 71, Theorem 31

Prop 72, Theorem 32

Prop 73, Theorem 33

Prop 74, Theorem 34

Zusammenfassung Buch I: (S steht für Section)

S 1: 11 Differentiallemma

S 2: Flächensatz. Ellipsenbahn mit Kraftzentrum im Ellipsenzentrum (nicht Brennpunkt)

S 3: Keplers Ellipsengesetz. Allgemeine Kegelschnitte

S 4: Bestimmung der Kegelschnitte bei gegebenem Brennpunkt

S 5: Bestimmung der Kegelschnitte durch gegebene Punkte

S 6: Bestimmung der Bahngeschwindigkeit

S 7: Geometrie der Bahngeschwindigkeit: Vgl mit Abrollbahnen usw.

S 8: Bahneigenschaften bei beliebigen Zentralkräften

S 9: Bewegung von Massen in Orbits (Ellipsen), die sich selbst drehen

S 10: Pendelbewegung. Zykloidenpendel

S 11: Bewegung von ausgedehnten Körpern umeinander bei Zentralkräften. Qualitative Gezeitentheorie

S 12: Anziehung von Sphären

S 13: Anziehung von nichtsphärischen Körpern

S 14: Bewegung kleiner Körper im Zentralkraftfeld ausgedehnter Körper

Buch II: Bewegung in Medien mit Reibung. Hydrodynamik.

Buch III: Himmelsmechanik, samt Gezeitenrechnungen.

Berühmte Stelle im zweiten Buch:

"In Briefen, welche ich vor etwa 10 Jahren mit dem sehr gelehrten Mathematiker G.G. Leibniz wechselte, zeigte ich demselben an, dass ich mich im Besitze einer Methode befände, nach welcher man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lasse sich dieselbe eben so gut auf irrationale wie rationale Grössen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte, welche meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg ich dieselbe. Der berühmte Mann autwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mitteilte, und welche von meiner kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen."

Newton bringt dann die Produktregel als Scholium.

Dennoch, die Fluxionsmethode wird auch weiterhin nicht verwendet.

Teil III: Humes Kritik am Kausalitätsgesetz

Berühmtes Zitat aus Kants Prolegomena [S. 260 der Akademieausgabe]

“Ich gestehe frei: die Erinnerung des David Hume war eben dasjenige, was mir vor vielen Jahren zuerst den dogmatischen Schlummer unterbrach und meinen Untersuchungen im Felde der spekulativen Philosophie eine ganz andere Richtung gab. Ich war weit entfernt, ihm in Ansehung seiner Folgerungen Gehör zu geben...”

Hume: Kausalität ist nur empirisch: Gewohnheit.

Ursache-Wirkung-Verknüpfung nur aus bisher bekannten Fällen.

Ausnahmen jederzeit möglich.

Kant: Kausalität ist, wie Raum und Zeit, a priori gegeben:

ein Denkschema, durch das wir die Sinnesdaten schicken.

Humes Hauptwerk: Treatise of Human Nature.

1739 im Alter von 28 Jahren veröffentlicht!

1736 bereits abgeschlossen.

(Jurastudium seit dem Alter von 12, mit 15 abgebrochen).

Wegbereiter des Utiliarismus.

Wichtige Arbeiten zur Nationalökonomie und zur englischen Geschichte.

Sein literarischer Nachlassverwalter: Adam Smith.

Untertitel des Treatise:

“An attempt to introduce the experimental method of reasoning into moral subjects.”

Keine direkte Bekanntschaft Humes (1711-1776) mit Kant (1724-1804).

Aber Bekanntschaft Humes mit Rousseau.

Aus W.G. Sebald “Logis in einem Landhaus”, S. 67.
“Anfang Januar 1766 reist Rousseau nach England. Dort, ganz in der Fremde, überwältigt ihn mehr und

mehr der immer in ihm latent gewesene und durch die Exilierung akut gewordene Verfolgungswahn. Seine Stimmung schwankt zwischen Niedergeschlagenheit und Exaltation. Ein gewisser J. Cradock berichtet in seinen 1828 in London veröffentlichten Literary and Miscellaneous Memoirs, daß Rousseau, obgleich er das Englische kaum verstand, bei einem Theaterbesuch, zu dem er von Garrick eingeladen war, so über die an diesem Abend gegebene Tragödie geweint und über die sich anschließende Komödie gelacht habe, daß er vollkommen außer sich geriet... Hume selber hatte einemal Gelegenheit, diese Stimmungsumschwünge zu beobachten, als Rousseau mit Verdächtigungen zu ihm kam und eine Stunde wortlos und finster in seinem Zimmer hin- und herging, nur um sich ihm dann auf einmal auf den Schoß zu setzen, ihm das Gesicht abzuküssen und ihn unter Tränen seiner ewigen Freundschaft und Dankbarkeit zu versichern. Danach dauerte es nicht mehr lang, bis ihm auch Hume als einer der hinterhältigsten Intriganten erschien, der danach trachtete, ihn um seinen Lebensunterhalt und seine Ehre zum bringen."

Zitate zum Kausalbegriff:

"And as the power, by which one object produces another, is never discoverable merely from their idea, 'tis evident *cause* and *effect* are relations, of which we receive information from experience, and not from any abstract reasoning or reflexion. [69:6-]

"I have already observe'd, that geometry, or the *art*, by which we fix the proportions of figures; tho' it much excels, both in universality and exactness, the loose judgments of the senses and imagination; yet never attains a perfect precision and exactness. Its first principles are still drawn from the general appearance of the objects; and that appearance can never afford us any security, when we examine the prodigious minuteness of which nature is susceptible." [70:3-]

"The reason why I impute any defect to geometry, is, because its original and fundamental principles are deriv'd merely from appearances; and it may perhaps be imagin'd, that this defect must always attend it, and keep it from ever reaching a greater exactness in the comparison of objects or ideas, than what our eye or imagination alone is able to attain."

Weitere Stellen, nachzulesen in gescannten Text auf der Homepage der Vorlesung (Schema: Seite, Zeilenanfang ($+$: vom Seitenanfang, $-$: vom Seitenende) – Zeilenende (wieder mit $+/-$).

[to do]

Teil IV: Kant

Leben

1724 bis 1804: Spätphase der Aufklärung

KdrV 1781/1787. Sturm auf die Bastille 1789

Heutiges Kant-Bild durch seine Spätphase bestimmt:

der pünktliche Spaziergänger.

In seinen 30er und 40er Jahren, während der russischen Besetzung Königsbergs, war Kant eifriger Salonbesucher.

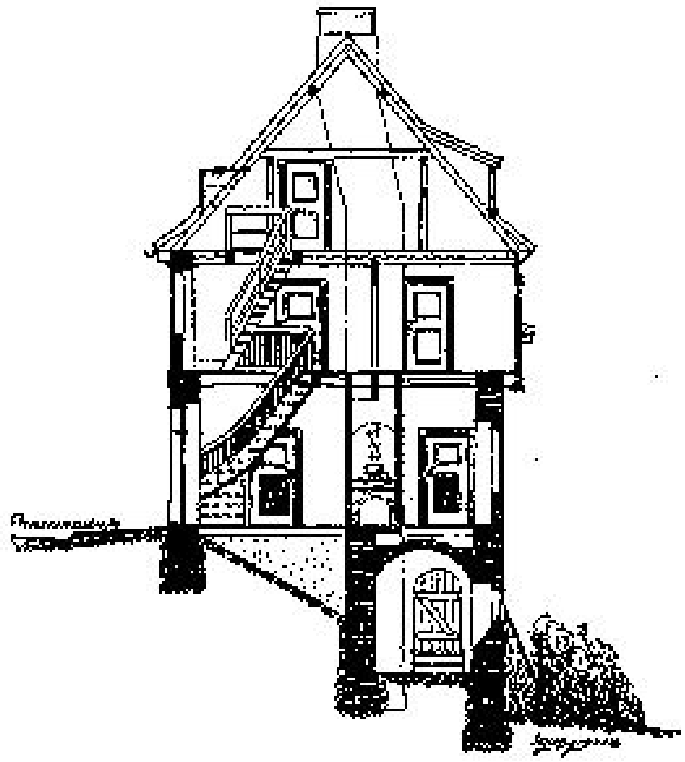
Critik der reinen Vernunft

von

Immanuel Kant

Professor in Königsberg.

Riga,
verlegts Johann Friedrich Hartknoch
1781.



Dann aber: lehnt Professuren in Erlangen, Jena und Halle ab, weil er sich Wegzug von Königsberg nicht vorstellen kann. Sein Hörergeld als Privatdozent reiche ihm aus.

Vergleiche mit Heidegger, der einen Ruf nach Berlin ablehnt, weil sein Denken in seiner Heimat-Landschaft wurzelt.

Mit 46 Jahren Professur in Königsberg.

11 Jahre später, 1781, erscheint die KkrV.

Recherche: angeblich schottische Vorfahren (Großvater). Kant aus Kent?

Sein Vater war Handwerker.

Sein Sprachstil

Angeblich mit Kleist vergleichbar.

Hypothese: an Rechtswissenschaften angelehnt (eben wie Kleist).

Wahrscheinlicher aber: lateinische Syntax im Deutschen.

Denn: (i) Latein war Kants zentrales Schulpensum.

(ii) Bis heute Unsicherheiten, welchen grammatischen Fall Kant an manchen Stellen meinte.

(iii) Starker Gebrauch von Pronomen.

Beliebte Zitate

"Der grösste Sinnesgenuss, der gar keine Einmischung von Ekel bei sich führt, ist, im gesunden Zustande, Ruhe nach der Arbeit." (Anthropologie)

Rückständige Fortsetzung. Gefühl der Lust und Unlust

Das Wohlgefallen (complacentia) ist der consensus [illegible] cum causalitate repraesentationum. [illegible] sich selbst zu erhalten und zu [illegible] complacentia [illegible] dieses aber das Object der Vorstellung hervorzubringen facultas appetitiva. + consensus cum

aliter + causalitas repraesentationum est vel subiectiva vel obiectiva: prior sensus complacentiae vel displicentiae — posterior appetitus facultas appetit. v. aversat. Das Gefühl der Lust

Causalitas subiectiva repraesentationis est conatus conservationis sui ipsius et repraesentationes vel sunt sensitivae vel intellectuales. [illegible] intellectual. Das [illegible] Vergnügen (voluptas [illegible]) [illegible] oder Wohlgefallen [illegible] Urtheilskraft, [illegible] reflexion [illegible] Vorstellung [illegible] — Geschmack —

Die intellectuelle Lust ist [illegible] subjectiv an der [illegible] Vorstellung [illegible] — [illegible] objectiv an [illegible] Object der Vorstellung ist und [illegible] (als noumenon) [illegible] Lust an der causalität des Verstandes und der Vernunft (oder [illegible]) an [illegible] Objects [illegible] die causalitaet [illegible] Vorstellung ist die Freyheit. [illegible] intellectuelle Lust [illegible] Gesetz der Vernunft [illegible]

[illegible] Urtheilskraft [illegible] intellectuelle [illegible] — [illegible] ästhetische Urtheilskraft [illegible] Geschmack.

Die Urtheilskraft ist [illegible] Vermögen, der Unterscheidungskraft der allgemeinen Regel [illegible] in Ansehung der [illegible] des Besonderen [illegible] (Judicium). [illegible] Schemata [illegible] Begriffe des Verstandes [illegible] Verstand [illegible] allgemein [illegible] Urtheilskraft [illegible] Schematisiren [illegible] Einbildungskraft [illegible]. Die Urtheilskraft [illegible] Auffassung eines Objects [illegible] Einbildungskraft in ihrer Freyheit [illegible] Gesetz des Verstandes [illegible] ist die ästhetische Urtheilskraft.

[illegible] $(a \pm a)(o)$

Lust — Unlust — Gleichgültigkeit. Gut — Bös — adiaphor

“Die leichte Taube, indem sie im freien Fluge die Luft teilt, deren Widerstand sie fühlt, könnte die Vorstellung fassen, dass es ihr im luftleeren Raum noch viel besser gelingen werde.”

(Zu den angeblich langen Kant-Sätzen: versuchen Sie diesen Satz kürzer zu sagen.)

“Die am Himmelfahrtstage durch Versalzung des Butterfisches früh morgendes fehlgeschlagene Kocherei muss nicht mehr vorkommen.” (Handschriftlicher Nachlass)

Im unteren Stockwerk seines Hauses befand sich sein Hörsaal.

Ein Satz: das Programm der KdrV

Nichts, als die Nüchternheit einer strengen, aber gerechten Kritik, kann von diesem dogmatischen Blendwerke, das so viele durch eingebildete Glückseligkeit, unter Theorien und Systemen, hinhält, befreien, und alle unsere spekulative Ansprüche bloß auf das Feld möglicher Erfahrung einschränken, nicht etwa durch schalen Spott über so oft fehlgeschlagene Versuche, oder fromme Seufzer über die Schranken unserer Vernunft, sondern vermittelst einer nach sicheren Grundsätzen vollzogenen Grenzbestimmung derselben, welche ihr nihil ulterius mit größester Zuverlässigkeit an die herkulische Säulen heftet, die die Natur selbst aufgestellet hat, um die Fahrt unserer Vernunft nur so weit, als die stetig fortlaufende Küsten der Erfahrung reichen, fortzusetzen, die wir nicht verlassen können, ohne uns auf einen uferlosen Ozean zu wagen, der uns unter immer trüglichen Aussichten, am Ende nötigt, alle beschwerliche und langwierige Bemühung, als hoffnungslos aufzugeben.

1. Kausalität a priori

Von den Kursteilnehmern vorgeschlagene mögliche "Aussagen a priori":

(1) Kinematik (reine Raum-Zeit-Lehre)

(2) Freier Fall

(3) Es gibt Temperaturunterschiede

(4) [to do]

(5) [to do]

2. Raum und Zeit a priori

Anmerkungen zum Vortrag:

Wichtige Unterscheidung zwischen transzendent und transzendental bei Kant.

Kants Mantra: “Bedingung der Möglichkeit” (z.B. von Erfahrung)

Der Sinn dieses Ausdrucks erschließt sich z.B. im Zitat:

“*Bedingung*, unter der uns sinnliche Anschauung *möglich* ist.”

Diskussion, ob die Aussage “es gibt Temperaturunterschiede” a priori sein kann.

Diskussion, ob man einen leeren Raum ohne Gegenstände vorstellen kann.

Macht “die Existenz” eines Dreieicks, einer Linie, eines Punktes den Raum schon “nicht-leer”?

Dazu Hegel [Zitat wo?]: [to do]

Diskussion, ob Kant Beweise liefert oder nur “in sich schlüssige” Aussagen.

Teilnehmerbefragung, ob Geometrie in Zukunft ein Teil der Algebra sein wird (keine Raumanschauung erforderlich in Beweisen) ergibt:

nahezu genau 50% vs 50%.

Kants Schrift “Über die Lage der Gegenstände im Raum”:

Diese diskutiert nicht primär den Raum, sondern Koordinatenwahl.

Ähnliches auch bei Heidegger, Sein und Zeit, S. :

[to do]

Hier werden also sphärische Polarkoordinaten $r\theta\phi$ als “natürlich” betrachtet.

Kant diskutiert in dieser Schrift Unterschied zwischen linker und rechter Hand, die doch völlig gleich aufgebaut seien.

Dazu Chiralität und “chiral algebra” in moderner Physik.

Diskussion, warum Raum zum äußeren Sinn, Zeit zum inneren Sinn gehört.

Danach Textmarkierungen in KdrV (Reclam) gelesen, siehe “Texte” auf der homepage der Vorlesung.

3. Erfahrung und Erkenntnis a priori

Folglich ist uns keine Erkenntnis a priori möglich, als lediglich von Gegenständen möglicher Erfahrung. (KdrV, B 166)

Und wie sollte es auch möglich sein, durch die Einheit des Bewußtseins, die wir selbst nur dadurch kennen, daß wir sie zur Möglichkeit der Erfahrung unentbehrlich brauchen, über Erfahrung (unser Dasein im Leben) hinaus zu kommen...? (KdrV, B 420)

Die Einheit des Bewußtseins, welche den Kategorien zum Grunde liegt, wird hier für Anschauung des Subjekts als Objekts (!) genommen, und darauf die Kategorie der Substanz angewandt. Sie ist aber nur die Einheit im *Denken*, wodurch allein kein Objekt gegeben wird, worauf also die Kategorie der Substanz, als die jederzeit gegebene *Anschauung* voraussetzt, nicht angewandt, mithin dieses Subjekt gar nicht erkannt werden kann. (KdrV, B 421)

4. Der kosmologische Beweis

5. Kants Lehre vom Ich

Wenn ich mit dem *intellektuellen Bewußtsein* meines Daseins, in der Vorstellung *Ich bin*, welche alle meine Urteile und Verstandeshandlungen begleitet, zugleich eine Bestimmung meines Daseins durch *intellektuelle Anschauung* verbinden könnte, so wäre zu derselben das Bewußtsein eines Verhhältnisses zu etwas außer mir nicht notwendig gehörig. Nun aber jenes intellektuelle Bewußtsein zwar vorangeht, aber die innere Anschauung, in der mein Dassein allein bestimmt werden kann, sinnlich und an Zeitbedinguung gebunden ist, diese Bestimmung aber, mithin die innere Erfahrung selbst, von etwas Beharrlichem, welches in mir nicht ist, folglich nur in etwas außer mir, wogegen ich mich in Relation betrachten muß, abhängt: so ist die Realität des äußeren Sinnes mit der des innern, zur Möglichkeit einer Erfahrung überhaupt, notwendig verbunden: d. i. ich bin mir eben so sicher bewußt, daß es Dinge außer mir gebe, die sich auf meinen Sinn beziehen, als ich mir bewußt bin, daß ich selbst in der Zeit bestimmt existiere. (KdrV, B XL)

Also nur dadurch, daß ich ein Mannigfaltiges gegebener Vorstellungen *in einem Bewußtsein* verbinden kann, ist es möglich, daß ich mir die *Identität des Bewußtseins in diesen Vorstellungen* selbst vor-stelle. (KdrV, B 133)

Hier ist nun der Ort, das Paradoxe, was jedermann bei der Exposition der Form des inneren Sinnes auffallen mußte (§6), verständlich zu machen: nämlich wie dieser auch so gar uns selbst, nur wie wir uns erscheinen, nicht wie wir an uns selbst sind, dem Bewußtsein darstelle, weil wir nämlich uns nur anschauen wie wir innerlich *affiziert* werden, welches widersprechend zu sein scheint, indem wir uns gegen uns selbst als leidend verhalten müßten. (KdrV, B 152)

...mithin, wenn wir von den letzteren einräumen, daß wir dadurch Objekte nur so fern erkennen, als wir äußerlich affiziert werden, wir auch vom inneren Sinne zugestehen müssen, daß wir dadurch uns selbst nur so anschauen, wie wir innerlich *von uns selbst* affiziert werden, d. i. was die innere Anschauung betrifft, unser eigenes Subjekt nur als Erscheinung, nicht aber nach dem, was es an sich selbst ist, erkennen. (KdrV, B 156)

...und ich habe also demnach keine *Erkenntnis* von mir *wie ich bin*, sondern bloß wie ich mir selbst *erscheine*. Das Bewußtsein seiner selbst ist also noch lange nicht ein Erkenntnis seiner selbst. (KdrV, B 158)

...und ich existiere als Intelligenz, die sich lediglich ihres Verbindungsvermögens bewußt ist, in Ansehung des Mannigfaltigen aber, das sie verbinden soll, einer einschränkenden Bedingung, die sie den inneren Sinn nennt, unterworfen, jene Verbindung nur nach Zeitverhältnissen, welche ganz außerhalb den eigentlichen Verstandesbegriffen liegen, anschaulich machen, und sich daher selbst doch nur erkennen kann, wie sie, in Absicht auf eine Anschauung (die nicht intellektuell und durch den Verstand selbst gegeben sein kann), ihr selbst bloß erscheint, nicht wie sie sich erkennen würde, wenn ihre *Anschauung* intellektuell wäre. (KdrV, B 158)

Das Bewußtsein meiner selbst in der Vorstellung *Ich* ist gar keine Anschauung, sondern eine bloß *intellektuelle* Vorstellung der Selbsttätigkeit eines denkenden Subjekts. Daher hat dieses Ich auch nicht das mindeste Prädikat der Anschauung, welches, *als beharrlich*, der Zeitbestimmung im inneren Sinne zum Korrelat dienen könnte: wie etwa *Undurchdringlichkeit* an der Materie, als *empirischer* Anschauung, ist. (KdrV, B 278)

...wir, die wir so gar uns selbst nur durch innern Sinn, mithin als Erscheinung, kennen... (KdrV, B 334)

Ich, als denkend, bin ein Gegenstand des innern Sinnes... Dasjenige, was ein Gegenstand äußerer Sinne ist, heißt Körper. (KdrV, B 400)

Nun haben wir aber in der inneren Anschauung gar nichts Beharrliches, denn das Ich ist nur das Bewußtsein meines Denkens. (KdrV, B 412)

...im Bewußtsein meiner Selbst beim bloßen Denken bin ich das *Wesen selbst*, von dem mir aber freilich dadurch noch nichts zum Denken gegeben ist. Der Satz aber, Ich denke, so fern er so viel sagt, als: *ich existiere denkend*, ist nicht bloße logische Funktion, sondern bestimmet das Subjekt (welches denn zugleich Objekt ist) in Ansehung der Existenz, und kann ohne den inneren Sinn nicht stattfinden, dessen Anschauung jederzeit das Objekt nicht als Ding an sich selbst, sondern bloß als Erscheinung an die Hand gibt. (KdrV, B 429)

Die eigentliche Moralität der Handlungen (Verdienst und Schuld) bleibt uns daher, selbst die unseres eigenen Verhaltens, gänzlich verborgen. Unsere Zurechnungen können nur auf den empirischen Charakter bezogen werden. (KdrV, B 579)

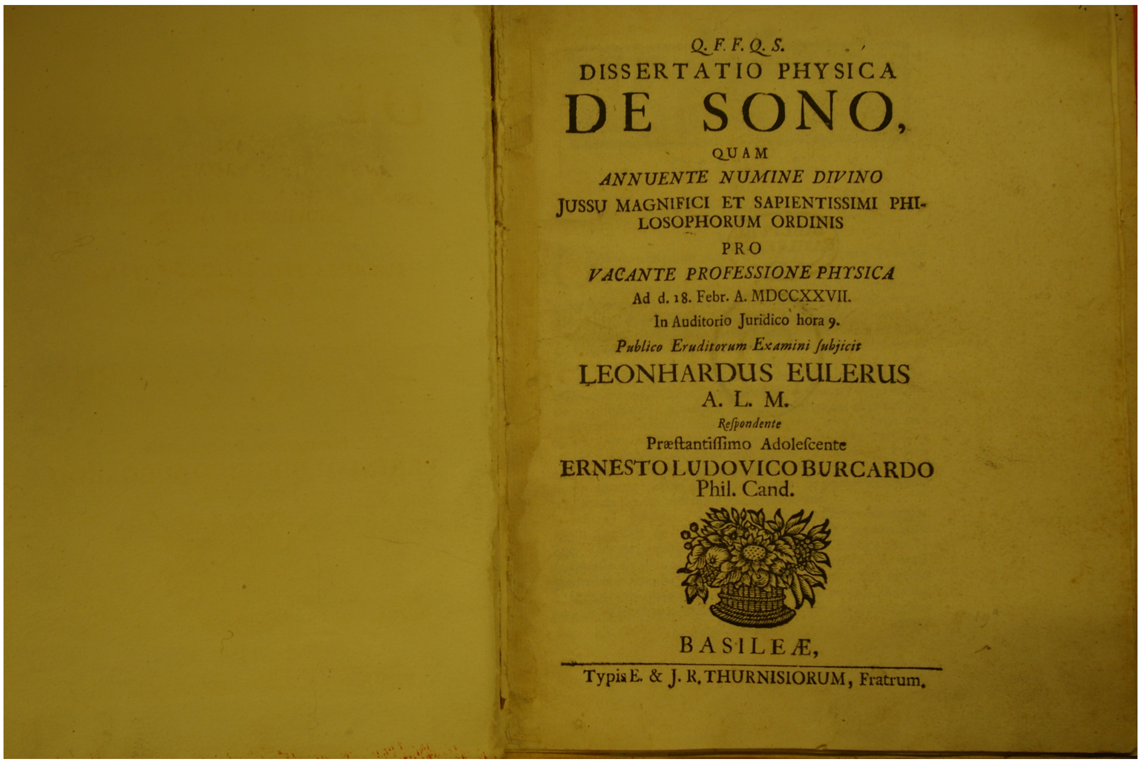
Gleichwohl ist nichts natürlicher und verführerischer als der Schein, die Einheit in der Synthesis der Gedanken für eine wahrgenommene Einheit im Subjekte dieser Gedanken zu halten. (KdrV, A 402)

6. Kants Freiheitslehre

Nach Prolegomena, Seite 112 bis 116.

Teil V: Variationsrechnung

Die folgenden Bilder sind aufgenommen in einer Ausstellung zu Eulers 300. Geburtstag in der Universitätsbibliothek Basel.


Q. F. F. Q. S.
DISSERTATIO PHYSICA
DE SONO,
QUAM
ANNUENTE NUMINE DIVINO
JUSSU MAGNIFICI ET SAPIENTISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS
PRO
VACANTE PROFESSIONE PHYSICA
Ad d. 18. Febr. A. MDCCXXVII.
In Auditorio Juridico hora 9.
Publico Eruditorum Examini subjicit
LEONHARDUS EULERUS
A. L. M.
Respondente
Præſtantiſſimo Adoleſcente
ERNESTO LUDOVICO BURCARDO
Phil. Cand.

BASILEÆ,
Typis E. & J. R. THURNISIORUM, Fratrum.

inter eruditos. Tertio ex obſervationibus illis condi debere exiſtimat Tabulas varii generis; alias, quibus ad ſingulos declinationum & inclinationum gradus inveſtigari poſſent loca, quibus illi obſervati ſunt; alias, quibus ad ſingulos longitudinum vel latitudinum gradus declinationum menſuræ inquiri & inclinationum; alias, quibus ad diverſa temporum intervalla declinationes inclinationesque; alias denique, quibus ad declinationum & inclinationum eodem in loco differentias inveniri tempora queant. Quarto denique inquirendum eſſe, an omnino pro diverſa locorum longitudine latitudineque & temporum ratione legem aliquam nobis intelligibilem ſervent declinationes illæ inclinationesque, an a particularibus in tellure vel mari cauſis, quas inveſtigare nobis non liceat, ita vel in ſolidum dependeant, vel in ordine ſuo, ſi quis fuerit generalis, adeo turbentur, ut nihil hac parte ſperare liceat.

Hæc cum diſſeruiſſet Vir doctiſſimus, Cel. *Jacobus Hermannus*, Matheſeos ſublimioris Profeſſor, qui inter Geometras primi ordinis dudum locum commeruit, vel his ipſis Actis teſtibus, ſuo & Collegarum nomine ſententiam dicturus, *Bulffingerianæ* calculum adjecit & nonnullas hiſtoricas notationes addidit. Huc pertinet, quod *Kepplerus* aperte profeſſus fuerit, eclipſes ſolares tutius, quam lunares ad longitudinum inventionem ducere, diſſentientibus *Cavallerio* & *Ricciolo*, ſed modum, quo id fieri poſſit, perſpicue docente *Joh. Dom. Caſſino*, recentiorum Aſtronomorum coryphæo. *Galilæum* longitudinum maris definiendarum negotio ſufficere crediſſe notitiam motus Satellitum Jovis & inventi ſui arcanum obtuliſſe primum *Philippo* III Hiſpaniarum Regi, mox Statibus confœderati Belgii, cum quibus negotium eo usque proceſſerit, ut torque aureo ab iis donatus fuerit &, niſi viri illi, quorum examini inventi indoles commiſſa erat, vivere deſiiſſent, *Martinus Hortenſius* ad *Galileum* oculorum uſu jam penitus privatum Florentiam miſſus fuiſſet, ut cum ipſo de invento & de modo id ad exitum & praxin deducendi tractaret. Cum inventum divulgaretur, *Morinum* & *Herigonium* id pro ſuo ediſſe, ſed *Caſſinum* ultimam manum addidiſſe, editis tabulis accuratis motuum Satellitum Jovis. Plures tamen eſſe monet ratio-

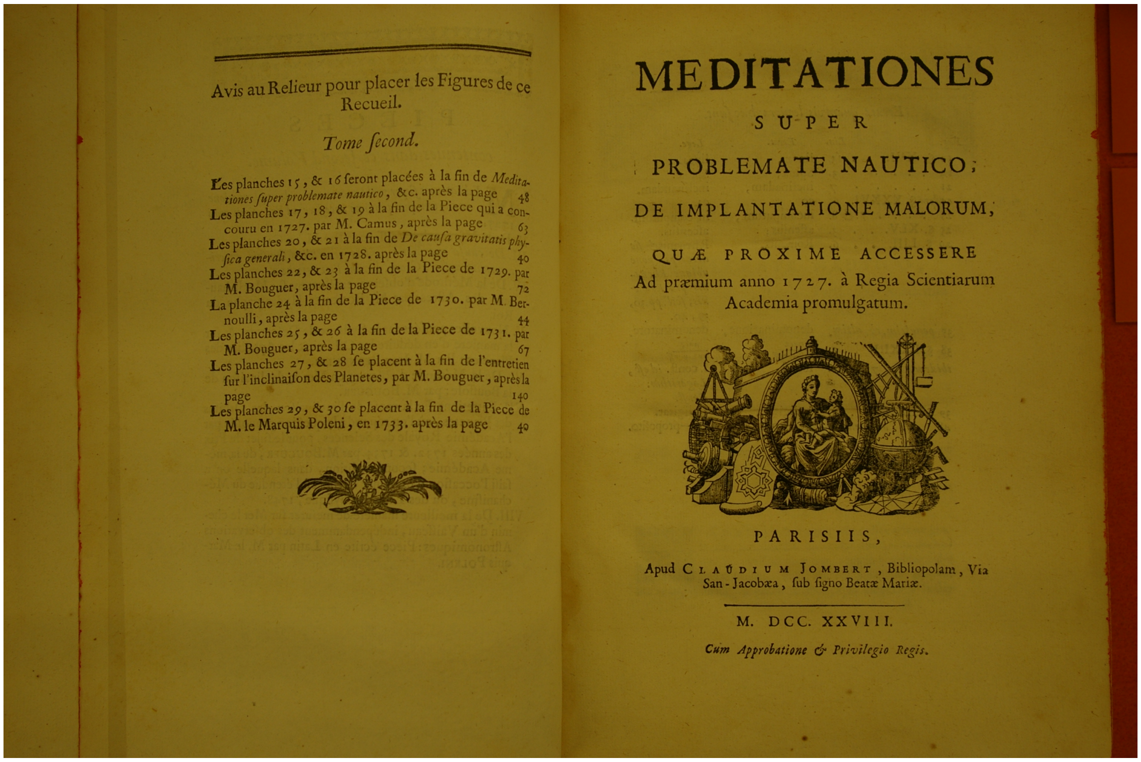
nes,

nes, cur ſcopo nautico non ſufficiat. *Hugenium* ultimis tandem vitæ ſuæ annis reperiſſe curvam, cujus beneficio horologiis æqualis motus conciliatur, qui nulla maris, vel navis agitatione turbari aut minui poſſit, quod in pendulis ſuis non ſatis caveri potuiſſe ipſemet agnoſcat. Hoc vero inventum cum illuſtri Autore interiiſſe. Id ſolum particularius de eo ſibi in Batavia agenti innotuiſſe, quod per libratorem aliquem ambobus ſuis terminis inſculptas habentem curvas æquales, in quibus ſacomata æqualia ultro citroque moverentur, horologio ſuo æquabilem motum nulla agitatione navis turbandum inducere voluerit. Manere igitur problema Solutore dignum: *Invenire horologium, cujus æqualis motus in agitatiſſima navi ſine interruptione conſervari poſſit.* Circa acum magneticam notatu dignum ipſi videtur monitum *Riccioli* ex mente *Guilielmi Perſall*, Equitis Angli, in Geographia Reformata relatum, quod artifices in fabricando toto verſorio ex ferro aut chalybe errent: unde omnes anomalias in experimentis declinationis magneticæ derivet.

CONSTRUCTIO LINEARUM ISOCHRONARUM in medio quocunque reſiſtente, Autore LEONHARDO EULERO, *Baſileenſi.*

NOtum eſt inter Geometras cycloidem ordinariam eſſe in medio non reſiſtente iſochronam ſeu tautochronam, vi gravitatis uniformiter verſus centrum infinite diſtans tendente. In medio quoque pro ſimplici celeritatum ratione reſiſtente, iſochronam eſſe eandem cycloidem, oſtendit Vir ſummus, Newtonus in principiis ſuis Philoſophiæ Naturalis Lib. II Prop. 26. Oppido autem miror, neminem adhuc quicquam de iſochronis in aliis medii reſiſtentis hypotheſibus, non imaginariis, quemadmodum ſunt hæ duæ dictæ, meditatum fuiſſe; cum tamen hæc egregia materia bene mereatur, quæ in ſcientiæ de motu corporum in medio reſiſtente augmentum profundius examinetur. Ego, quæ hac in re inveni, quasque feliciter detexi curvas tautochronas in medio quomodocunque reſiſtente, centro virium infinite di-

Z z ſtante



Avis au Relieur pour placer les Figures de ce Recueil.

Tome second.

Les planches 15, & 16 seront placées à la fin de *Meditationes super problemate nautico*, &c. après la page 48
Les planches 17, 18, & 19 à la fin de la Piece qui a concouru en 1727. par M. Camus, après la page 63
Les planches 20, & 21 à la fin de *De causa gravitatis physica generali*, &c. en 1728. après la page 40
Les planches 22, & 23 à la fin de la Piece de 1729. par M. Bouguer, après la page 72
La planche 24 à la fin de la Piece de 1730. par M. Bernoulli, après la page 44
Les planches 25, & 26 à la fin de la Piece de 1731. par M. Bouguer, après la page 67
Les planches 27, & 28 se placent à la fin de l'entretien sur l'inclinaison des Planetes, par M. Bouguer, après la page 140
Les planches 29, & 30 se placent à la fin de la Piece de M. le Marquis Poleni, en 1733. après la page 40

MEDITATIONES
SUPER
PROBLEMATE NAUTICO;
DE IMPLANTATIONE MALORUM,

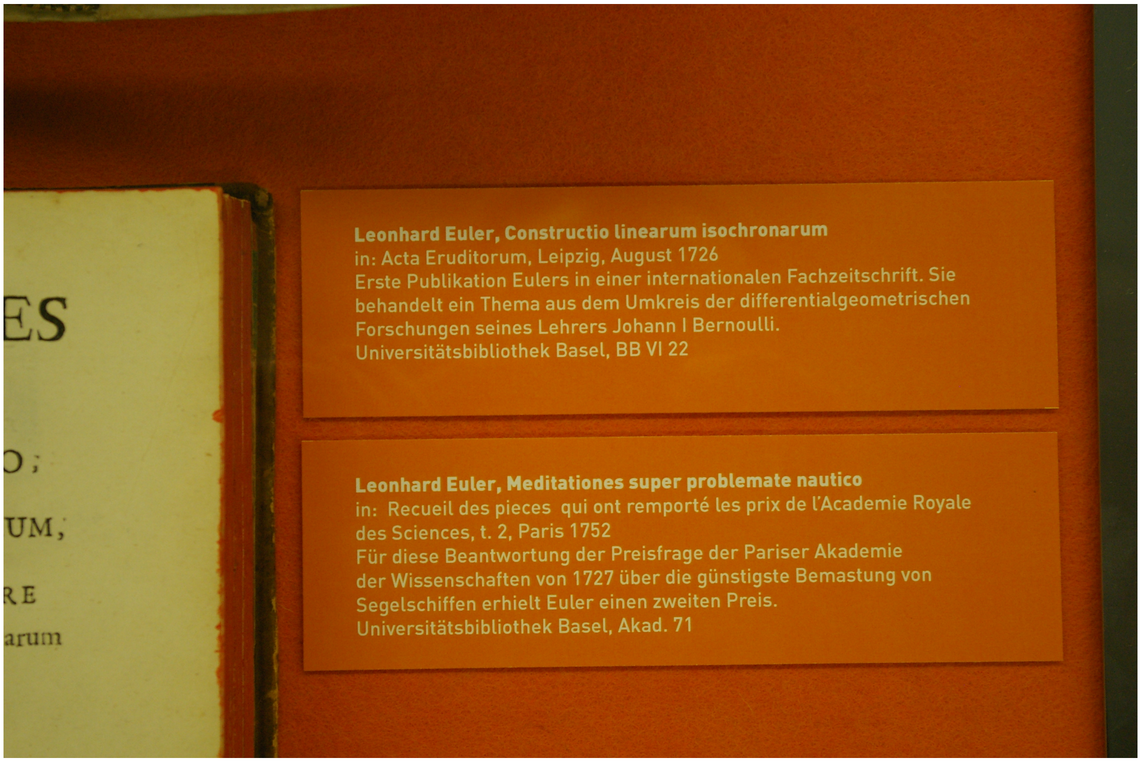
QUÆ PROXIME ACCESSERE
Ad præmium anno 1727. à Regia Scientiarum Academia promulgatum.

PARISIIS,

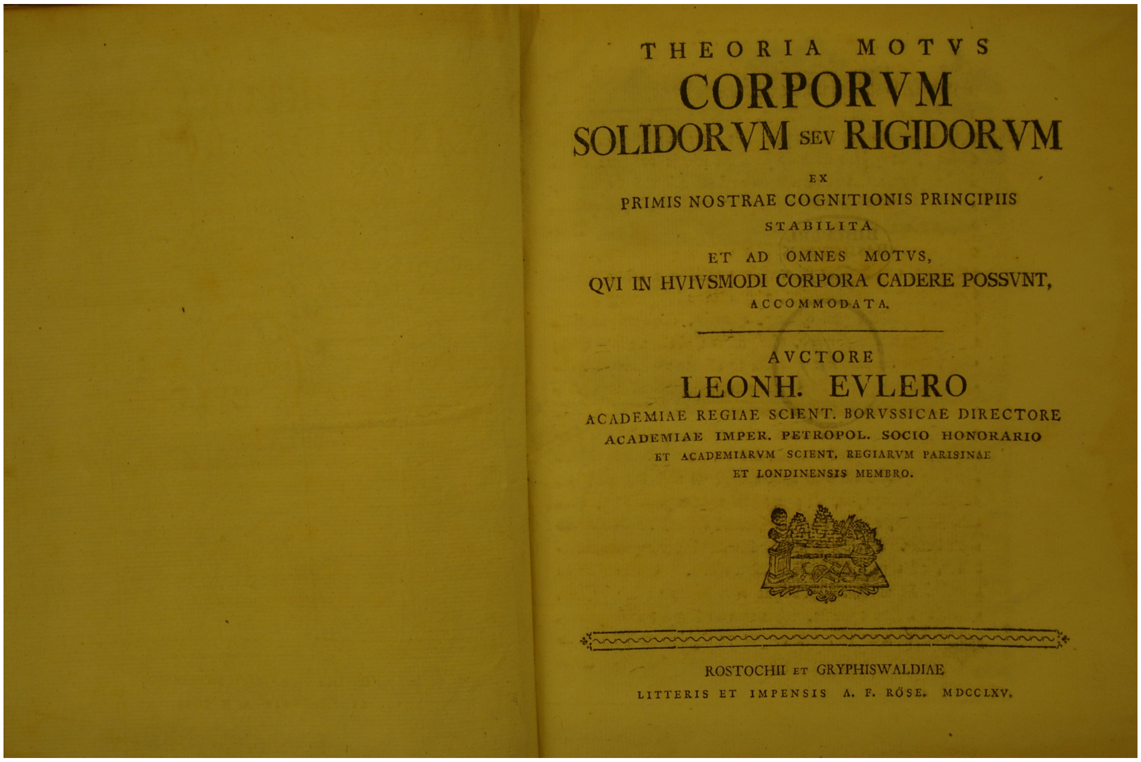
Apud CLAUDIUM JOMBERT, Bibliopolam, Via San-Jacobæa, sub signo Beatæ Mariæ.

M. DCC. XXVIII.

Cum Approbatione & Privilegio Regis.


Leonhard Euler, Constructio linearum isochronarum
in: Acta Eruditorum, Leipzig, August 1726
Erste Publikation Eulers in einer internationalen Fachzeitschrift. Sie behandelt ein Thema aus dem Umkreis der differentialgeometrischen Forschungen seines Lehrers Johann I Bernoulli.
Universitätsbibliothek Basel, BB VI 22
Leonhard Euler, Meditationes super problemate nautico
in: Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Academie Royale des Sciences, t. 2, Paris 1752
Für diese Beantwortung der Preisfrage der Pariser Akademie der Wissenschaften von 1727 über die günstigste Bemastung von Segelschiffen erhielt Euler einen zweiten Preis.
Universitätsbibliothek Basel, Akad. 71


Vue Perspective des Bords de la Nera en descendant la Riviere entre le Palais d'hyver de sa Majesté Imperiale et les Batimens de l'Accademie des Sciences a Petersburg.



THEORIA MOTVS

CORPORVM

SOLIDORVM SEV RIGIDORVM

EX

PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS

STABILITA

ET AD OMNES MOTVS,

QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,

ACCOMMODATA.

AVCTORE

LEONH. EVLERO

ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE

ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO

ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISINAE

ET LONDINENSIS MEMBRO.

ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE

LITTERIS ET IMPENSIS A. F. RÖSE. MDCCLXV.


Tab: Geogr:
EUROPÆ
ad emendatiora
quæ
ad huc prodierunt
exempla jussu
Acad: Reg Scient
et eleg :: Litt: Pruss.
descripta.
OCEANUS SEPTENTRIONALIS
MARE AQUITANICUM
AFRICÆ
MARE NIGRUM vel PONTUS EUXINUS

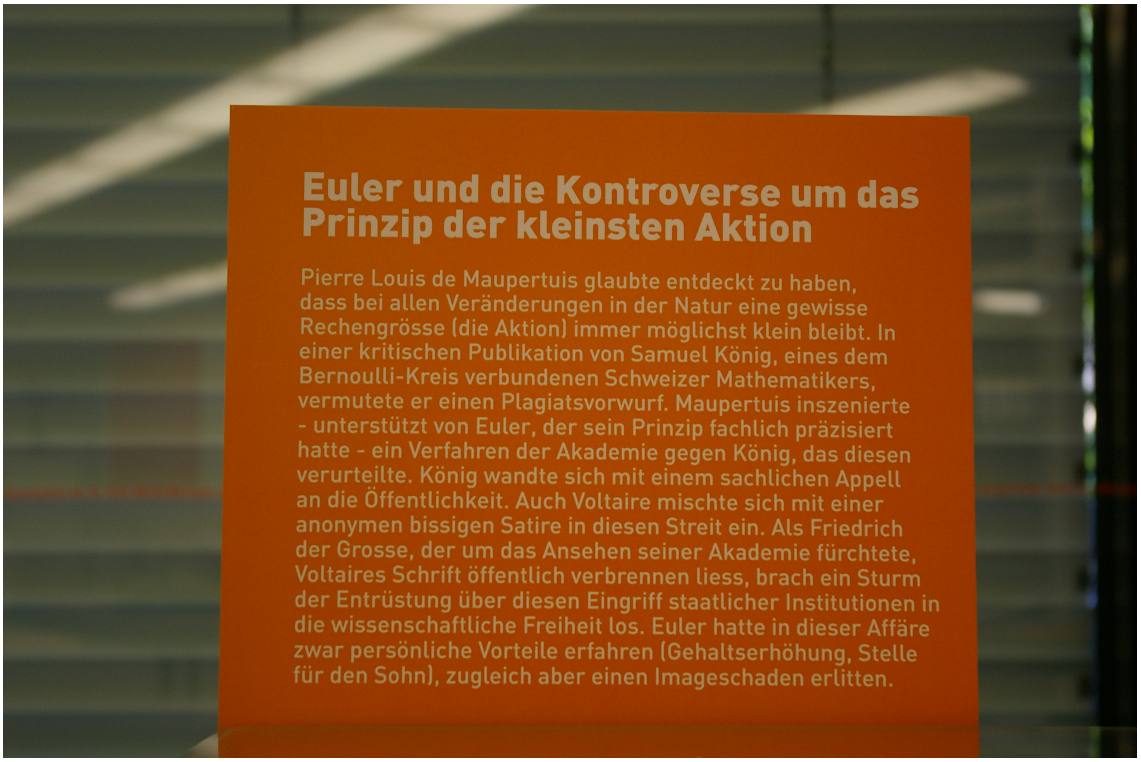
dulam parotidem & ramum ad nervum octavi paris, ganglion intercoſtale, ſcalenum muſculum, rectum internum, & longum colli, variis ſurculis excurrentem, variis aliis ad pharyngem & partes vicinas abit. *Tabula altera* Carotidis externæ iconem tertiam, quam Autor dedit, ſcilicet arterias faciei, ſiſtit. Arteriam labialem, quam alii cum *Winslovio* maxillarem externam dicunt, cum ramis variis, quos ante, quam ad maxillam inferiorem accedit, dimittit, cum jam præcedenti icone illuſtraverit; nunc ulteriores ejus ramificationes a latere menti proſequitur, eodem modo arteriam transverſalem faciei, ex temporali ortam, cum ſurculis variis depingit, arterias, circa orbitas erumpentes, addit, temporalem profundam & veram temporalem majorem, cum omnibus ramificationibus, ad frontem & ſinciput excurrentibus, deſcribit. Delineatio vero omnium harum Arteriarum faciei eo præſtantior redditur, quod plurimarum venarum faciei deſcriptiones adduntur. *Tabula tertia* Arteriarum, anterius in pectore ſitarum, delineationem ſiſtit, & venas primarias quoque addit. In pectore aperto & pericardium, & thymus, & quidem duplex, nec non majora vaſa venoſa, conſpiciuntur, omniaque in collum usque ad thyroideam glandulam producuntur, inprimis vero mammaria, thymica, pericardio-diaphragmatica & alia vaſa, nitide delineantur. *Tabula quarta* Arteriarum bronchialium binas figuras exhibet. In utrisque pulmones cum corde & mediaſtino exemti, aſperæ arteriæ, œſophagi, & aortæ, partes, quæ in thorace a parte poſteriori conſpiciuntur, delineantur. In prima figura aorta ad ſiniſtrum, in altera ad dextrum, latus reflectitur, quo vaſa utriusque lateris bronchialia eo melius conſpici poſſint. Venæ azygos nonnullæ ramificationes, & œſophagea, & intercoſtalia vaſa, ſimul adumbrantur. *Tabula quinta* Arteriarum meſentericarum delineationem ſiſtit. Colon cum meſocolo reclinata ſunt, ut omnis coli ambitus conſpiciatur, & duodeni etiam pars inferior transverſa appareat, inteſtina tenuia reſecta ſunt, ita ut vaſorum, tum arterioſorum, tum venoſorum, arcus, ex quibus rami ad tenuia ducuntur, conſpi-

ciantur. Coli vero vaſa omnia ad ipſum inteſtinum usque deducta exhibentur, & anaſtomoſes accurate indicantur. *Tabula ſexta* Arteriarum renalium & vicinarum iconem ſiſtit. Abdomen apertum oſtenditur, ſeparatis hepate, liene, ventriculo, inteſtinis cum annexis partibus, ita ut fornix diaphragmatis, renes cum ſuprarenalibus glandulis, & vaſa majora, in conſpectum prodeant, & ex his vaſa minora undique deducantur. Phrenica, capſularia, renalia, adipoſa, ſpermatica, tandem nonnulla quoque vaſa, in pelvi poſita, exhibentur.

DE UNIVERSALI PRINCIPIO ÆQUILIbrii & motus, in Vi viva reperto, deque nexu inter Vim Vivam & Actionem, utriusque Minimo, Diſſertatio, Autore SAM. KOENIGIO, Profeſſ. Traneq.

Cum nuper hic Aquisgrani, quo valetudinis cauſa veni, ab amico primum mihi referretur, (in noſtra Friſia enim talibus de rebus aut ſero, aut nunquam, auditur,) multum in Germaniæ quæri de *Minimo Actionis, tanquam univerſaliſſimo Mechanicæ principio*; cupide admodum ea, quæ hactenus acta ſunt, ex illo cognovi, multum ſane lætatus tam præclaris tentaminibus ad conſtituendum momentoſiſſimum Philoſophiæ naturalis locum, quem propter imperitum odium Virium vivarum, in hujus generis quæſtionibus plane regnantium, ſummo nobiliſſimæ ſcientiæ damno, vel negligi, vel contemni, jam dudum dolebam.

Quoniam itaque & ego multum quondam ſtudii temporisque in his rebus examinandis conſumſi, nonnullaque, ni fallor, ad liquidum perduxi, quorum naturali obſcuritate, etiam nunc poſt tantos progreſſus, ſolertiam acutiſſimorum Geometrarum retardari intelligo; non cunctandum putavi, in honorem Clari Viri, quem de his rebus maxime egiſſe audio, & a cujus libris non ſemel doctior diſceſſi, in hoc itineris otio, pauca, forte memoriæ adhuc inhærentia, his de rebus


Euler und die Kontroverse um das Prinzip der kleinsten Aktion
Pierre Louis de Maupertuis glaubte entdeckt zu haben, dass bei allen Veränderungen in der Natur eine gewisse Rechengrösse (die Aktion) immer möglichst klein bleibt. In einer kritischen Publikation von Samuel König, eines dem Bernoulli-Kreis verbundenen Schweizer Mathematikers, vermutete er einen Plagiatsvorwurf. Maupertuis inszenierte - unterstützt von Euler, der sein Prinzip fachlich präzisiert hatte - ein Verfahren der Akademie gegen König, das diesen verurteilte. König wandte sich mit einem sachlichen Appell an die Öffentlichkeit. Auch Voltaire mischte sich mit einer anonymen bissigen Satire in diesen Streit ein. Als Friedrich der Grosse, der um das Ansehen seiner Akademie fürchtete, Voltaires Schrift öffentlich verbrennen liess, brach ein Sturm der Entrüstung über diesen Eingriff staatlicher Institutionen in die wissenschaftliche Freiheit los. Euler hatte in dieser Affäre zwar persönliche Vorteile erfahren (Gehaltserhöhung, Stelle für den Sohn), zugleich aber einen Imageschaden erlitten.

I.

EXAMEN DES PREUVES DE L'EXISTENCE DE DIEU,

Tirées des Merveilles de la Nature.

SOIT que nous demeurions renfermés en nous-mêmes, ſoit que nous en ſortions pour parcourir les merveilles de l'Univers, nous trouvons tant de preuves de l'exiſtence d'un Etre tout puiſſant & tout ſage, qu'il eſt en quelque ſorte plus neceſſaire d'en diminuer le nombre que de chercher à l'augmenter : qu'il faut du moins faire un choix entre ces preuves, examiner leur force ou leur foibleſſe, & ne donner à chacune que le poids qu'elle doit avoir : car on ne peut faire plus de tort à la verité, qu'en voulant l'appuïer ſur de faux raiſonnemens.

Je n'examine point ici l'argument qu'on trouve dans l'idée d'un Etre infini : dans cette idée trop grande pour que nous la puiſſions tirer de notre propre fond, ou d'aucun autre fond fini, & qui paroît prouver qu'un Etre infiniment parfait exiſte.

Je ne citerai point ce conſentement de tous les hommes ſur l'exiſtence d'un Dieu, qui a paru une preuve ſi forte aû Philoſophe de l'ancienne Rome.* Je ne diſcute point, s'il eſt vrai qu'il y ait quelque peuple qui s'écarte des autres ſur cela ; ſi une poignée d'hommes qui penſeroient autrement que tous les autres habitans de la Terre, pourroient faire une exception ; ni ſi la diverſité qui peut ſe trouver dans les idées qu'ont de Dieu tous ceux qui admettent ſon exiſtence, empêcheroit de tirer grand avantage de ce conſentement.

Enfin je n'inſiſterai pas ſur ce qu'on peut conclure de l'intelligence que nous trouvons en nous-mêmes ; de ces etincelles de ſageſſe & de puiſſan-

* *Cicer. Tuſcul. I. 13.*

puiſſance que nous voyons répanduës dans les Etres finis, & qui ſuppoſent une ſource immenſe & eternelle d'où elles tirent leur origine.

Tous ces argumens me paroiſſent très-forts ; mais ce ne ſont pas ceux de cette eſpece que j'examine.

De tout tems ceux qui ſe ſont appliqués à la contemplation de l'Univers, y ont trouvé des marques de la ſageſſe & de la puiſſance de Celui qui le gouverne. Plus l'étude de la Phyſique a fait de progrès, plus ces preuves ſe ſont multipliées. Les uns frappés confuſément des caractères de Divinité qu'on trouve à tous momens dans la Nature ; les autres par un zele mal à propos religieux, ont donné à quelques preuves plus de force qu'elles n'en devoient avoir ; & quelquefois ont pris pour des preuves, ce qui n'en étoit pas.

Peut-être ſeroit-il permis de ſe relâcher ſur la rigueur des argumens, ſi l'on manquoit de raiſons pour établir un principe douteux & utile : mais ici les argumens ſont aſſez forts ; & le nombre en eſt aſſez grand, pour qu'on puiſſe en faire l'examen le plus rigide & le choix le plus ſcrupuleux.

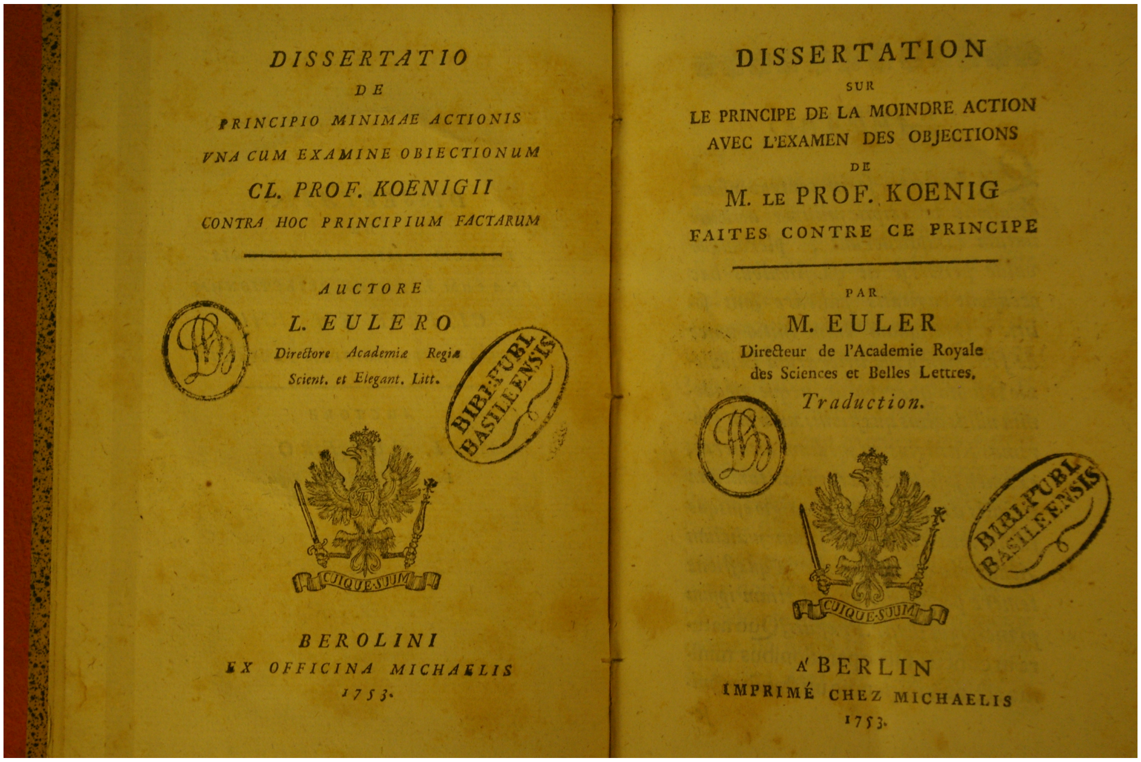
Je ne m'arrêterai point aux preuves de l'exiſtence de l'Etre ſuprême, que les Anciens ont tirées de la beauté, de l'ordre & de l'arrangement de l'Univers. On peut voir celles que Ciceron rapporte *, & celles qu'il cite d'après Ariſtote ** : Ils connoiſſoient trop peu la Nature, pour être en droit de l'admirer. Je m'attache à un Philoſophe, qui par ſes grandes découvertes étoit bien plus qu'eux à portée de juger de ces merveilles, & dont les raiſonnemens ſont bien plus précis que tous les leurs.

Newton paroît avoir été plus touché des preuves qu'on trouve dans la contemplation de l'Univers, que de toutes les autres qu'il auroit pu tirer de la profondeur de ſon eſprit.

Ce grand homme a cru *** que les mouvemens des corps celeſtes démon-

L l 3

* *Tuſcul. I. 28. & 29.*
** *De Nat. Deor. II. 37. 38.*
*** *Newt. Opticks III. Book. Query 31.*


DISSERTATIO
DE
PRINCIPIO MINIMAE ACTIONIS
VNA CUM EXAMINE OBIECTIONUM
CL. PROF. KOENIGII
CONTRA HOC PRINCIPIUM FACTARUM

AUCTORE
L. EULERO
Directore Academiæ Regiæ
Scient. et Elegant. Litt.

CUIQUE SUUM

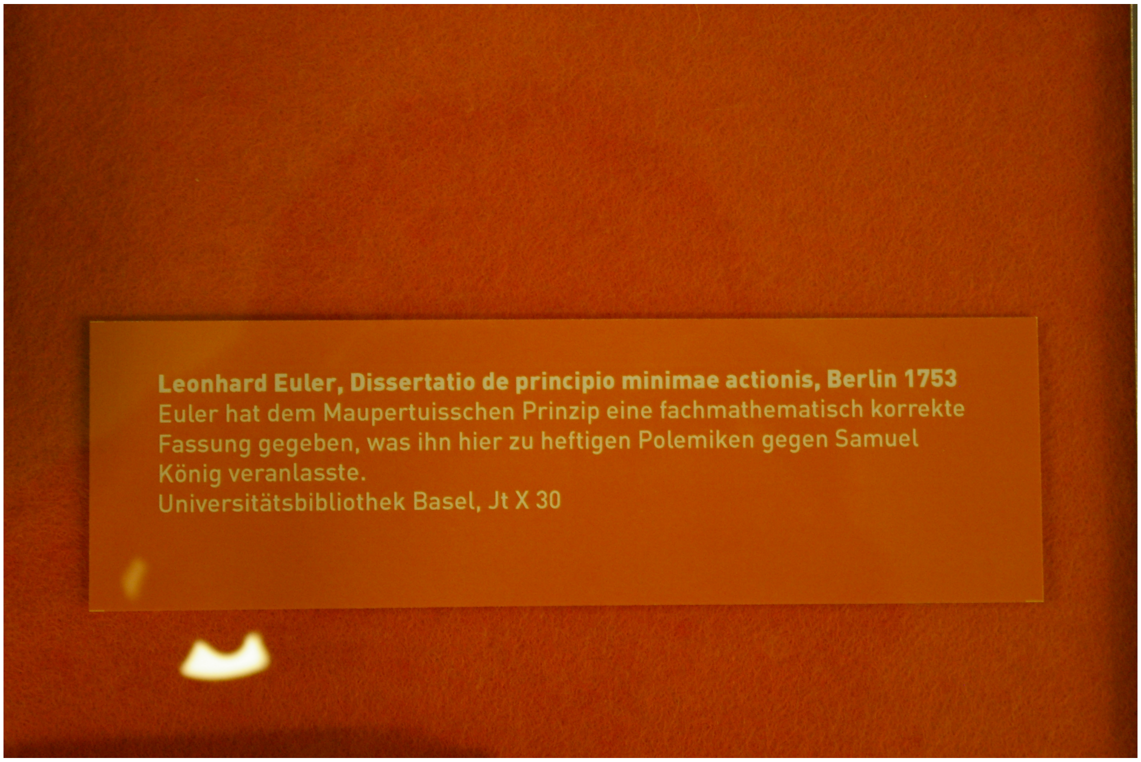
BEROLINI
EX OFFICINA MICHAELIS
1753.

DISSERTATION
SUR
LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION
AVEC L'EXAMEN DES OBJECTIONS
DE
M. LE PROF. KOENIG
FAITES CONTRE CE PRINCIPE

PAR
M. EULER
Directeur de l'Academie Royale
des Sciences et Belles Lettres.
Traduction.

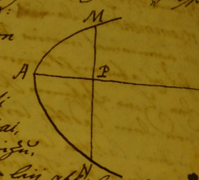
CUIQUE SUUM

A BERLIN
IMPRIMÉ CHEZ MICHAELIS
1753.


Leonhard Euler, Dissertatio de principio minimae actionis, Berlin 1753
Euler hat dem Maupertuisschen Prinzip eine fachmathematisch korrekte Fassung gegeben, was ihn hier zu heftigen Polemiken gegen Samuel König veranlasste.
Universitätsbibliothek Basel, Jt X 30

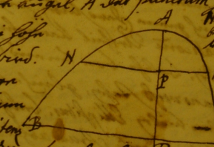

LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
LEONHARDI EULERI
COMMENTATIONES MECHANICAE
LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
LEONHARDI EULERI
MECHANICA
SIVE MOTUS SCIENTIA
ANALYTICE EXPOSITA
LEONHARDI EULERI
INTRODUCTIO
IN ANALYSIN INFINITORUM

wenn sie communiciret unterschiedliche können, um der Analysi ein großes
Licht geben. Das zweyte Problema ist dieses:



Invenire duas curvas AM, AN algebraicas non rectificabiles, sed quarum rectificatio a data quadratura pendeat; tales ut, ducta ad axem communem AP quacunque ordinata orthogonali MN, summa arcuum AM et AN possit algebraice exprimi. Wann diese Condition nicht hinzu gesetzet würde, daß die beyde Arcus einer einzigen abscissam AP haben sollten, so folgete die Solution gleich aus den Formulis, welche Dero Herr Vetter pro reducendis quadraturis ad rectificationes curvarum algebraicarum gegeben. Mit dieser Condition aber ist die Solution meiner Meinung nach sehr schwehr, und kan ich, obgleich meine Solution general ist, dennoch keine curvas simplices satisfacientes geben.

Dieses Problema muß auch möglich seyn, daß man wann die eine curva AM gegeben ist, die andere AN finden soll, so daß AM+AN rectificabel ist. Ich habe nur diesen Casum betrachtet, wann AM eine Parabola ist, habe aber die andere Curvam nicht finden können. In Schreibung meiner Mechanic bin ich auch eine Aequation gefallen, welche quam proxime die Natur der projectoriae in Aere exprimirt. Es sey BNAMC die Via einer Stückkugel, A das punctum summum, AD eine Vertical linie. b sey die Höhe aus welcher die Celeritas in A generiret wird. und c die Höhe, aus welcher diejenige Celeritas entspringt, mit welcher wann sich die Kugel bewegt, die Resistenz der Vi gravitatis gleich ist. g ist zu 1 wie die Schwehre der Kugel in aëre, zu ihrer wahren Schwehre in vacuo.



N. meinet er, ... behauptet Newton in seinem 2ten Buch, wann er statuiret, daß die curva AM eine Asymtoton verticalem habe, und desswegen dazu durch hyperbolas zu appropinquiren sucht.

Wann nun gesetzt wird $AP=y$, $PM=x$, so wird die Natur der curvae AMC q. pr. diese Aequation haben. $2by+gcx=gc^2(e^{\frac{x}{c}}-1)$ oder $x=c\,l\,\frac{2by+gcx+gc^2}{gc^2}$. Wann die altitudo generans celer. in M ist v, so wird seyn $v=be^{-\frac{x}{c}}+\frac{c^2g^2e^{-\frac{x}{c}}}{4b}(e^{\frac{x}{c}}-1)^2$. Und tempus per AM wird seyn $\frac{c}{125\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}}-1)$ min. sec. wann b und c in ~~...~~ 1000 sten Theilen eines Rheinischen Schuhs exprimirt wird. Setzt man die geschwindig-

P.S. Der Hr. Brauckner befindet sich gar wohl, und lässt Ew. Hochedelgeb. seine gehorsamste Empfehlung machen. Den Augenblick ist durch einen Courier die Nachricht gekommen, daß die 2000 Franzosen, so vor Danzig angekommen, feliciter geschlagen worden, so daß wenig mehr nach Frankreich zurückkommen werden.

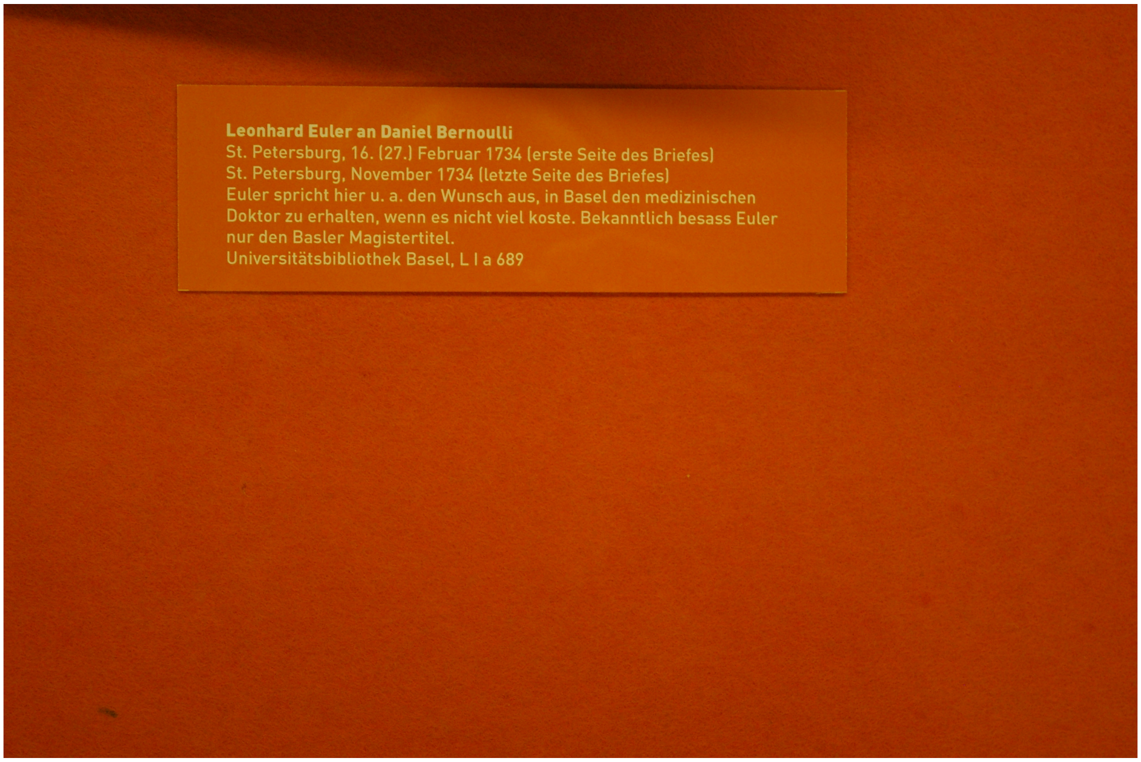
E. m.

16 febr. 1734

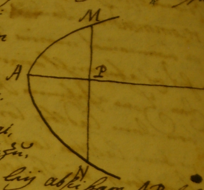
Hochedelgebohrner

Hochgeehrtester Herr

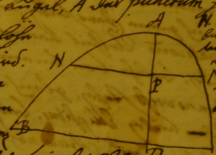
Ew. Hochedelgebl. werden ohne Zweifel mein letsteres Schreiben nebst dem Wechsel a 550 fl. Holl. von den Hr. [illegible] ingleichem den sc. Wechsel von meinem Vatter erhalten haben. Das Contoir, darauf man denselben den Hl. Stähelin [illegible] soll auch so gut stehen, dass ein [illegible] bey nicht ein Protest zu befürchten. Da ich in meinem letsteren Briefe nicht Zeit genug hatte Ew. Hochedelgebl. von Scientificis etwas zu überschreiben, und auf Dero selbst [illegible] gemachte Observationes zu antworten, als berichte hiermit zugleich, dass das Problema laminarū sibi superimponendarum, ut maximam habeant inclinationem bald so wohl von dem Hl. Justiz Rath Goldbach als mir ist solviret worden. Das andere Problema die Form einer Balcken [illegible], welcher er mag beladen seyn oder nicht, allemal selben zum brechen gleich geneigt seyn soll, erfordert eine Theoria [illegible] Dero sel. Hl. Oncle gegeben, und wie mich dünckt aber das Problema schon tractiret. Die völlige Ausführung aber, und Application ist [illegible] so wohl das schönste als [illegible] Materie, und erwarte desselben mit Verlangen Ew. Hochedelgebl. darüber verfertigte Dissertation.


Leonhard Euler an Daniel Bernoulli
St. Petersburg, 16. (27.) Februar 1734 (erste Seite des Briefes)
St. Petersburg, November 1734 (letzte Seite des Briefes)
Euler spricht hier u. a. den Wunsch aus, in Basel den medizinischen
Doktor zu erhalten, wenn es nicht viel koste. Bekanntlich besass Euler
nur den Basler Magistertitel.
Universitätsbibliothek Basel, L I a 689

wenn sie keineswegs unterscheiden können, um der Analysi ein großen Zusatz geben. Das zweyte Problema ist dieses:



Invenire duas curvas AM, AN algebraicas non rectificabiles, sed quarum rectificatio a data quadratura pendeat; tales ut, ducta ad axem communem AP quacunque ordinata orthogonali MN, summa arcuum AM et AN possit algebraice exprimi. Wann diese Condition nicht hinzu gesetzet würde, dass die beyde Bögen einerley abscissam AP haben sollten, so folgete die Solution gleich aus den Formulis, welche Ew. Hochedelgeb. pro reducendis quadraturis ad rectificationes curvarum algebraicarum gegeben. Mit dieser Condition aber ist die Solution meiner Meinung nach sehr schwer, und kan ich, obgleich meine Solution general ist, dennoch keine curvas simplices satisfacientes geben. Dieses Problema muss auch möglich seyn, dass man wann die eine curva AM gegeben ist, die andere AN finden soll, so dass AM + AN rectificabel ist. Ich habe nur diesen Casum betrachtet, wann AM eine Parabola ist, habe aber die andere Curvam nicht finden können. In Schreibung meiner Mechanic bin ich auf eine aequation gefallen, welche quam proxime die Natur der projectoriae in aëre exprimirt. Als es sey BNAMC die Via einer Stück Kugel, A das punctum summum,



N. meine ... erstere bewegt Newton in seinem 2ten Buch, wann er statuirt, dass die curva AM eine Asymtoten verticalem habe, und dessen dazu durch hyperbolas zu approximiren suchet.

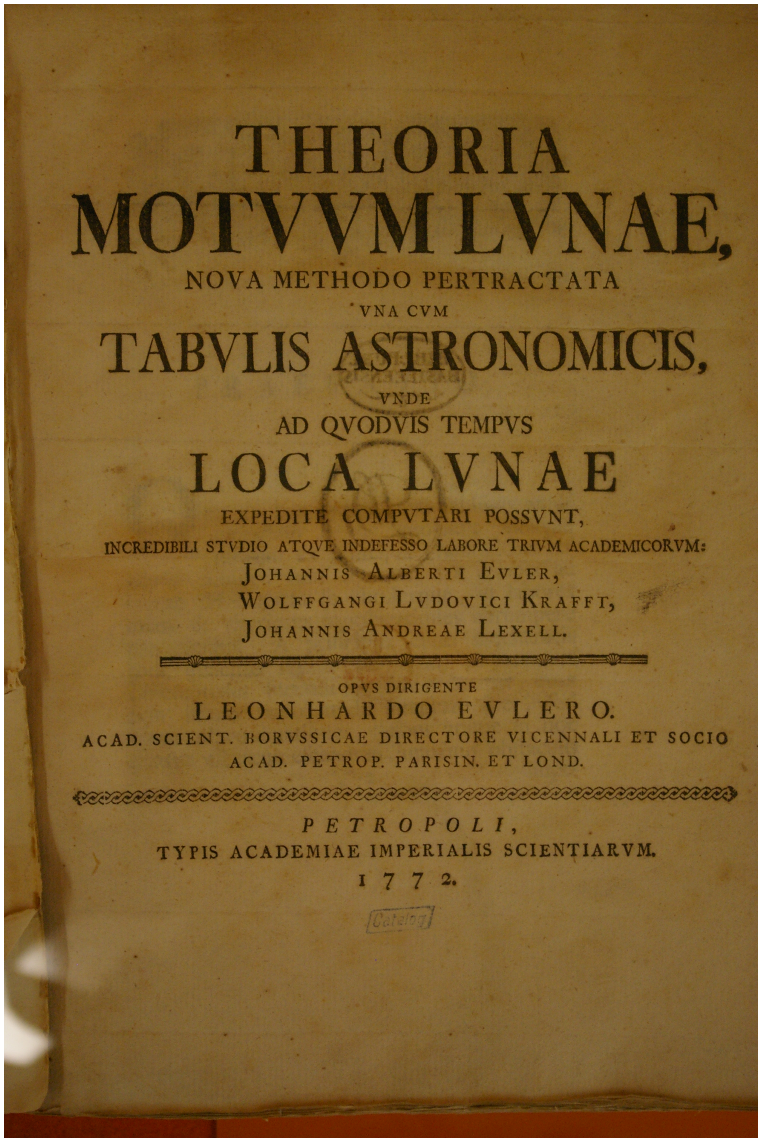
AD eine Vertical Linie. b sey die Höhe aus welcher die Celeritas in A generirt wird. und c die Höhe, aus welcher diejenige Celeritas entspringt, mit welcher wann sich das ~~ex~~ Kugel bewegt, die Resistenz der Vi gravitatis gleich ist. g ist zu 1 wie die Schwehre der Kugel in aëre, zu ihrer wahren Schwehre in vacuo. Wann nun gesetzt wird $AP = y$, $PM = x$. so wird die Natur der curvae AMC q. pr. diese aequation haben. $2by + gcx = gc^2(e^{\frac{x}{c}} - 1)$ oder $x = c\,l\,\frac{2by + gcx + gc^2}{gc^2}$. Wann die altitudo generans celer. in M ist v, so wird seyn $v = be^{-\frac{x}{c}} + \frac{c^2g^2e^{-\frac{x}{c}}}{4b}(e^{\frac{x}{c}} - 1)^2$. Und tempus per AM wird seyn $\frac{c}{125\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$ min. sec. wann b und c in ~~den~~ 1000 sten Theilen eines Rheinischen Schuhs exprimirt wird. Setzt man die geschwindig-

P.S. Der Hl. Bruckner befindet sich gar wohl, und lässt Ew. Hochedelgeb. seine gehorsamste empfehlung machen. Den Augenblick ist durch einen Courier die Nachricht gekommen, dass die 2000 Franzosen, so bey Danzig angekommen, feliciter geschlagen worden, so dass wenig mehr nach Frankreich zurückkommen werden.

7*

Hochedelgebohrner Hochzuehrender Herr

Daß ich so lange Zeit an Ew. Excellenz zu schreiben aufgeschoben und dabey Dieselben meines schuldigen Respects zu versichern, ist die Ursach, weilen ich seit der Zeit nichts gearbeitet habe, welches Denselben zu überschreiben würdig geachtet hätte. Ich habe fast diese ganze Zeit angewendet zu Verfertigung eines Systematis Musici womit ich jetzund fast zu Ende gekommen. Weil ich darinn vermeine etwas gethan zu haben, nehme ich hiemit die Freyheit Ew. Excellenz zu überschreiben, weilen ich vermuthe daß Dieselben darauf curios seyn möchten, indem ich neulich von Dero Herrn Sohn vernommen, daß Dieselben von dem Herrn Hermann etwas davon gehöret. Mein Endzweck in diesem Werke war dieser, daß ich suchte die Music als einen Theil der Mathematik auszuführen, und alles was nur zur Zusammenfügung und Vermischung der Töne kan angenehm machen aus richtigen Gründen ordentlich herzuleiten. Zu dieser ganzen Abhandlung habe ich einige Metaphysische Grundsätze nöthig gehabt, worinnen die Ursach enthalten, warum einem an einer Music ein Wohlgefallen haben könne und worinn der Grund zu setzen sey, daß uns eine Sach angenehm, eine andere aber unangenehm vorkomme. Mit den Tönen habe ich dargethan daß es diese Bewandtniß habe, daß uns viel zusammengefügte Töne gefallen, wann wir die Verhältnuß der Höhe und Tiefe derselben, nehmlich die rationem



THEORIA MOTVVM LVNAE,

NOVA METHODO PERTRACTATA

VNA CVM

TABVLIS ASTRONOMICIS,

VNDE

AD QVODVIS TEMPVS

LOCA LVNAE

EXPEDITE COMPVTARI POSSVNT,

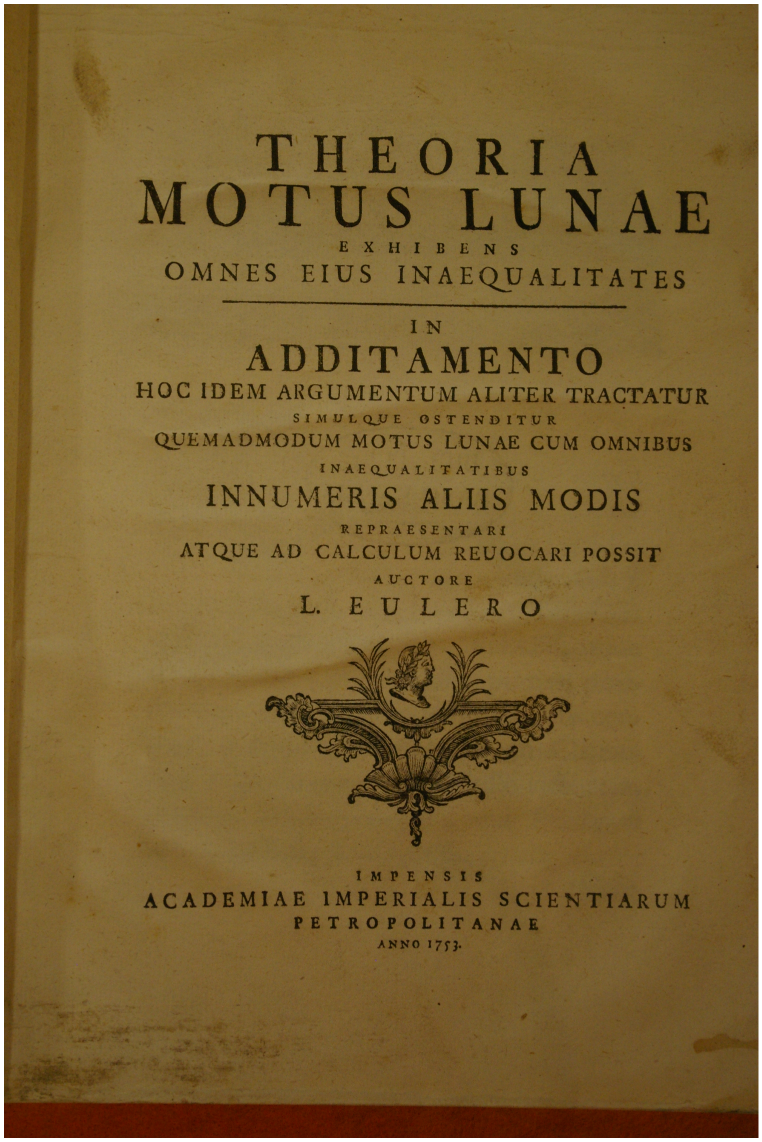
INCREDIBILI STVDIO ATQVE INDEFESSO LABORE TRIVM ACADEMICORVM:

JOHANNIS ALBERTI EVLER,
WOLFFGANGI LVDOVICI KRAFFT,
JOHANNIS ANDREAE LEXELL.

OPVS DIRIGENTE

LEONHARDO EVLERO.
ACAD. SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LOND.

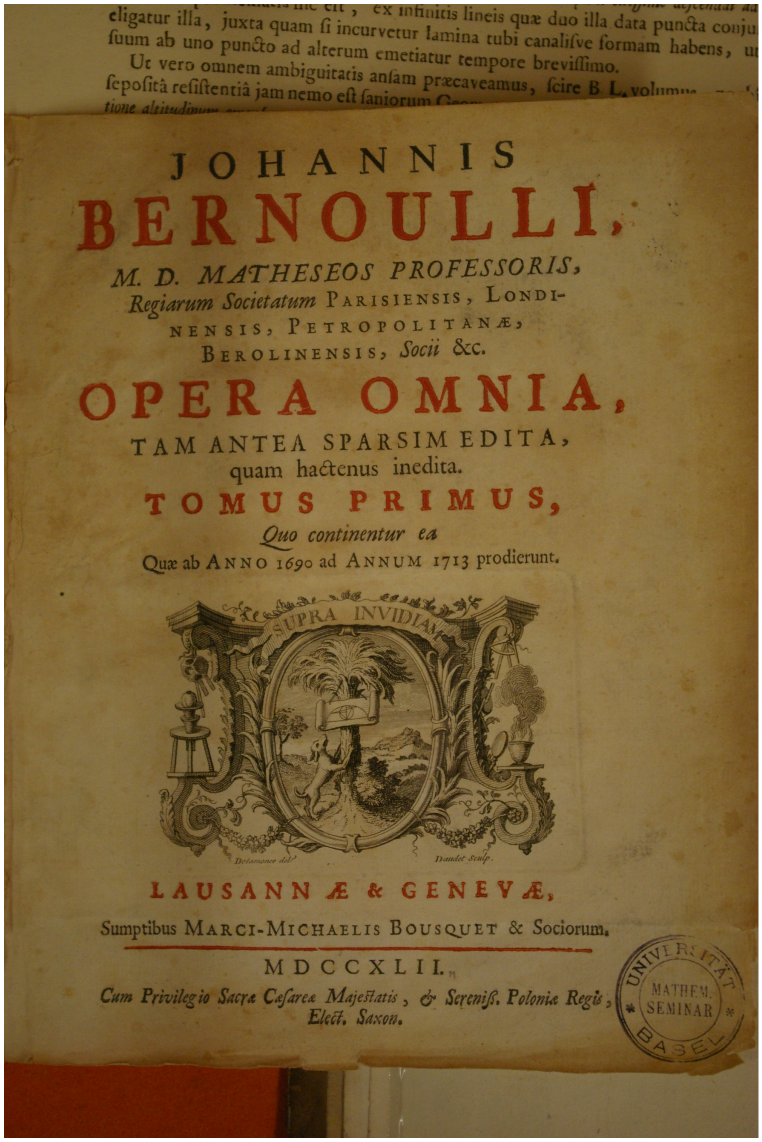
PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARVM.
1772.



THEORIA
MOTUS LUNAE
EXHIBENS
OMNES EIUS INAEQUALITATES

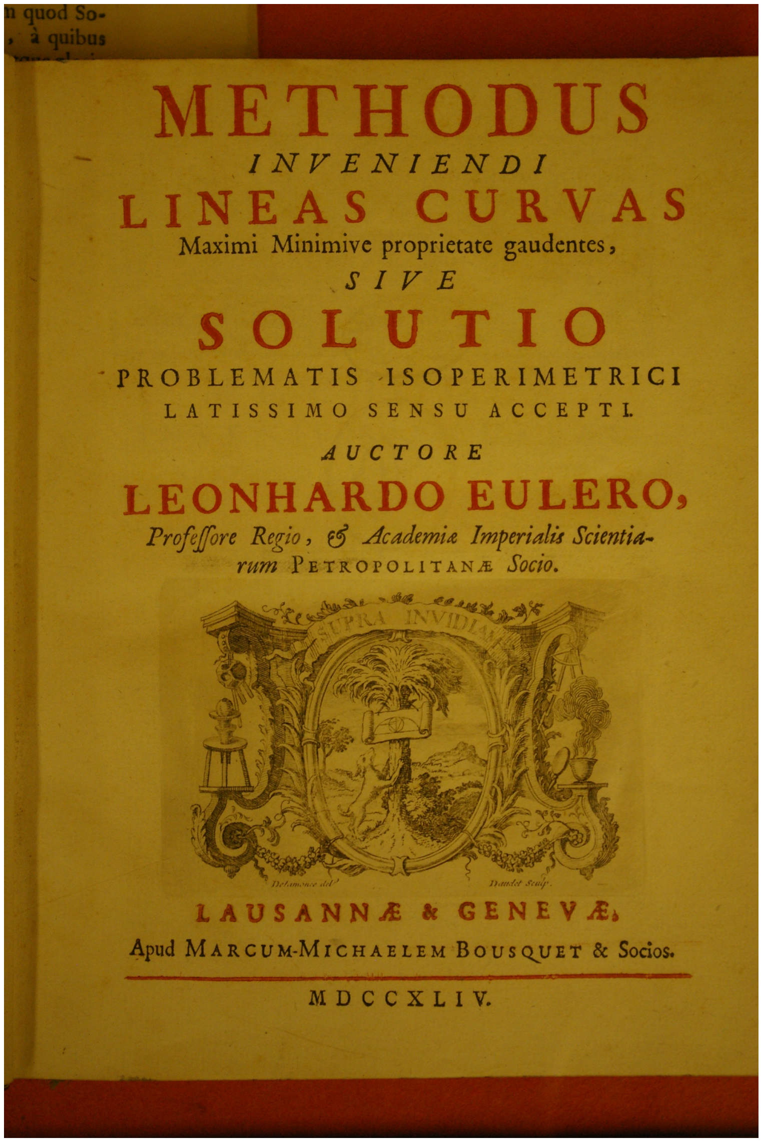
IN
ADDITAMENTO
HOC IDEM ARGUMENTUM ALITER TRACTATUR
SIMULQUE OSTENDITUR
QUEMADMODUM MOTUS LUNAE CUM OMNIBUS
INAEQUALITATIBUS
INNUMERIS ALIIS MODIS
REPRAESENTARI
ATQUE AD CALCULUM REUOCARI POSSIT
AUCTORE
L. EULERO

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
ANNO 1753.


eligatur illa, juxta quam si incurvetur lamina tubi canalisve formam habens, ut
suum ab uno puncto ad alterum emetiatur tempore brevissimo.
Ut vero omnem ambiguitatis ansam præcaveamus, scire B. L. volumus
sepositâ resistentiâ jam nemo est saniorum Geo

JOHANNIS
BERNOULLI,
M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ,
BEROLINENSIS, Socii &c.
OPERA OMNIA,
TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita.
TOMUS PRIMUS,
Quo continentur ea
Quæ ab ANNO 1690 ad ANNUM 1713 prodierunt.

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.
MDCCXLII.
Cum Privilegio Sacræ Cæsareæ Majestatis, & Sereniss. Poloniæ Regis, Elect. Saxon.



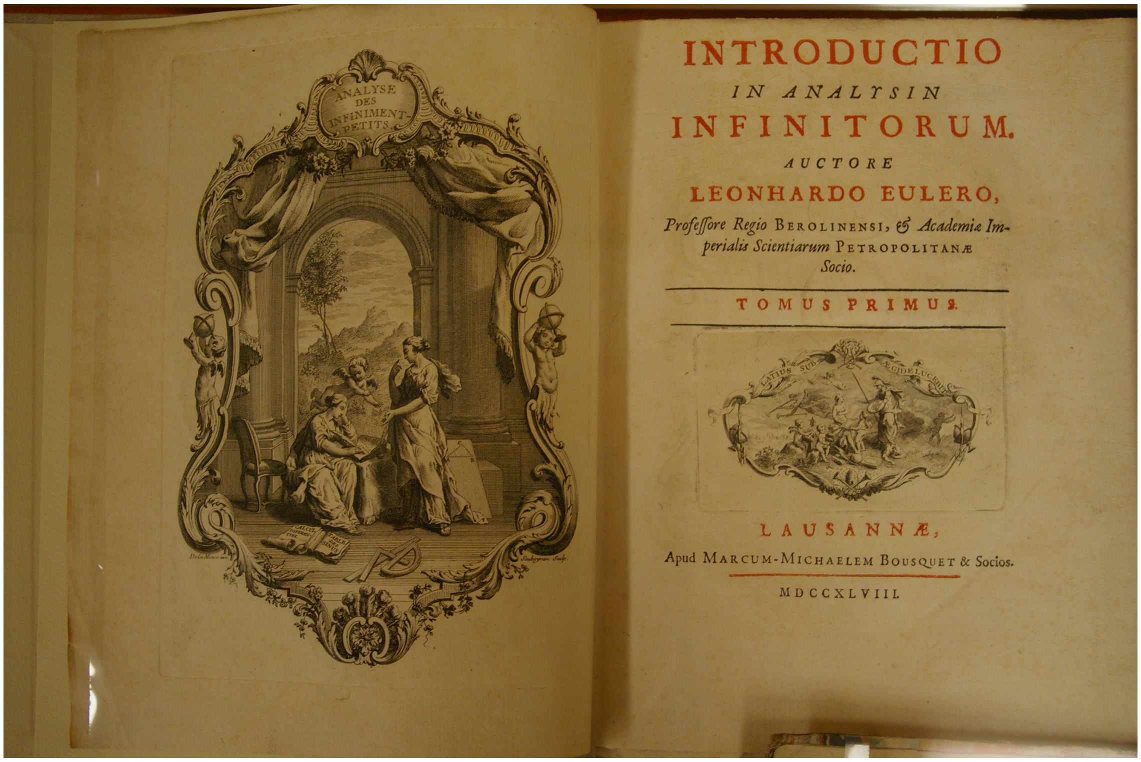
METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.

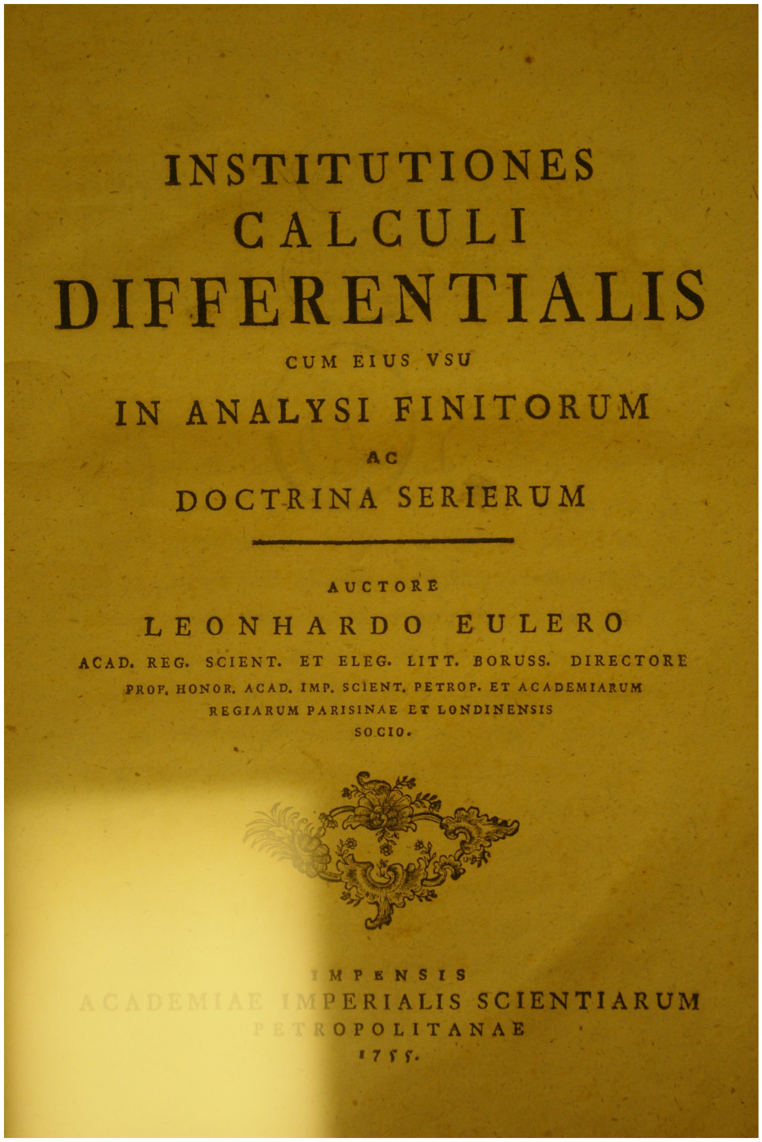
AUCTORE

LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

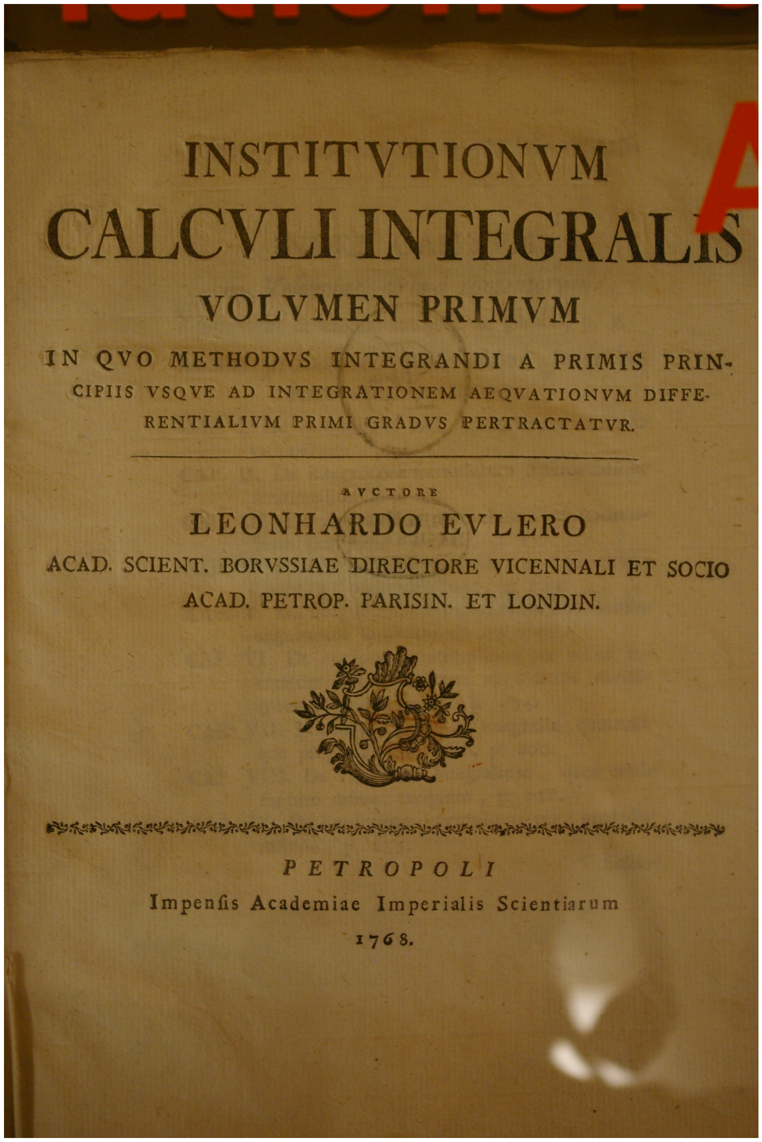
MDCCXLIV.


ANALYSE
DES
INFINIMENT-
PETITS.
INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.



INSTITVTIONVM

CALCVLI INTEGRALIS

VOLVMEN PRIMVM

IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI

Impenſis Academiae Imperialis Scientiarum

1768.

PROPOSITIO. III.

§. 30. *Numerus omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiusque ſolidi exiſtunt vel aequalis eſt vel maior numero angulorum ſolidorum ter ſumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor eſſe poteſt quam triplum numeri angulorum ſolidorum.*

DEMONSTRATIO.

Quilibet angulus ſolidus vel a tribus angulis planis formatur vel a pluribus, pauciores enim quam tres anguli plani angulum ſolidum conſtituere nequeunt. Hinc ſi omnes anguli ſolidi a tribus planis formantur, numerus angulorum planorum triplo maior eſſe debet quam numerus angulorum ſolidorum; ſin autem ad quosdam angulos ſolidos conſtituendos plurès anguli plani coniunguntur, numerus angulorum planorum quoque maior erit quam numerus angulorum ſolidorum, minor autem nunquam eſſe poteſt. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 31. Si numerus angulorum ſolidorum ponatur $= S$, numerus vero acierum $= A$ pro ſolido quocunque, quia numerus omnium angulorum planorum eſt $= 2A$, ſemper erit vel $2A = 3S$ vel $2A > 3S$.

COROLL. 2.

§. 32. Fieri ergo nequit, vt vnquam ſit $2A < 3S$, ſeu $A < \frac{3}{2}S$, ſeu $S > \frac{2}{3}A$. Quare ſi praeterea numerus hedra-

hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior eſſe poteſt quam $\frac{2}{3}A$.

PROPOSITIO IV.

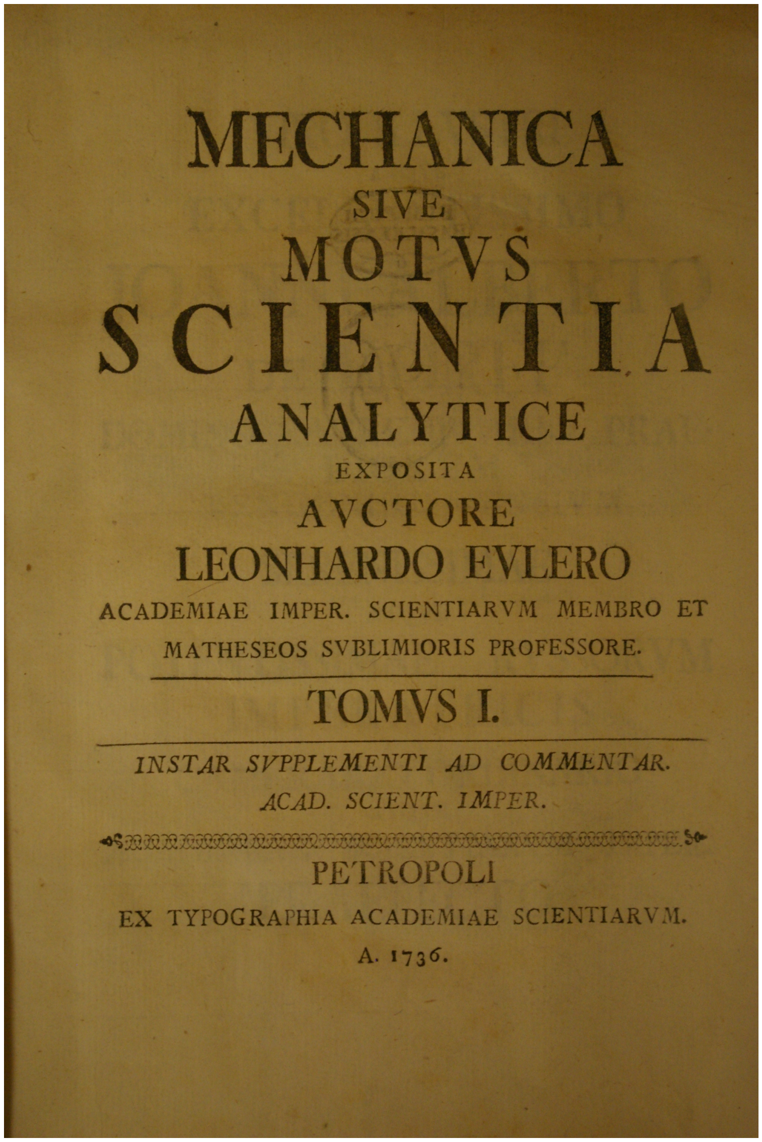
§. 33. *In omni ſolido hedris planis incluſo aggregatum ex numero angulorum ſolidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet ſi ponatur vt hactenus:
numerus angulorum ſolidorum $= S$
numerus acierum - - - - $= A$
numerus hedrarum - - - $= H$
demonſtrandum eſt, eſſe $S + H = A + 2$.

Fateri equidem cogor, me huius theorematis demonſtrationem firmam adhuc eruere non potuiſſe; interim tamen eius veritas pro omnibus ſolidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnoſcetur, ita vt ſequens inductio vicem demonſtrationis gerere queat.

1. Conſideremus ergo primo pyramidem quamcunque ſuper baſi A B C D E F G quotcunque laterum conſtitutam et in apicem H deſinentem. Sit numerus laterum baſis $= m$, totidemque triangula a baſi ad apicem vsque aſſurgent. Includitur ergo haec pyramis $m + 1$ hedris, quarum m ſunt triangula, vna vero polygonum m angulorum ſeu laterum. Erit itaque numerus hedrarum Fig. 3.

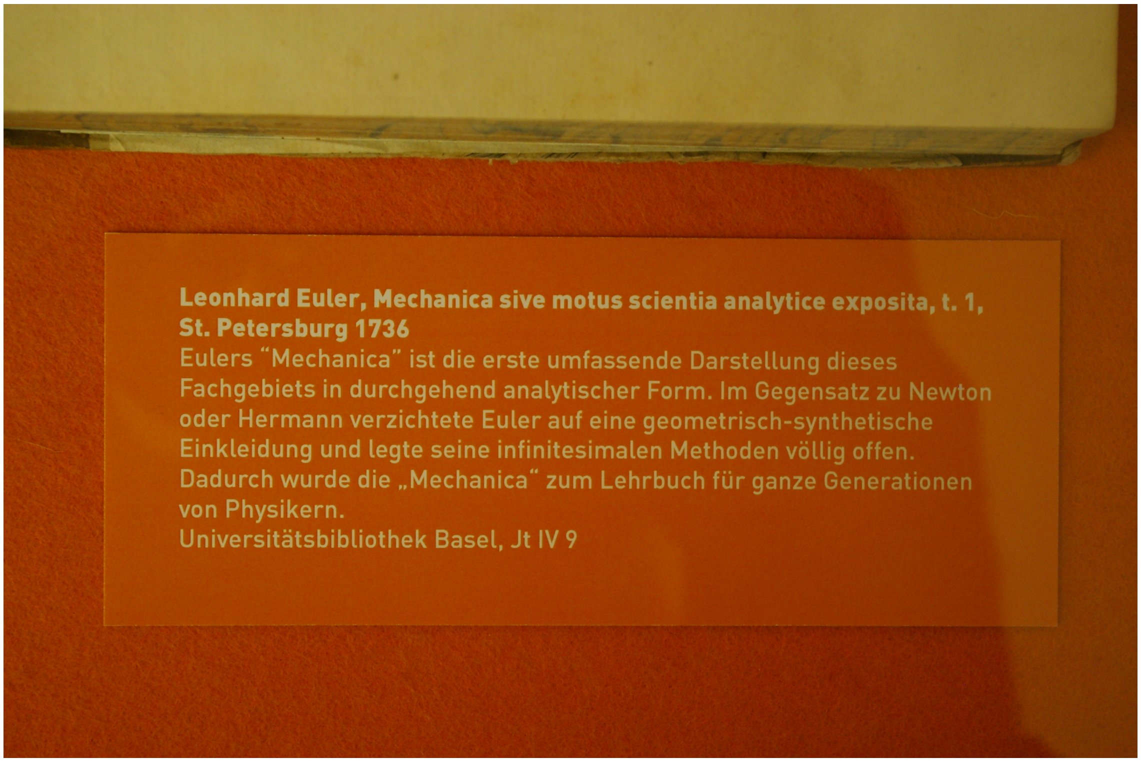


MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.


Leonhard Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita, t. 1, St. Petersburg 1736
Eulers "Mechanica" ist die erste umfassende Darstellung dieses Fachgebiets in durchgehend analytischer Form. Im Gegensatz zu Newton oder Hermann verzichtete Euler auf eine geometrisch-synthetische Einkleidung und legte seine infinitesimalen Methoden völlig offen. Dadurch wurde die „Mechanica" zum Lehrbuch für ganze Generationen von Physikern.
Universitätsbibliothek Basel, Jt IV 9

NUM. IV.

Ejusdem

De ſummis ſerierum reciprocarum ex poteſtatibus numerorum naturalium ortarum Diſſertatio altera: in qua eædem ſummationes ex fonte maxime diverſo derivantur.

§. I.

Poſtquam ante complures annos ſummas ſerierum in hac forma generali contentarum $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} +$ &c. in infinitum, ſi n fuerit numerus par poſitivus, ſimulque etiam harum ſerierum, ſi n fuerit numerus impar $1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} +$ &c. in infinitum, ope quadraturæ circuli exhibuiſſem, atque oſtendiſſem, ſummam perpetuo per eandem peripheriæ circuli dignitatem, quam exponens n indicet, exprimi: argumentum hoc acutiſſimis Geometris tantopere placuit, ut id non ſolum maxime probarent, verum etiam

ipſi

ipſi ſtudium atque operam ad easdem ſummas methodis ſibi familiaribus eruendas impenderent. Ego quoque ab illo tempore multum fui occupatus in alia via inveſtiganda, quæ eodem deduceret, non tam ut veritatem inventam magis confirmarem, quam ut limites analyſeos in hujus generis ſeriebus tractandis ulterius extenderem.

§. II.

Methodus, quæ me ad iſtarum ſerierum ſummationem manuduxit, utique erat nova, & in ejusmodi inſtituto plane non uſitata: nitebatur enim in reſolutione æquationis infinitæ, cujus omnes radices, quarum numerus erat infinitus, noſſe oportebat. Contemplatus ſum namque hanc æquationem in infinitum excurrentem:

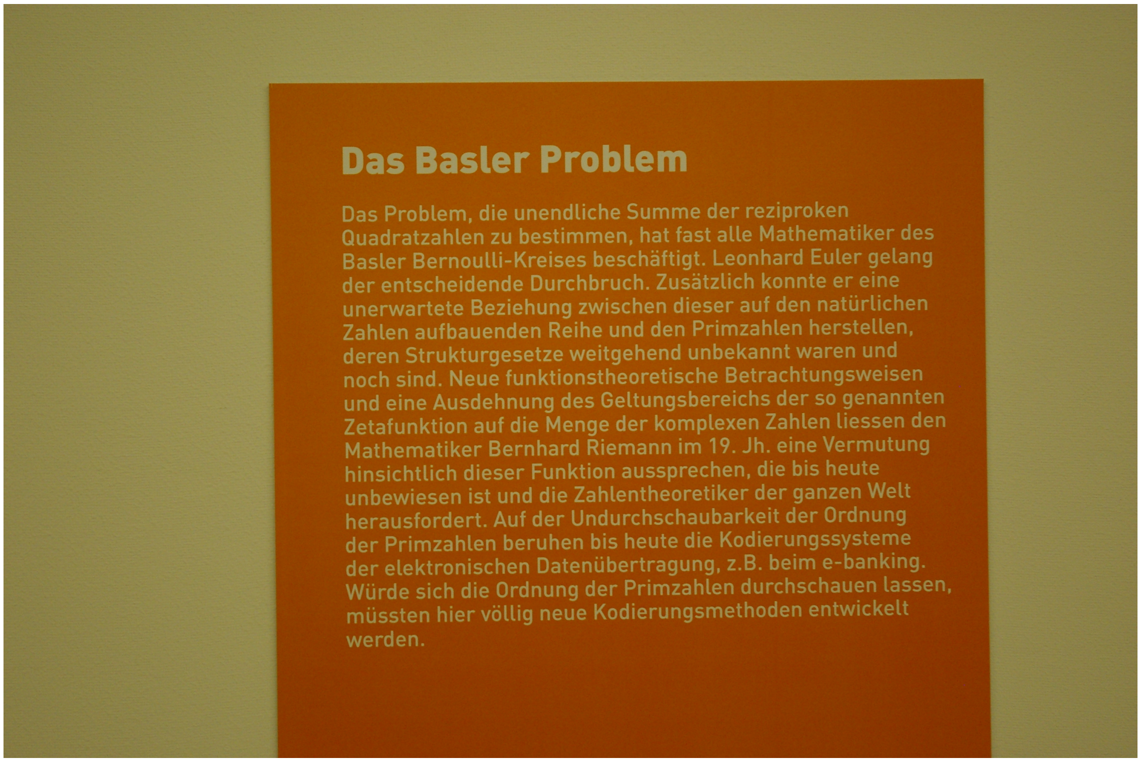
$$x = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \frac{s^7}{5040} + \frac{s^9}{362880} - \text{\&c.}$$

quæ continet relationem inter arcum circuli s & ejus ſinum x, ſinu toto poſito $= 1$. Cum autem eidem ſinui x innumerabiles arcus tam affirmativi quam negativi reſpondeant; hoc modo iſtius æquationis radices innumeras a poſteriori eram conſecutus; & quoniam coefficientes cujusque æquationis a radicibus pendent, ex comparatione iſtorum coefficientium cum radicibus æquationis perveni ad ſummas ſerierum ante memoratarum.

§. III.

Statim quidem facile perſpexi, iſtam methodum tutam eſſe, atque ad veritatem perducere non poſſe, niſi conſtaret

Z 3 æqua.


Das Basler Problem
Das Problem, die unendliche Summe der reziproken Quadratzahlen zu bestimmen, hat fast alle Mathematiker des Basler Bernoulli-Kreises beschäftigt. Leonhard Euler gelang der entscheidende Durchbruch. Zusätzlich konnte er eine unerwartete Beziehung zwischen dieser auf den natürlichen Zahlen aufbauenden Reihe und den Primzahlen herstellen, deren Strukturgesetze weitgehend unbekannt waren und noch sind. Neue funktionstheoretische Betrachtungsweisen und eine Ausdehnung des Geltungsbereichs der so genannten Zetafunktion auf die Menge der komplexen Zahlen liessen den Mathematiker Bernhard Riemann im 19. Jh. eine Vermutung hinsichtlich dieser Funktion aussprechen, die bis heute unbewiesen ist und die Zahlentheoretiker der ganzen Welt herausfordert. Auf der Undurchschaubarkeit der Ordnung der Primzahlen beruhen bis heute die Kodierungssysteme der elektronischen Datenübertragung, z.B. beim e-banking. Würde sich die Ordnung der Primzahlen durchschauen lassen, müssten hier völlig neue Kodierungsmethoden entwickelt werden.

DE SVMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

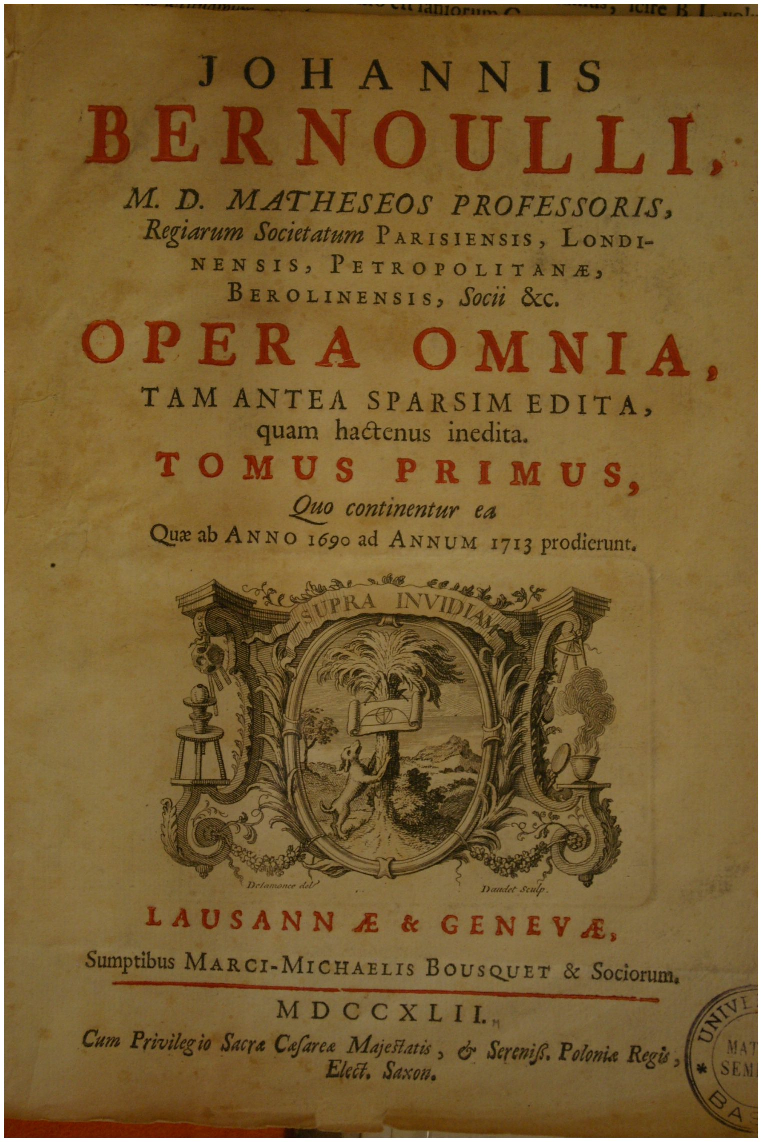
Tantopere iam pertractatae et inuestigatae sunt series reciprocae potestatum numerorum naturalium, vt vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri posse. Quicunque enim de summis serierum meditati sunt, ii fere omnes quoque in summas huiusmodi serierum inquisiuerunt, neque tamen vlla methodo eas idoneo modo exprimere potuerunt. Ego etiam iam saepius, cum varias summandi methodos tradidissem, has series diligenter sum persecutus, neque tamen quicquam aliud sum assecutus, nisi vt earum summam vel proxime veram definiuerim vel ad quadraturas curuarum maxime transcendentium reduxerim; quorum illud in dissertatione proxime praelecta, hoc vero in praecedentibus praestiti. Loquor hic autem de seriebus fractionum, quarum numeratores sunt 1, denominatores vero vel quadrata, vel cubi, vel aliae dignitates numerorum naturalium; cuius modi sunt $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., item $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. atque similes superiorum potestatum, quarum termini generales continentur in hac forma $\frac{1}{x^n}$. Tabula VII.

METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.

AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLIV.



JOHANNIS

BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,

Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, *Socii* &c.

OPERA OMNIA,

TAM ANTEA SPARSIM EDITA,

quam hactenus inedita.

TOMUS PRIMUS,

Quo continentur ea

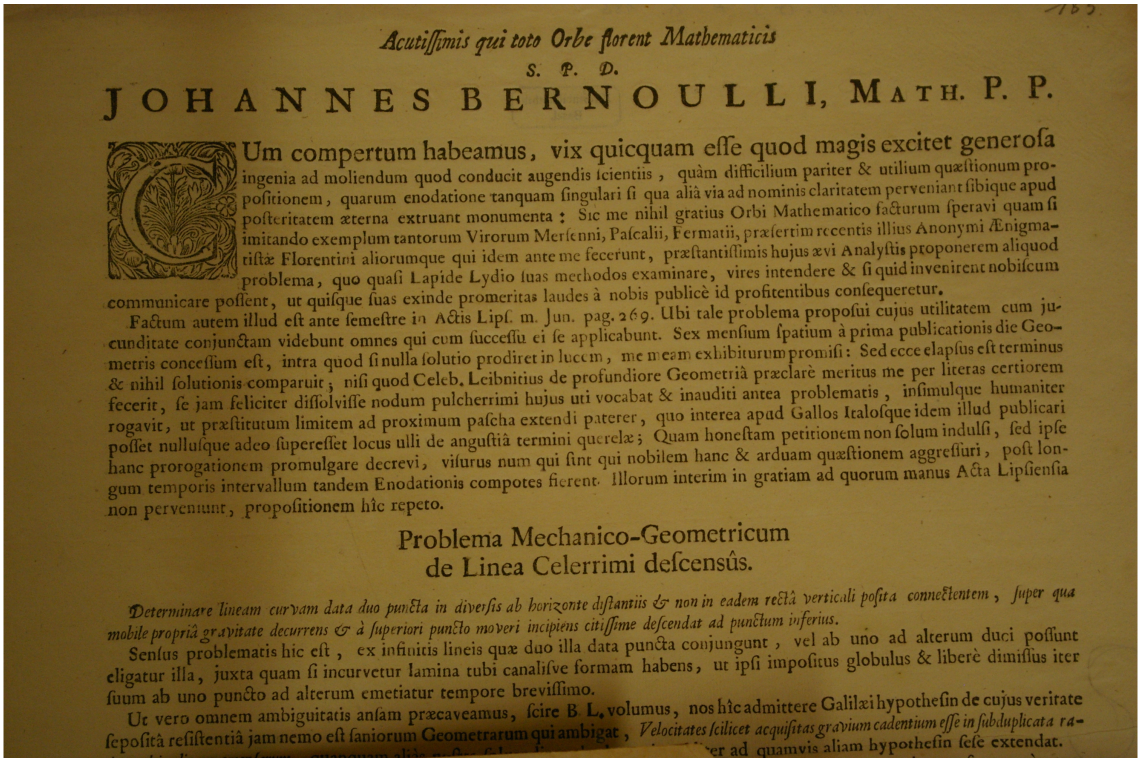
Quæ ab ANNO 1690 ad ANNUM 1713 prodierunt.

LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.

MDCCXLII.

Cum Privilegio Sacræ Cæsareæ Majestatis, & Sereniss. Poloniæ Regis, Elect. Saxon.



Acutiſſimis qui toto Orbe florent Mathematicis

S. P. D.

JOHANNES BERNOULLI, MATH. P. P.

CUm compertum habeamus, vix quicquam eſſe quod magis excitet generoſa ingenia ad moliendum quod conducit augendis ſcientiis, quàm difficilium pariter & utilium quæſtionum propoſitionem, quarum enodatione tanquam ſingulari ſi qua aliâ via ad nominis claritatem perveniant ſibique apud poſteritatem æterna extruant monumenta: Sic me nihil gratius Orbi Mathematico facturum ſperavi quam ſi imitando exemplum tantorum Virorum Merſenni, Paſcalii, Fermatii, præſertim recentis illius Anonymi Ænigmatiſtæ Florentini aliorumque qui idem ante me fecerunt, præſtantiſſimis hujus ævi Analyſtis proponerem aliquod problema, quo quaſi Lapide Lydio ſuas methodos examinare, vires intendere & ſi quid invenirent nobiſcum communicare poſſent, ut quiſque ſuas exinde promeritas laudes à nobis publicè id profitentibus conſequeretur.

Factum autem illud eſt ante ſemeſtre in Actis Lipſ. m. Jun. pag. 269. Ubi tale problema propoſui cujus utilitatem cum jucunditate conjunctam videbunt omnes qui cum ſucceſſu ei ſe applicabunt. Sex menſium ſpatium à prima publicationis die Geometris conceſſum eſt, intra quod ſi nulla ſolutio prodiret in lucem, me meam exhibiturum promiſi: Sed ecce elapſus eſt terminus & nihil ſolutionis comparuit; niſi quod Celeb. Leibnitius de profundiore Geometriâ præclarè meritus me per literas certiorem fecerit, ſe jam feliciter diſſolviſſe nodum pulcherrimi hujus uti vocabat & inauditi antea problematis, inſimulque humaniter rogavit, ut præſtitutum limitem ad proximum paſcha extendi paterer, quo interea apud Gallos Italoſque idem illud publicari poſſet nulluſque adeo ſupereſſet locus ulli de anguſtiâ termini querelæ; Quam honeſtam petitionem non ſolum indulſi, ſed ipſe hanc prorogationem promulgare decrevi, viſurus num qui ſint qui nobilem hanc & arduam quæſtionem aggreſſuri, poſt longum temporis intervallum tandem Enodationis compotes fierent. Illorum interim in gratiam ad quorum manus Acta Lipſienſia non perveniunt, propoſitionem hîc repeto.

Problema Mechanico-Geometricum
de Linea Celerrimi deſcensûs.

Determinare lineam curvam data duo puncta in diverſis ab horizonte diſtantiis & non in eadem rectâ verticali poſita connectentem, ſuper qua mobile propriâ gravitate decurrens & à ſuperiori puncto moveri incipiens citiſſime deſcendat ad punctum inferius.

Senſus problematis hic eſt, ex infinitis lineis quæ duo illa data puncta conjungunt, vel ab uno ad alterum duci poſſunt eligatur illa, juxta quam ſi incurvetur lamina tubi canaliſve formam habens, ut ipſi impoſitus globulus & liberè dimiſſus iter ſuum ab uno puncto ad alterum emetiatur tempore breviſſimo.

Ut vero omnem ambiguitatis anſam præcaveamus, ſcire B. L. volumus, nos hîc admittere Galilæi hypotheſin de cujus veritate ſepoſitâ reſiſtentiâ jam nemo eſt ſaniorum Geometrarum qui ambigat, *Velocitates ſcilicet acquiſitas gravium cadentium eſſe in ſubduplicata ra-*
…er ad quamvis aliam hypotheſin ſeſe extendat.

Anfang: Newton, P.M., siehe weiter unten.

Eigentlicher Start: Johann Bernoulli 1696, Acta Eruditorum.

"Einladung zur Lösung eines neuen Problems."

"Wenn in einer vertikalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt."

"Die Kurve AMB ist eine den Geometern sehr bekannte, die ich angeben werde, wenn sie nach Verlauf dieses Jahres kein anderer genannt hat."

Erschien im Juniheft; also sechs Monate Frist.

Ein Jahr später:

"Cartesius, Fermat und andere ausgezeichnete Männer, welche einst für die Vorzüglichkeit ihrer Methoden [zur Bestimmung von Maxima und Minima] so heftig kämpften, als ob es sich um Herd und Altar handle, oder jetzt ihre Anhänger an ihrer Stelle, müssen offen eingestehen, daß, wer nur ihre Methoden kennt, hier ganz und gar stecken bleibt."

"Mit Recht bewundern wir Huygens, weil er zuerst entdeckte, daß ein schwerer Punkt auf einer gewöhnlichen Cycloide in derselben Zeit herabfällt, an welcher Stelle er auch die Bewegung beginnt. Aber man wird starr vor Erstaunen sein, wenn ich sage, daß gerade die Cycloide, die Tautochrone von Huygens, die gesuchte Brachistochrone ist."

Bernoulli erkennt richtig:

nur wenn $v \sim \sqrt{h}$ (Galilei), ist Tautochrone = Brachistochrone = Cycloide.

Wenn aber $v \sim h$ wäre, dann sind die Tautochronen Kreise, die Brachistochronen Gerade.

Übung: zeige dies.

Richtige Einsendungen kam z.B. von Jacob Bernoulli:

"Lösung der Aufgaben meines Bruders, dem ich zugleich dafür andere vorlege."

Wieder in Acta Eruditorum, 1697.

Hierin eine neue Idee:

Man nehme auf ihr [der gesuchten schnellsten Bahnkurve] zwei unendlich nahe Punkte C und D an.

Sei EI eine Gerade parallel zur x-Achse, die die Kurve CD schneidet.

(Ganz grob in der Mitte: Bernoulli macht hier eine umständliche, nicht weiter benutzte Konstruktion.)

Sei G der Schnittpunkt der Geraden EI mit dem Kurvenelement CD.

Weiter nach Cantor:

Johann Bernoulli 1698: Lehre von den kürzesten Linien (auf bestimmten Oberflächen).

Euler 1728: Gibt erstmals Differentialglg für kürzeste Linien an.

Diese DGL ist ungewöhnlich und wird selten gesehen.

Euler 1732: Definiert Klassen isoperimetrischer Probleme:

"Solle man eine mit n Eigenschaften bereits versehene Kurve so bestimmen, daß sie eine (n+1)te Eigenschaft im größten oder kleinsten Maße besitze, so müsse man $n+2$ aneinanderstoßende Kurvenelemente in Betrachtung ziehen."

Mit diesem Prinzip und detaillierten geometrischen Betrachtungen löst er einige bekannte Extremalprobleme.

Euler macht hier aus einem Differential mittels integrierendem Faktor ein $totales$ Differential.

Ähnliches aber auch schon bei Johann Bernoulli.

Bewegung auf gekrümmten Oberflächen.

Wichtig für Relativitätstheorie.

Zeige mit Lagrange II, daß auf Kugel Grosskreise Geodäten sind.

Eulers "Mechanik" von 1736: nichtfreie Bewegung.

Siehe Cantor S. 852.

Freier Körper würde sich in Tangentialrichtung gerade gleichförmig bewegen.

Die Abweichung entsteht durch eine Zwangskraft senkrecht zur Bahn und Fläche.

Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linie (Johann Bernoulli 1698):

Die Ebene, die durch drei infinitesimal benachbarte Trajektorienpunkte geht, steht senkrecht auf der Tangentenebene an die Zwangsfläche, in der die Bahn verläuft.

Beweis (offensichtlich) mit Bahnkrümmung erst von Euler (1736).

Euler zeigt tatsächlich zweierlei:

(1) Gleichung der kürzesten Linie in gegebener krummer Fläche.

(2) Die Bahn eines kräftefreien Körpers in einer krummen Fläche ist eine *kürzeste* Bahn.

Im selben Jahr 1736 Eulers Artikel über Kurven mit Minimal- und Maximaleigenschaften.

24 bisher einzeln gelöste Probleme durch einheitliche Ausgangsglg gelöst.

Erfindung der Variationsrechnung.

Wieder aus Cantor.

Euler 1744 Summe aus seinen bisherigen Forschungen zu Extremalkurven:

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate.

Der vollständige Originaltext abfotografiert bei Carnegie Mellon:

`http://posner.library.cmu.edu`

Methode aufzufinden krumme Linien mit Maximal- oder Minimaleigenschaft.

Kurzname: Methodus inveniendi.

Aber schon Newton löst Variationsproblem in der Principia:

Euler, Leonhard
Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti [→ nach diesem Titel suchen]
Lausanne & Genf, Bousquet & Socios, 1744

322 S. mit gestoch. Titelvignette (ohne das Errata Blatt). 5 gefalt. Kupfertafeln. 8°. HLdr. der Zeit mit Rückentitel (Rücken restauriert, Bezüge erneuert).

Erste Ausgabe. – Poggendorff I. 689. Roller–G. I, 374. Horblitt 28. DSB IV, 467 ff. Dibner 111: "In the above Book hr presented his calculus of variations, derived from his studies of isoperimetrical curves, a method for finding the variation when the values of some or all expressions are varied." – " Starting with several problems solved by Johann and Jakob Bernoulli, Euler was the first to formulate the principle problems of the calculus of variations and to create general methods for their solution. In Methodus inveniendi lineas curvas... he systematically developed his discoveries of the 1730's. The very titel of the work shows that Euler widely employed geometric representations of functions as flat curves. Here he introduced, using different terminology, the concepts of function and variation and distinguished between problems of absolute extrema and relative extrema, showing how the latter are reduced to the former... In this way the solution of a problem in the calculus of variations might always be reduced to integration of a differential equation. A century and a half later the situation had changed. The direct method imagined by Euler, which he had employed only to obtain his differential equation, had acquired independent value for rigorous or approximate solution of variational problems and the corresponding differential equations." (DSB). – Hs. und gestempelter Besitzvermerk am Titel. Teils fleckig wasserrandig, ohne das letzte Bl. (Errata).

[Schlagworte: Mathematik, Naturwissenschaft]
Erstausgabe, Sprache: Deutsch
Artikel–Nr. 2527
88 weitere Einträge gefunden im
Katalog Naturwissenschaft beim Anbieter Matthäus Truppe Buchhandlung & Antiquariat, Österreich

Preis: **EUR 2580,00**
(ca. $ 3337,49)
Versand: k. A.

Form des Körpers kleinsten Strömungswiderstands.

Die Methode, Extremal eines Funktionals zu finden, benutzt Euler schon seit 1728:

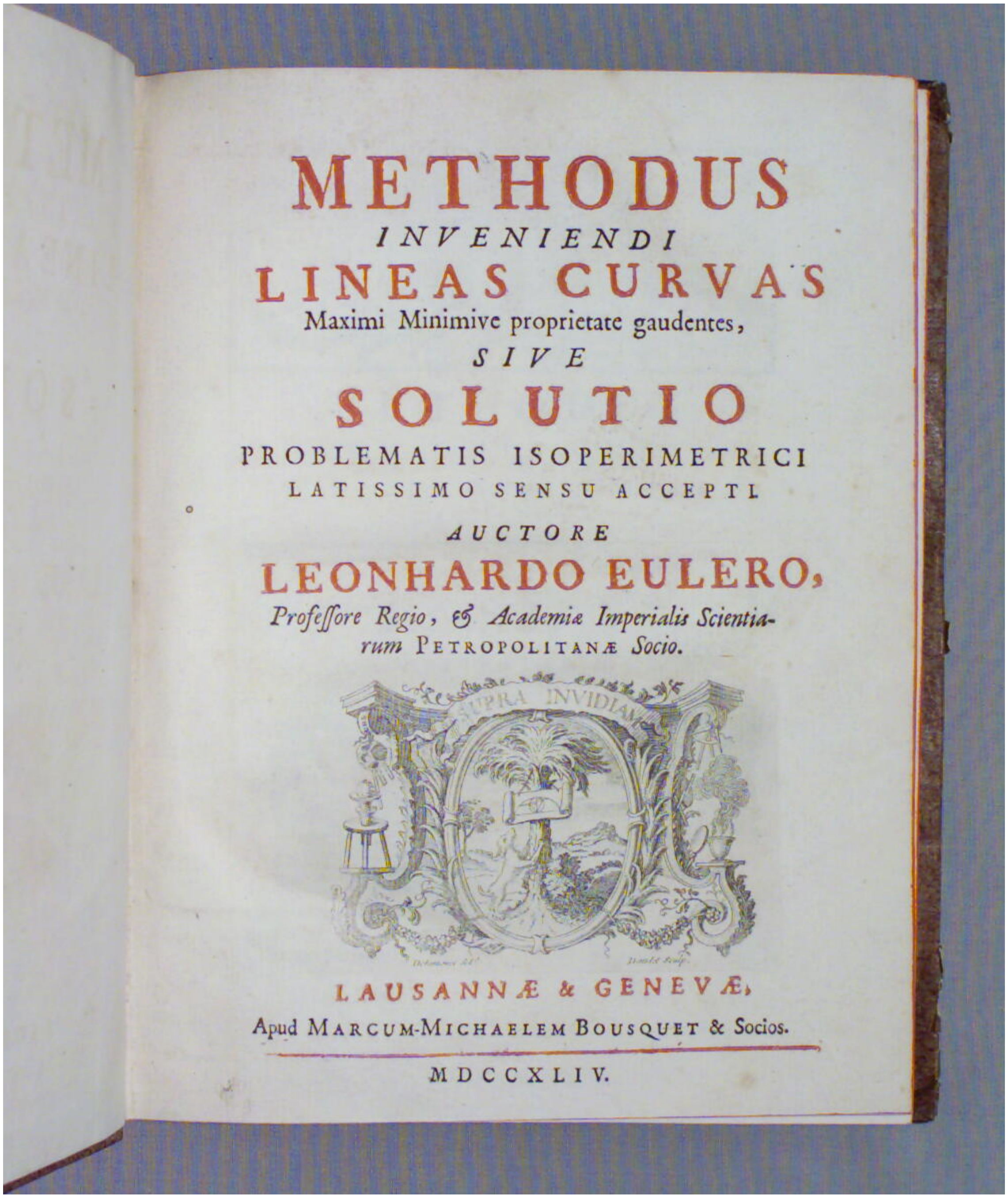
erst begründet er, daß jedes infinitesimale Kurvenstück schon die Extremaleigenschaft der ganzen Kurven haben muß.

(Dies gilt nicht, wenn die Funktionargumente selbst Integrale sind.)

Sei F das zu minimierende Funktional.

sei abc ein infinitesimales Bogenstück der Kurve.

Wähle b' außerhalb der Kurve, in einem Abstand von b, der selbst wieder infinitesimal bezüglich der infinitesimalen Strecke abc ist.



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

SUPRA INVIDIAM

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

METHODUS
INVENIENDI CURVAS
MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE GAUDENTES.

CAPUT PRIMUM.

De Methodo maximorum & minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere.

DEFINITIO I.

1. METHODUS *maximorum & minimorum ad lineas curvas applicata*, est methodus inveniendi lineas curvas, quæ maximi minimive proprietate quapiam proposita gaudeant.

COROLLARIUM I.

2. Reperiuntur igitur per hanc methodum lineæ curvæ, in quibus proposita quæpiam quantitas maximum vel minimum obtineat valorem.

COROLL. II.

3. Cum autem eadem curva infinitis modis sui similis effici queat, Problema, nisi quædam restrictio adhibeatur, maxime esset indeterminatum, atque adeo nullum. Quæcunque enim curva præbeatur maximi minimive proprietate prædita, semper alia, illi quidem vel similis vel dissimilis, exhiberi posset, quæ illam proprietatem, vel majorem, vel minorem, in se contineret.

COROLL. III.

4. Quoniam igitur adæquata curvarum cognitio postulat, ut eæ ad axem aliquem positione datum, ejusque portiones quascunque quæ abscissæ vocantur, referantur: prima eaque præcipua restrictio ex quantitate abscissæ petenda erit.

COROLL. IV.

5. Problemata ergo ad methodum hanc pertinentia ita proponi debent, ut quærantur lineæ curvæ ad axem positione datum relatæ, quæ inter omnes alias curvas eidem abscissæ respondentes maximi minimive proprietate sint præditæ.

SCHOLION.

6. Hæc itaque Methodus maximorum & minimorum maxime discrepat ab illa, quam alibi exposuimus. Ibi enim, pro data ac determinata linea curva, locum determinavimus, ubi proposita quædam quantitas variabilis ad curvam pertinens fiat maxima vel minima. Hic autem ipsa linea curva quæritur, in qua quantitas quædam proposita fiat maxima vel minima. Methodus hæc jam superiori Seculo, mox post inventam Analysin infinitorum, excoli cœpit a Celeb. Fratribus BERNOULLIIS, atque ex eo tempore maxima cepit incrementa. Primum quidem Problema, quod ex hoc genere est tractatum, ad Mechanicam respiciebat, eoque quærebatur linea curva super qua grave descendens citissime delabatur; cui *Curvæ brachystochronæ* seu *Lineæ celerrimi descensus* nomen erat impositum. In hoc Problemate jam

Wenn die Kurve F extremiert, muß gelten

$$F(abc) - F(ab'c) = 0.$$

Diese Forderung gibt die DGL für die kürzeste Kurve.

Soweit allgemeine Theorie.

Jetzt viele Aufgaben, die von Theorie zu Beispiele gehen:

1. Aufgabe (noch reine Theorie):

Wie sich die Kurvenelemente ändern, wenn man $b \to b'$ macht.

[Übernehmen von Cantor Seite 861]

Hierbei wird schon Prinzip verwendet, daß virtuelle Zeitverrückung 0 ist:

nämlich $\delta x = 0$, siehe Abb 141 auf S 861 in Cantor.

2. Aufgabe: allgemeine Formel für Extremalkurve.

Jetzt Beispiele:

Kürzeste Linie in der Ebene? Gerade!

Welcher Rotationskörper hat geringsten Strömungswiderstand?

Lösung: dieselbe wie bei Newton.

Aufgabenstellung kann kaum Zufall sein:

Euler wußte, das Newton (nicht Bernoulli) das erste Variationsproblem gestellt und gelöst hat.

Warum nennt er ihn nicht (wenigstens im historischen Teil der methodus inveniendi)?

Möglicher Grund: Abneigung gegen Newton nach dessen Verhalten im Prioritätsstreit mit Leibniz.

Auch löst Euler bereits ein isoperimetrisches Problem:

Extremum unter Nebenbedingungen:

Was ist die geschlossene Kurve (Variationsproblem) gegebener, fester Bogenlänge (Nebenbedingung), die eine maximale Fläche umschließt (Extremum).

Antwort: der Kreis.

Idee: man kann nicht einen Kurvenpunkt b allein variieren, dadurch würde die Nebenbedingung verletzt.

Variiere also einen infinitesimal benachbarten Punkt so mit, daß Nebenbedingung erfüllt bleibt.

Gibt zwei Glgen, Elimination, DGL der Kurve.

Weitere Kapitel des sehr langen Artikels bauen diese Ideen weiter aus, geben aber wenig neues.

1753 gibt Euler als Anwendung dieser recht schweren Methode an einem leichten Beispiel mit wohlbekannten Ergebnissen:

sphärische Trigonometrie.

Eulers Methodus Inveniendi

in Oswalds Klassiker Nr. 46, "Abhandlungen über Variationsrechnung," 1. Teil.

Eulers Titel: "Methode Curven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt."

Beachte: Das Original von 1744 in Latein.

In Anmerkung 6 erklärt er den Unterschied zur normalen Min/Max-Rechnung:

“Dort [bei der Differentialrechnung] sucht man für eine gegebene und bestimmte Curve die $Stelle$, an der eine gegebene, auf die Kurve bezügliche, veränderliche Größe am größten oder kleinsten wird.”

“Hier [bei der Variationsrechnung] sucht man die $Kurve$, in welcher eine gegebene Größe am größten oder kleinsten wird.”

Euler bleibt hier etwas diffus: ihm fehlt der moderne $Funktionalbegriff$, der “eine gegebene Größe für eine Kurve” klar einführt.

Er macht das richtige und benennt Beispiele: Bernoullis Brachistochronenproblem.

Ebenfalls in Anmerkung 6: alle Variationsprobleme erfordern Nebenbedingungen: der schnellste freie Fall ist der vertikale. Also ist die Brachistochrone eine vertikale Gerade...

Nein, denn man fordert die kürzeste Fallzeit zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2), wo $x_1 \neq x_2$ sein soll.

Moderne Ausdrucksweise: keine Variation der Endpunkte.

Def *isoperimetrische Probleme* (nach Bernoulli): “Man sucht dabei die Kurve, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzt, nicht unter allen Kurven, die” [durch zwei oder mehr gegebene Punkte gehen], “sondern unter denen, welche dieselbe Länge haben.”

Klassische Aufgabe: In welche Form muß ein Seil gegebener Länge gelegt werden, damit es eine maximale Fläche überdeckt? (Schäferproblem).

Modernes und erst sehr spät vollständig gelöstes Problem: Flughafenproblem.

Man kann statt einer (gleiche Länge) natürlich auch n Nebenforderungen an die gesuchte Kurve stellen.

Die Eulersche Differentialglg

Notation: sei $y = y(x)$ die gesuchte Kurve. Euler nennt $y' = p, y'' = q, y''' = r, y'''' = s$ usw.

Mit diesem einfachen algebraischen Trick gelingt ihm, alle Differential von y wegzubekommen:

Nämlich $dy = p\,dx$, und weiter:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx},$$

also

$$d^2y = dp\,dx = q\,dx^2.$$

Entsprechend

$$d^3y = rdx^3.$$

Als nächstes werden Bogenlänge, ihre Differentiale und der Krümmungsradius mit p, q, r, s algebraisch ausgedrückt.

Nach einer etwas diffusen Diskussion gelangt Euler zum Funktionalbegriff und führt damit (!) die Variationsrechnung auf die klassische Min-Max-Rechnung zurück:

“Wir haben eine Größe W, deren Wert in der gesuchten Kurve ein Maximum oder Minimum sein soll, und es ist also W die Formel des Maximums oder Minimums.” [Funktional!]

“Es ist also die Formel des Maximums oder Minimums W eine gewisse Funktion der beiden Veränderlichen x und y. In W können nicht nur x und y, sondern auch alle Größen, die von ihnen abhängen, wie p, q, r, s. Sogar aus diesen Größen gebildete Integralformeln können, ja müssen in W vorkommen (Funktional!), wenigstens wenn die Aufgabe eine bestimmte sein soll, wie wir bald zeigen werden."

"Ist daher eine solche Formel W oder eine Funktion von x und y vorgelegt, so verlangt man eine solche Gleichung zwischen x und y, daß, wenn in W der Wert von y, ausgedrückt durch x, eingesetzt wird, der Wert von W größer oder kleiner ausfällt, als wenn man irgend eine andere Gleichung zwischen x und y angenommen hätte."

"So lassen sich Aufgaben der Kurvenlehre auf die reine Analysis zurückführen."

Daß Integrale in W vorkommen müssen (Lehrsatz I), wird in einem Scheinbeweis gezeigt: denn sonst hinge W nur vom *letzten* infinitesimalen Kurvenstück ab (p, q, r, s), es könnte damit keine *insgesamt* kürzeste oder schnellste oder sonstwas Kurve bestimmt werden.

Also

$$W = \int dx f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots).$$

Damit ist Euler wörtlich (!) bei der heutigen Funktionaldef angekommen.

Beachte: W erhält einen $Wert$ (Zahl), sobald für $y(x)$ eine bestimmte Funktion eingesetzt wird. Vorher ist W eine Funktion — von $y(x)$. Es ist dies wirklich ein neues mathematisches Objekt: Funktional.

Jetzt die zentrale und überraschende Lsg-Idee (von Bernoulli):

Lehrsatz II: Wenn eine Kurve ein Funktional minimiert/maximiert, dann auch jeder beliebig kleine Teil der Kurve.

Beweis: zerlege das Funktionalintegral $\int dx$ in eine Summe von Integralen über beliebige Subintervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Dieselbe Nebenbedingung wie an den äußersten Integrationsgrenzen soll an den Intervallgrenzen gelten, konkret: $y, y', y'', \ldots$ werden nicht variiert. Jeder Beitrag zum Integral hängt dann nur von Funktionswerten innerhalb des jeweiligen Intervalls ab (und nicht von der Kurvenvariation im Nachbarintervall), nämlich rein algebraisch von x, y, q, r, s, t. Also sind alle Summanden (im Funktionalintegral) unabhängig. Wenn also die Summe maximal sein soll, muß jeder Summand maximal sein.

Man sieht: wenn in $f(x, y, y', y'', \ldots)$ selbst schon Kurvenintegrale auftauchen, gilt dieser Satz nicht. (Lehrsatz III).

Lehrsatz IV: Wenn $f(x)$ das Funktional W minimiert, und $g(x)$ unterscheidet sich nur sehr wenig von $f(x)$, dann ist $W[f] = W[g]$.

Beweis: trivial: Änderung des Funktionals an einem Extremum ist Null.

Aber: es ist nicht definiert, was “g unterscheidet sich sehr wenig von f” bedeutet.

Euler: “Eine solche sehr wenig abweichende Kurve erhalten wir, wenn wir annehmen, daß nur der unendlich kleine Bogen mno variiert und an seine Stelle der Bogen $m\nu o$ gesetzt wird.”

Heutzutage: $g = f + \delta f$. Darf für alle x infinitesimal abweichen, nicht nur in einem infinitesimalen Intervall dx (unendlich kleine Bogen).

Zusammenfassend, Euler: nur in einem unendlich kleinen Intervall dx wird die Kurve um unendlich kleine $dy(x)$ (Bogen) variiert. (Item 59 in Ostwald)

Die Methode ist also: setze eine solche Bogenänderung $\delta y(x)$ in der Kurve $y(x)$ an und fordere, daß die Funktionaländerung $\delta W = 0$ ist. Dies gilt nur für die gesuchte, das Funktional minimierende Kurve $y_0(x)$. (Item 61 in Ostwald)

Dies ist auch die heutige Methode (abgesehen von der Variation der ganzen Kurve).

Euler erklärt nun etwas umständlich, daß diese infinitesimalen Kurvenänderungen auch wieder durch gewöhnliche Differentiale dargestellt werden können: ist elementar.

Erster Fall: Sei $W = \int dx f(x, y(x))$ (keine Ableitungen!). Welches $y(x)$ minimiert/maximiert W?

Lösung (etwas anders als Euler): variiere y bei festgehaltenem x.

Jede Änderung von x kann in Änderung von y gesteckt werden.

Also

$$0 = \delta W = \int dx f(x, y(x) + \delta y(x)) - \int dx f(x, y(x)).$$

Hier ist keine Vertauschung $\delta \int = \int \delta$ nötig:

δW ist durch die rechte Seite definiert.

Weil δy laut Voraussetzung infinitesimal ist, gilt

$$0 = \delta W = \int dx \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x).$$

Da $\delta y(x)$ beliebig ist, kann dies nur gelten für

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Der letztere Schluß wird erst heutzutage bewiesen:

Fundamentallemma der Variationsrechnung.

In früheren Jhd hielt man ihn für evident.

Euler diskutiert dann, daß der Fall $f = f(x,y)$ [keine Differentiale] auch ohne Variationsrechnung, mit klassischer Differentialrechnung gelöst werden kann.

Aufgabe III: Variationsproblem der Mechanik. Minimiere

$$W = \int dx f(x, y, y').$$

Da wieder $\delta x = 0$, gilt

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'.$$

Da die folgende Gleichung vielleicht die wichtigste der Physik ist, folgen wir Euler sehr genau:

Er diskretisiert die x-Achse in konstante dx-Intervalle, schreibt damit das Funktional als Summe (Laufindex i),

$$W = \ldots + f_0 dx + f_1 dx + \ldots$$

Die Differentiale in f seien als rechtsseitig angenommen.

Euler ändert (variiert) $y(x)$ nur an der Intervallgrenze x_1 um δy_1.

Dies beeinflußt (bei rechtsseitigen Differentialen) nur die Glieder f_0 und f_1.

Also ist $dy_0 = 0$ und $dy_1 = \delta y_1$ und

$$dy_0' = \frac{y_1 + \delta y_1 - y_0}{dx} - \frac{y_1 - y_0}{dx} = +\frac{\delta y_1}{dx},$$
$$dy_1' = \frac{y_2 - (y_1 + \delta y_1)}{dx} - \frac{y_2 - y_1}{dx} = -\frac{\delta y_1}{dx}.$$

Einsetzen gibt

$$
\begin{aligned}
0 = \delta W &= \delta f_0 dx + \delta f_1 dx \\
&= 0 + \frac{\partial f(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \frac{\delta y_1}{dx} \\
&\quad + \frac{\partial f(x_1, y_1, y_1')}{\partial y} \delta y_1 - \frac{\partial f(x_1, y_1, y_1')}{\partial y'} \frac{\delta y_1}{dx} \\
&= -\frac{d}{dx} \frac{\partial f(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \delta y_1 + \frac{\partial f(x_1, y_1, y_1')}{\partial y} \delta y_1 \\
&\equiv \left(-\frac{d}{dx} \frac{\partial f(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} + \frac{\partial f(x_0, y_0, y_0')}{\partial y} \right) \delta y_1 .
\end{aligned}
$$

In der vorletzten Glg wurde die Definition des (rechtsseitigen) Differentials benutzt.

In der letzten Glg wurde benutzt: "anstelle von $\partial f / \partial y_1$ kann man $\partial f / \partial y_0$ schreiben."

Denn der Unterschied ist ein Differential zweiter Ordnung, wir betrachten hier aber solche Krümmungsterme als klein.

Übung: darüber nachdenken.

Weil nun δy_1 beliebig ist, muß obige Klammer verschwinden.

Weil der Ort x_0 beliebig ist, gilt also:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Diese DGL steht genauso bei Euler, lediglich mit der algebraischen Umbenennung $\partial f/\partial y = N$ und $\partial f/\partial y' = P$.

Sie heißt daher zu Recht Eulersche DGL.

So auch in der Variationsrechnung genannt.

In der Physik etwas falsch Lagrangeglg oder wenigstens Euler-Lagrang-Glg.

“Durch diese Gleichung wird die Natur der gesuchten Kurve ausgedrückt.”

Beachte: dies ist DGL zweiter Ordnung.

Beispiel: Unter allen Kurven zwischen zwei festen Punkten die kürzeste zu finden.

Kurvenlänge

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}.$$

Also Funktional

$$W = \int dx \sqrt{1+y'^2}.$$

Hier $f = f(y')$ ohne x und y.

Also Eulerglg

$$0 = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Kleine Rechnung gibt $y'' = 0$, also verschwindende Krümmung, also ist $y(x)$ eine Gerade.

Die allgemeine Eulerglg

Sei nun $f = f(x, y, y', y'')$, und $W = \int dx f$ zu minimieren. Wie lautet die Eulerglg?

Bei Euler: Aufgabe IV in Abschnitt II. Wir folgen diesem wieder sehr eng, aber mit eigenen Bezeichnungen.

Lösung: schreibe

$$W = (\ldots + f_0 + f_1 + f_2 + \ldots)dx \qquad (1)$$

Alle Differentiale seien wie bei Euler rechtsseitig:

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{dx},$$
$$y_0'' = \frac{y_1' - y_0'}{dx} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{dx^2},$$

usw.

Es wird nun die Fkt $y(x)$ nur am Punkt x_2 um δy verändert. (Index jetzt gleich weggelassen.)

In der Funktionalsumme (1) erfahren dann nur die Terme f_0, f_1, f_2 eine Änderung.

Und zwar ist

$$\begin{aligned}
dy_2 &= \delta y, \qquad & dy_2' &= -\frac{\delta y}{dx}, \qquad & dy_2'' &= \frac{\delta y}{dx^2}, \\
dy_1 &= 0, \qquad & dy_1' &= \frac{\delta y}{dx}, \qquad & dy_1'' &= -\frac{2\delta y}{dx^2}, \\
dy_0 &= 0, \qquad & dy_0' &= 0, \qquad & dy_0'' &= \frac{\delta y}{dx^2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen gibt

$$
\begin{aligned}
0 = \delta W &= (\delta f_0 + \delta f_1 + \delta f_2) dx \\
&= \left(\frac{\partial f_0}{\partial y''} \frac{1}{dx^2} + \frac{\partial f_1}{\partial y'} \frac{1}{dx} - 2 \frac{\partial f_1}{\partial y''} \frac{1}{dx^2} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial f_2}{\partial y'} \frac{1}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial y''} \frac{1}{dx^2} \right) \delta y \, dx \\
&= \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f_1}{\partial y'} + \frac{d}{dx^2} \frac{\partial f_0}{\partial y''} \right) \delta y \, dx .
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde $f_0 = f(x_0, y_0, y_0', y_0'')$ eingeführt usw.

Man darf wieder f_2 und f_1 durch f_0 ersetzen, und dann den Index 0 weglassen.

Da $\delta y \neq 0$, muß die Klammer verschwinden, also:

$$
\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} = 0}
$$

Damit ist auch die allgemeine Eulerglg für $f = f(x, y, y', y'', y''', \ldots)$ klar.

Lagrange-Multiplikatoren

Im dritten Abschnitts seiner Arbeit behandelt Euler isoperimetrische Probleme.

Erinnerung: alle Kurven sollen hier eine gemeinsame Eigenschaft haben – heute sagt man: eine Nebenbedingung (Physik: Zwangsbedingung) erfüllen. Z.B. gleiche Länge haben.

Historisch: Euler nennt solche Probleme "relativ," die bisherigen (ohne Nebenbedingung) dagegen "absolut." Ein Beispiel für ein relatives Problem ist das isoperimetrische: suche unter allen Kurven, die gleiche Länge haben, diejenige die... Der Name dieses Beispiels hat sich für die ganze Klasse durchgesetzt.

Euler betrachtet nur Fälle, für die wieder das Bernoullische Lemma gilt:

Wenn eine Kurve ein Funktional unter einer NB extremiert, dann tut dies auch jedes ihrer infinitesimalen Kurvenstücke.

Die Lösungsidee (Seite 91 in Ostwald) ist genial anschaulich einfach: (In heutiger Formulierung dagegen nicht mehr: siehe Fließbach "Mechanik" oder Smirnov "Variationsrechnung" in seiner "höheren Mathematik.")

Bisher konnten wir an einzelner Stelle x_1 den Funktionswert y_1 um δy_1 variieren.

Damit wird aber die Kurvenlänge – allgemein: die NB – geändert.

Also muß ein anderer Kurvenpunkt so variiert werden, daß die Kurvenlänge erhalten bleibt.

Euler variiert infinitesimal benachbarte Punkte x_i, x_{i+1}:

Einen, um die gesuchte Kurve $y(x)$ des Variationsproblems zu finden, den anderen, um die NB aufrechtzuerhalten.

Letzteres ist aber auch ein Differentialausdruck: z.B. die Änderung des Längenintegrals bei Variation; und wie die Funktionalvariation (Minimierung!) muß auch dieser Differentialausdruck verschwinden:

"Auf diese Weise erhält man zwei Gleichungen, die eine vermöge der gemeinsamen Eigenschaft, die andere mittels des Ausdruckes des Maximums oder Minimums. Beide haben die Form

$$S\delta y_1 + T\delta y_2 = 0.$$

S und T sind auf die Kurve bezügliche Größen. Eliminiert man aus den beiden Gleichungen δy_1 und δy_2, so erhält man eine Gleichung für die gesuchte Kurve." (Euler S. 92)

Beweise folgenden Satz Eulers: Sei A die (Formel für die) zu extremierende Größe des Variationsproblemes und B die (Formel für die) gemeinsame Kurveneigenschaft (Nebenbedingung). Dann ist die gesuchte Kurve $y(x)$ dieselbe, wenn man A mit B vertauscht: das Variationsproblem und die gemeinsame Eigenschaft dürfen vertauscht werden.

Beispiel: die Kurve, die bei gegebener Länge die größte Fläche umschließt ist dieselbe wie die, die eine gegebene konstante Fläche mit der kürzesten Länge umschließt. Beachte: Min/Max können bei der Vertauschung ineinander übergehen.

Sei nun $\int dx f(x, y(x), y'(x))$ die zu minimierende/maximierende Größe und $\int dx g(x, y(x), y'(x))$ die gemeinsame, integrale Eigenschaft aller Kurven $y(x)$.

Als Neuigkeit ergibt sich

$$\delta y_1' = \frac{y_2 + \delta y_2 - (y_1 + \delta y_1)}{dx} - \frac{y_2 - y_1}{dx} = \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{dx}.$$

Insgesamt ist die Tabelle der Differentiale der Ableitungen, wenn nur $\delta y_1 \neq 0$ und $\delta y_2 \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
\delta y_0' &= \frac{\delta y_1}{dx}, \\
\delta y_1' &= \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{dx}, \\
\delta y_2' &= -\frac{\delta y_2}{dx}.
\end{aligned}
$$

Indem man Funktional und NB-Integral als Summen schreibt und deren Variation Null setzt, folgt

$$
\begin{aligned}
\delta f_0 + \delta f_1 + \delta f_2 = 0, \\
\delta g_0 + \delta g_1 + \delta g_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Es ist z.B.

$$
\begin{aligned}
\delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1'}\delta y_1' \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_2 - \delta y_1 dx.
\end{aligned}
$$

Einsetzen gibt, ähnlich wie zuvor (aber nun mit zwei Variationspunkten)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_0}{\partial y_0'}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial y_1'}\right)\delta y_2 = 0, \\
\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g_0}{\partial y_0'}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g_1}{\partial y_1'}\right)\delta y_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Euler schreibt diese Glgen nur abstrakt-algebraisch mit einem *neuen* Differentialoperator d statt der Klammerterme.

Insbesondere ist die einzige Variable dann y, denn $\delta y'$ wird durch δy ausgedrückt, und x wird nicht variiert.

Mit dem neuen d macht er formale Taylorreihenentwicklung nur nach y.

All dies müßte genauer gezeigt werden. Wir zitieren Fußnote 29 in Ostwalds Klassiker:

"Diese Deduktion [Eulers] kann nicht als streng gelten, denn es ist nicht bewiesen worden, daß man mit den Differentialwerten dA und dB ebenso wie mit gewöhnlichen Differentialen rechnen darf. Euler scheint diesen Einwurf vorausgesehen zu haben, denn er gibt S. 116 eine andere Herleitung, bei welchen der Gebrauch von Differentialwerten vermieden wird. Aber auch diese ist nicht stichthaltig, denn sie zeigt nur, daß man Kurven der verlangten Art erhält, wenn man $\delta f + \lambda \delta g$ nach der absoluten Methode behandelt, aber es bleibt fraglich, ob man auf diese Weise alle Kurven erhält. Eine strengere Herleitung findet man bei Bertrand, Liouville's Journal (1842)."

Äquivalent zu den Eulerschen Differentialwerte dA führen wir einen prime-Operator ein,

$$\frac{\delta f}{\delta y} = f' = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Wir nehmen wie Euler an, daß $\delta/\delta y$ die Eigenschaften eines gewöhnlichen Differentials hat.

Die Determinante des Glgs-systems muß verschwinden,

$$f_1' g_2' - f_2' g_1' = 0,$$

also

$$\frac{f_2'}{f_1'} = \frac{g_2'}{g_1'} = -\frac{\delta y_1}{\delta y_2}.$$

Die letzte Glg folgt durch Einsetzen ins Glgs-system.

Zentral nun: der Unterschied benachbarter Punkte ist ein zweites Differential,

$$f_2' = f_1' + f_1''\, p_1,$$
$$g_2' = g_1' + g_1''\, p_1.$$

Auf den Differentialausdruck p_1 sei verzichtet, er hebt sich im folgenden. (Bei Euler ist er fälschlicherweise 1 gesetzt.)

Einsetzen in die Determinantenbedingung gibt

$$\frac{f_1''}{f_1'} = \frac{g_1''}{g_1'}.$$

Der Index ist ab hier (zuvor nicht!) auf einer Gleichungsseite immer derselbe, kann also weggelassen werden.

Sei zur Abkürzung $a = f'$ und $b = g'$; multipliziere die Glg mit δy

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b}.$$

Formales Integrieren gibt, mit einer Konstanten λ,

$$\ln a = \ln b + \ln \lambda,$$

oder

$$a = \lambda b,$$

Rück-Einsetzen gibt

$$f' - \lambda g' = 0.$$

Ausschreiben der Ableitungen führt auf die Aussage (dabei hat sich $\lambda \to -\lambda$ eingebürgert):

Es *existiert* eine Konstante λ (Lagrangemultiplikator!), so daß

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0}$$

So auf Seite 100 in Eulers Artikel (Ostwald Klassiker.)

Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren taucht also schon bei Euler auf!

Dies wird sehr selten in Büchern festgestellt.

Euler: "Die Konstante λ ist nicht willkürlich, sondern aus der vorgelegten Bedingung bestimmt."

Die obige Glg gibt dann die DGL für $y(x)$.

Größte umspannte Fläche bei gegebenem Umfang

Leichte Umformulierung des isoperimetrischen Problems:

Unter allen Kurven derselben Länge, welche die Punkte x_1, x_2 verbinden, die zu finden, welche die größte Fläche einschließt. (Euler Seite 104)

Die gemeinsame Eigenschaft ist die Bogenlänge (alle Integrale von x_1 bis x_2)

$$\int dx\, g(y') = \int dx \sqrt{1+y'^2} = const.$$

Der prime-Operator lautet

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\sqrt{1+y'^2}}{\partial y'} = -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Das Variationsproblem lautet: maximiere die Fläche

$$\int dx f(y) = \int dx y.$$

Der prime-Operator lautet

$$1.$$

Also ist die Eulerglg

$$-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \lambda = 0.$$

Also

$$dx = d\frac{y'}{\lambda\sqrt{1+y'^2}}.$$

Integrieren

$$x + c = \frac{y'}{\lambda\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Auflösen nach y'

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x + c}{\sqrt{\lambda^{-2} - (x + c)^2}}.$$

Dies kann elementar integriert werden,

$$y = d \pm \sqrt{\lambda^{-2} - (x + c)^2}.$$

Also

$$\lambda^{-2} = (x + c)^2 + (y - d)^2.$$

Dies ist die Kreisgleichung.

Im folgenden Kapitel leitet Euler die DGL ab für den Fall, daß beim Variationsproblem n Nebenbedingungen in Integralform zu erfüllen sind.

Dies führt auf n verschiedene Lagrangesche Multiplikatoren.

Eine unangebrachte Wertung der Eulerschen Arbeit ist also die durch Cantor:

"Die Variationsrechnung hatte durch Euler einen gewissen Abschluß gefunden, doch verdient sie in diesem Zustand den Namen Rechnung noch nicht, weil geometrische Überlegungen zu sehr im Vordergrund der Untersuchung stehen."

Unser Gegenurteil: gerade die geometrischen Überlegungen sind einfach und einleuchtend; und die resultierenden Glgen exakt die noch heute (nach Lagrange) verwendeten: Eulerglg; Lagrangemultiplikatoren.

So auch im Anhang von Ostwalds Klassikern. Die (einfache) Eulersche Methode versagt in Fällen, in denen das Bernoullische Lemma nicht gilt. Dann ist die Lagrangesche analytische Methode überlegen.

Lagrange

"Versuch einer neuen Methode um die Maxima und Minima unbestimmter Integralformeln zu bestimmen." Erschienen 1762

1. Die Euler-Lagrange-Glg

Etwas unklar: es werden zwei Arten von Differentialen gebraucht, d und δ.

Für beide gelten die gewöhnlichen Differentiationsregeln, z.B. wenn $y = x^m$, dann

$$dy = mdx,$$
$$\delta y = m\delta x.$$

Zweitens ist unpraktisch, daß Lagrange $f(x, y, dy)$ zuläßt.

Im folgenden mit $f(x, y, y')$.

Drittens ist seine völlige Allgemeinheit der Variablenabhängigkeit beim ersten Lesen eher verwirrend.

Viertens schreibt er $\int Z$ statt $\int dxZ$, was die Rechnung wegen δdxZ undurchsichtig macht.

Lagrange beginnt mit dem Extremalproblem

$$\delta \int dxf(x, y, y') = 0.$$

Dies sei äquivalent zu

$$\int dx\delta f(x, y, y') = 0.$$

Es ist (mit $f_x = \partial f/\partial x$ usw.)

$$\delta f = f_x\delta x + f_y\delta y + f_{y'}\delta y'$$

Also ist die Forderung

$$\int dx[f_x\delta x + f_y\delta y + f_{y'}\delta y'] = 0.$$

Zitat: “Man begreift leicht, daß

$$\delta dx = d\delta x, \qquad \delta d^2 x = d^2\delta x.$$

Also

$$\begin{aligned}\int dx f_{y'}\delta y' &= \int dx f_{y'}\delta\frac{dy}{dx},\\ &= \int dx f_{y'}\frac{d}{dx}\delta y,\\ &= f_{y'}\delta y - \int dx\frac{df_{y'}}{dx}\delta y,\end{aligned}$$

mit partieller Integration in der letzten Zeile.

Also wird das Variationsproblem zu

$$\int dx f_x\delta x + \int dx\left[f_y - \frac{d}{dx}f_{y'}\right]\delta y + f_{y'}\delta y = 0.$$

Lagrange diskutiert jetzt etwas verquer den dritten, Nichtintegralterm; sowie daß die zwei Integranden selbst Null sein müßten, wenn die $\delta x, \delta y$ unabhängig wären.

Wir benutzen gleich die moderne Argumentation:

(i) Keine Variation an den Endpunkten des Integrals: $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$.

(ii) Keine Variation von x, weil sie durch Variation von y dargestellt werden kann [Zeichnung].

(iii) Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt dann, was Lagrange einfach “sieht”: der Integrand muß verschwinden,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Bei Lagrange liest sich dies, fast genau wie bei Euler,

$$N - dP = 0.$$

Wir haben hier nicht behandelt Lagranges Mitnahme beliebig vieler Variablen $x, y, z, \ldots$, wo Euler nur x hatte.

2. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Diese wird erst in einem Anhang entwickelt, und eher beispielhaft, nicht systematisch: Seite 23f in Ostwalds Klassikern.

Lagrange sucht hier die Form der kleinsten Oberfläche, die ein gegebenes Volumen umschließt.

Er schreibt das Volumenelement als

$$z\,dx\,dy,$$

wobei also $z = z(x, y)$ der Körperdurchmesser an gegebener Stelle x, y ist.

Wegen konstantem Volumen ist die Volumenvariation Null (so auch bei Euler),

$$\delta \int dx\,dy\,z = 0.$$

Also einfach

$$\int dx\,dy\,\delta z = 0. \tag{2}$$

Nun soll die Oberfläche ein Extremum sein.

Um dies zu formulieren, wird die Fläche $z = z(x, y)$ vermittels ihrer Differentiale dargestellt,

$$dz = pdx + qdy,$$

mit $p = \partial z/\partial x$ und $q = \partial z/\partial y$.

Übung: zeige, daß dann ein Oberflächenelement gegeben ist durch

$$dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Also ist gefordert

$$\delta\iint dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}=0.$$

Eine längere Rechnung zeigt, daß dies äquivalent ist zur Forderung

$$\iint dx\,dy\,\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right]\delta z=0, \tag{3}$$

mit

$$P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$Q=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Daraus folgt, als Lsg der reinen Flächenvariation,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0.$$

Lagrange kehrt jedoch zu den Integralen zurück;

es kommt, ganz unscheinbar, der Trick des Lagrangeschen Multiplikators: (Seite 23 unten)

“Wenn man (2) mit irgendeinem Koeffizienten k multipliziert und zu (3) hinzufügt, erhält man

$$\iint dx\,dy\,\left[k + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right]\delta z = 0,$$

woraus man die allgemeine Glgeichung zieht”

$$k + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Dies ist aber genau die Eulersche Glg für Variation unter Nebenbedingungen.

Diese Logik wird auch heute angewandt: Jede Nebenbedingung $Z_1 = const, Z2 = const, \ldots$ läßt sich als $\delta Z_1 = \delta Z_2 = 0$ schreiben, also ebenso wie das Variationsproblem $\delta Z_0 = 0$.

Variiere jede NB und multipliziere sie mit einem λ_i und addiere dies zur eigentlichen Variation des Extremalproblems und setze den gesamten Ausdruck Null.

Der weitere Verlauf der Rechnung gibt als Lsg: die Kugel.

Teil VI: Die nichteuklidsche Geometrie

Nach Goeschenband von Baldus

1. die euklidschen Axiome der Ebene

A1. Zwischen zwei Punkten gibt es genau eine Gerade.
A2. Jede Gerade kann beliebig verlängert werden.
A3. Um jeden Punkt kann man, für gegebenen Radius r, genau einen Kreis ziehen.
A4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
A5. Ziehe zwei Gerade 1 und 2. Ziehe eine dritte Gerade 3, die 1 und 2 kreuzt. Ist die Summe der Innenwinkel an den Geraden-Schnittpunkten 1-mit-3 und 2-mit-3 in einer der beiden durch Gerade 2 definierten Halbebenen kleiner als zwei rechte, dann schneiden sich Gerade 1 und 2 in dieser Halbebene.
A5 heißt Parallelenaxiom: ist die Winkelsumme der Geradenschnitte in beiden Halbebenen jeweils zwei rechte, dann sind 1 und 2 parallel.
Bis etwa zum Jahr 1800 gab es Versuche, A5 zu beweisen.
Anderes Problem: bei Euklid werden stillschweigend Axiome vorausgesetzt:
Kongruenz wird einfach so verstanden, ohne Bewegung geometrischer Objekte in der Ebene einzuführen.

Im Lauf der Jahrhunderte wurden Alternativen zu A5 formuliert, aus denen *zusammen* mit A1 bis A4 wiederum A5 folgt:
A5'. Trifft eine Gerade eine von zwei Parallelen, trifft sie beide
A5". Die Menge aller Punkte, die gleichweit von einer Geraden liegen, bilden zwei Geraden.
A5"'. Die Winkelsumme im Dreieck ist zwei rechte.
A5"". Es gibt zwei ähnliche, nicht kongruente Dreiecke.
Nichteuklidsche Geometrie ist Geometrie ohne A5 (oder seine Varianten).
Entdecker: Gauß (1777-1855) bis 1816, aber unveröffentlicht; jedoch erhalten.
Lobatschefskij (1793-1856) um 1823.
Bolyai (1802-1860) um 1823.

2. Axiome der absoluten ebenen Geometrie

D.h. vollständiges Axiomensystem aber ohne A5.
Die hieraus folgenden Sätze gelten also auch in der hyperbolischen Geometrie (Relativitätstheorie "der Ebene").
Hilbert "Grundlagen der Geometrie".

A	Anordnungsaxiome	(6)
B	Dimensionsaxiom	(1)
C	Kongruenzaxiome	(6)

D Axiome des Messens (2)
Diese 15 Axiome machen die absolute Geometrie aus. Nimmt man
E das fünfte euklidsche Axiom (1)
hinzu, erhält man die euklidsche Geometrie.

2A. Anordnungsaxiome

Def 1. Geometrie handelt von *Punkten* (Objekten) A,B,C, wovon jeweils drei in einer *Zwischen*relation stehen können: ABC heißt B liegt zwischen A und C.
Def 2. Die Menge aller Punkte, die zwischen A und B liegt plus A und B selbst bilden eine *Strecke* AB$= a$.
Def 3. Drei Punkte A,B,C, die in keiner Zwischenrelation stehen, bestimmen ein *Dreieck* (mit Ecken A,B,C und Seiten a, b, c).
Def 4. Für gegebene A,B ist die Menge aller Punkte C so daß ACB, CAB, ABC (abgekürzt [ABC]) gilt, eine *Gerade*.
Def 5. Zwei Gerade ohne einen gemeinsamen Punkt heißen *parallel*.
A1. Es gibt drei Punkte R,S,T, die in keiner Zwischenbeziehung stehen.
A2. Für beliebige Punkte A,C gibt es mindestens einen Punkt B, so daß ABC.
A3. ABC $\rightarrow$ CBA.

A4. Unter drei Punkten gibt es höchstens einen, der zwischen den beiden anderen liegt.
A5. Aus [ABC] und [ABD] folgt [BCD]: Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.
A6. Wenn i) A,B,C in keiner Zwischenbeziehung stehen und für D,E gilt ii) ADB und iii) ACE, dann enthält die Gerade durch DE mindestens einen Punkt der Strecke BC. *Zeichnung*
Mit diesen Axiomen allein kann man beweisen
T1. Jede Strecke enthält unendlich viele Punkte.
T2. Es gibt unendlich viele Geraden.

2B. Dimensionsaxiome

Def 6. Es sei irgendein Dreieck ABC gegeben. Die Menge aller Geraden, die durch irgendwelche zwei Punkte auf den Dreiecksseiten gehen, bilden eine *Ebene*.
B. Jeder Punkt gehört zur Ebene jedes Dreiecks ABC. Es gibt also nur eine Ebene.

2C. Kongruenzaxiome

D.h. Gleichheit von Streckenlängen und Winkeln.
Def 7. Zwei Strecken können in einer *Kongruenz*relation stehen.

Def 8. Zwei Strecken a, b, die einen gemeinsamen Eckpunkt O haben, nennt man Winkel $\angle(a, b)$ oder $\angle AOB$, wenn A (B) Punkt auf a (b).
Def 9. Zwei Winkel können in einer *Kongruenz*relation stehen.
C1. Ist AB eine Strecke und a' eine Gerade durch einen Punkt A', dann gibt es genau zwei Punkte B',B" auf a', so daß AB = A'B' und AB = A'B". Beachte: das Gleichheitszeichen (der Geometrie) wird hier erst definiert und bedeutet Streckenkongruenz.
C2. Aus AB=CD und CD=EF folgt AB=EF.
C3. Gegeben zwei Drecke ABC und A'B'C' mit AB=A'B' und BC=B'C'. Dann gilt AC=A'C'.
C4. Sei $\angle(h, k)$ gegeben und Strecke a mit Eckpunkt A. Dann gibt es genau zwei Halbgeraden b, c mit Eckpunkt A so daß $\angle(h, k) = \angle(a, b) = \angle(a, c)$.
C5. $\angle(h, k) = \angle(h, k)$.
C6. Gegeben zwei Dreiecke mit zwei kongruenten Seiten und kongruentem Winkel zwischen den beiden Seiten. Dann sind die Dreiecke gleich.
Def 10. Nebenwinkel $= \pi -$ Winkel.
Def 11. Ein Winkel der seinem Nebenwinkel kongruent ist heißt *rechter Winkel.*
Aus den Axiomengruppen A,B,C folgen viele Sätze, z.B.
T1. Alle rechten Winkel sind kongruent (Beweis: Hil-

bert!). Somit ist Eulers A4 kein Axiom mehr sondern ein Satz.
T2. Zu jedem Punkt P und jeder Geraden a gibt es genau eine Normale von P auf a. Beweis etwas eine Seite lang.
T3. Zu jedem Punkt P und jeder Geraden a gibt es mindestens (!) eine Gerade b durch P mit $a \parallel b$. Also *Existenz* der Parallelen in der absoluten Geometrie.
Def 12. Von längeren und kürzeren Strecken. (Kongruente Strecken sind gleich lang.)
Def 13. Von kleineren und größeren Winkeln.
T4. Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte.

2D. Axiome des Messens.

D1. Archimedisches Axiom. Seien A,B,A_1 beliebige Punkte, wobei $\mathsf{AA}_1\mathsf{B}$. Dann gibt es Punkte $A_2, \ldots, A_n$, so daß
(i) $\mathsf{AA}_1 = \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 = \mathsf{A}_2\mathsf{A}_3 = \ldots = \mathsf{A}_{n-1}\mathsf{A}_n$.
(ii) $\mathsf{A}_{n-1}\mathsf{BA}_n$.
In Worten: es gibt immer ein Vielfaches einer kurzen Strecke, das länger als eine lange Strecke ist.
Wichtig: dieses Axiom erlaubt Längenmessung, statt bisher nur Längenvergleich. Man braucht dazu noch als Hilfsdefinition:
Def 14. Längen addieren sich entlang einer Geraden.

D2. Cantorsches Axiom. Gegeben sei eine Gerade mit zwei unendlichen Punktfolgen A_i und B_i darauf, so daß i) jede Strecke $A_{i+1}B_{i+1}$ in der Strecke A_iB_i enthalten ist und ii) die Streckenlänge gegen 0 konvergiert. Dann liegt genau ein Punkt in allen A_iB_i.
Bemerkung: Stetigkeitsaxiome... Weierstraß und Dedekind...
Hauptsatz der absoluten Geometrie: Aus den Axiomengruppen A bis D folgt: die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner oder gleich zwei rechten.
Beachte: sphärische Trigonometrie gehört also nicht zur absoluten Geometrie: die Winkelsumme im Dreieck ist größer als zwei rechte.
Übung: welches der obigen Axiome verletzt die sphärische Trigonometrie?
Der obige Satz, daß bei Verzicht auf das euklidsche Parallelenaxiom die Winkelsumme im Dreieck $\leq$ zwei rechten ist, wurde erstmals von Giovanni Saccheri (1667-1733) bewiesen (Jesuit; Professor für Philosophie, Theologie und Mathematik in Pavia).
Siehe A. M. Dou, "Logical and historical remarks on Saccheri's geometry," Notre Dame Journal of Formal Logic, Band 11 (1970), Seite 385-415.

2E. Euklids Parallelenaxiom.

E. Zu jeder Geraden gibt es *höchstens* eine Parallele

durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt.
Nach obigem T3 gibt es $mindestens$ eine Parallele; somit also $genau$ eine.