Gödel in class

Achim Feldmeier

Brno - Oct 2010

Leistungsanerkennung

FAQs

Studiumplus-Team

Kooperationspartner

Formulare

Archiv

Kontakt

Universität Potsdam
AG Studiumplus
Koordination: Dr. Ljuba Kirjuchina
Am Neuen Palais 10

Selbst-Reflexion und Planung

Kompetenzerwerb
Kompetenz, struktur- und inhaltsbezogene sowie soziale Aspekte von Lehrveranstaltungen zu reflektieren:

- Verständnis für Hochschullehre als Interaktion
- Fähigkeit, das Lehr-Lern-Verhältnis bewusst mitzugestalten

Fähigkeit, Lebenspläne und persönliche Projekte zu entwerfen und zu realisieren:

- Grundlagen der Selbstorganisation
- Planungskompetenz (Fähigkeit, Ziele zu präzisieren und Prioritäten zu setzen)
- Verständnis für Zeit- und Ressourcenmanagement
- Kognitive Kompetenz und Bereitschaft zu lebenslangem Lernen (Inkompetenzkompensationskompetenz)
- Urteilskompetenz (Fähigkeit, die Ergebnisse einer Tätigkeit zu evaluieren, aus vergangenen Handlungen zu nötige Korrekturen vorzunehmen)

Neue Funktionen Anmelden / Benutzerkonto erstellen

WIKIPEDIA
Die freie Enzyklopädie

Hauptseite
Über Wikipedia
Themenportale
Von A bis Z
Zufälliger Artikel

Mitmachen
Hilfe
Autorenportal
Letzte Änderungen
Kontakt
Spenden

Drucken/exportieren

Werkzeuge

Artikel Diskussion Lesen Bearbeiten Versionsgeschichte Suche

Inkompetenzkompensationskompetenz

Der Begriff „**Inkompetenzkompensationskompetenz**" wurde von dem Philosophen Odo Marquard in dem gleichnamigen Festvortrag geprägt, den er 1973 anlässlich des 60. Geburtstages des katholischen Münchner Philosophen Hermann Krings hielt. Marquard gibt in diesem Vortrag eine selbstironische, kritisch-polemische Einschätzung der Lage der Philosophie der Gegenwart und erläutert in aller Kürze, wie sie in diese Lage gekommen ist.

Bedeutung [Bearbeiten]

Marquard charakterisiert die Geschichte der Philosophie als eine Geschichte des sukzessiven Verlusts von Kompetenzen.

Ursprünglich, in der Antike, sei die Philosophie universell, „kompetent für alles", gewesen. Heute, seit einiger Zeit schon, sei sie *„[...] kompetent nur noch für eines: nämlich für das Eingeständnis der eigenen Inkompetenz."*[1] Dies sei so gekommen, weil die Philosophie drei Herausforderungen, die im Laufe der Geschichte auf sie zukamen, nicht Genüge leisten konnte.

Die erste Herausforderung sei die soteriologische gewesen. Dabei ging es darum, wie die Menschen zum richtigen Leben, zum Heil, geführt werden können. Die Philosophie sei darin schließlich vom Christentum überboten worden und habe noch eine Zeitlang als *ancilla theologiae*, als „Magd der Theologie" überleben können.

Die zweite Herausforderung sei die technologische gewesen. Hier, wo die Philosophie zum Nutzenwissen der Menschen habe führen sollen, sei sie klar durch die exakten Wissenschaften überboten worden und habe noch eine Zeitlang – in Form der Wissenschaftstheorie – als *ancilla scientiae* fungieren können.

Die dritte, jüngste und letzte Herausforderung sei die politische gewesen. Philosophie habe „zum gerechten Glück der Menschen" führen sollen. Diese Funktion sei durch die Praxis der Politik ausgeschaltet worden. Eine Zeitlang sei die Philosophie – in Form einer Geschichtsphilosophie – noch als *ancilla emancipationis* zum Zuge gekommen.

Mit all diesen temporären Ersatzfunktionen sei es aber aus: *„Die Philosophie: sie ist zu Ende; wir betreiben Philosophie nach dem Ende der Philosophie."*[2] Der Philosophie bleibe nur noch eine Kompetenz, eben die Inkompetenzkompensationskompetenz.

Philosophy lost key competence

to specialized disciplines:

right life (happyness, morals)

Christianity

science and technology

Natural Sciences

social issues

Politics

Scientists not interested in administrational issues
want to do science
how can we help with science in education?

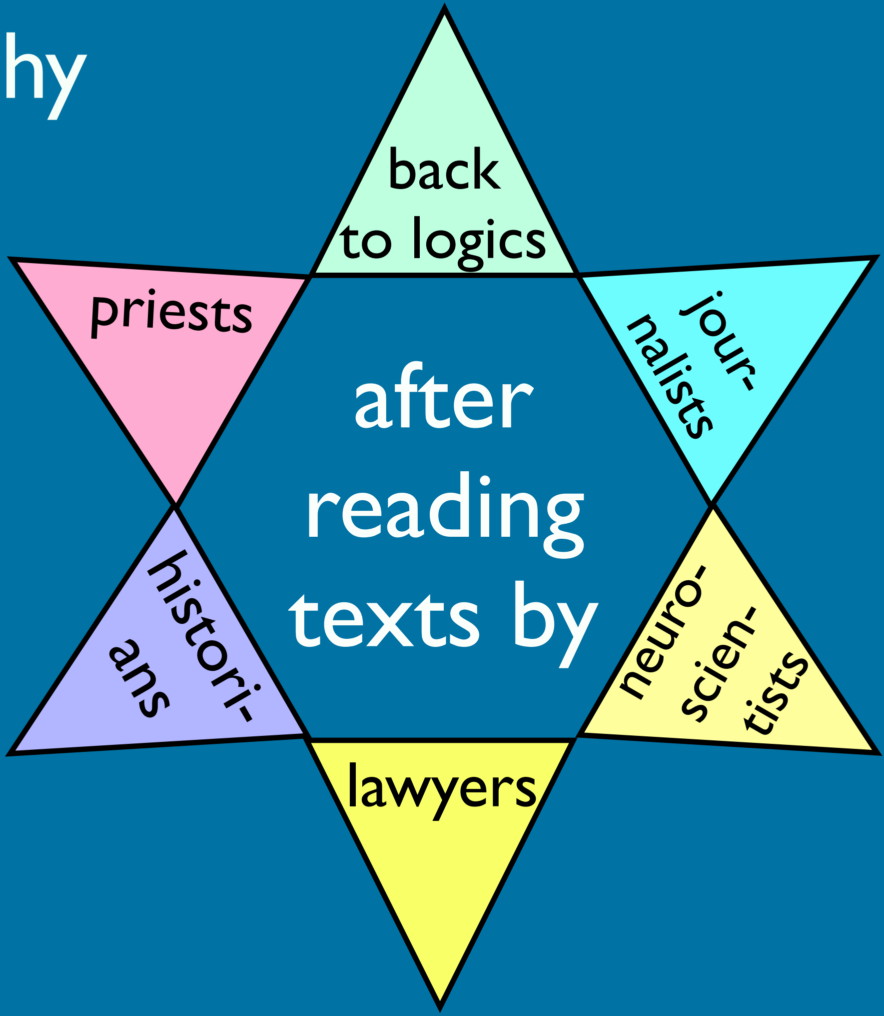
core abilities

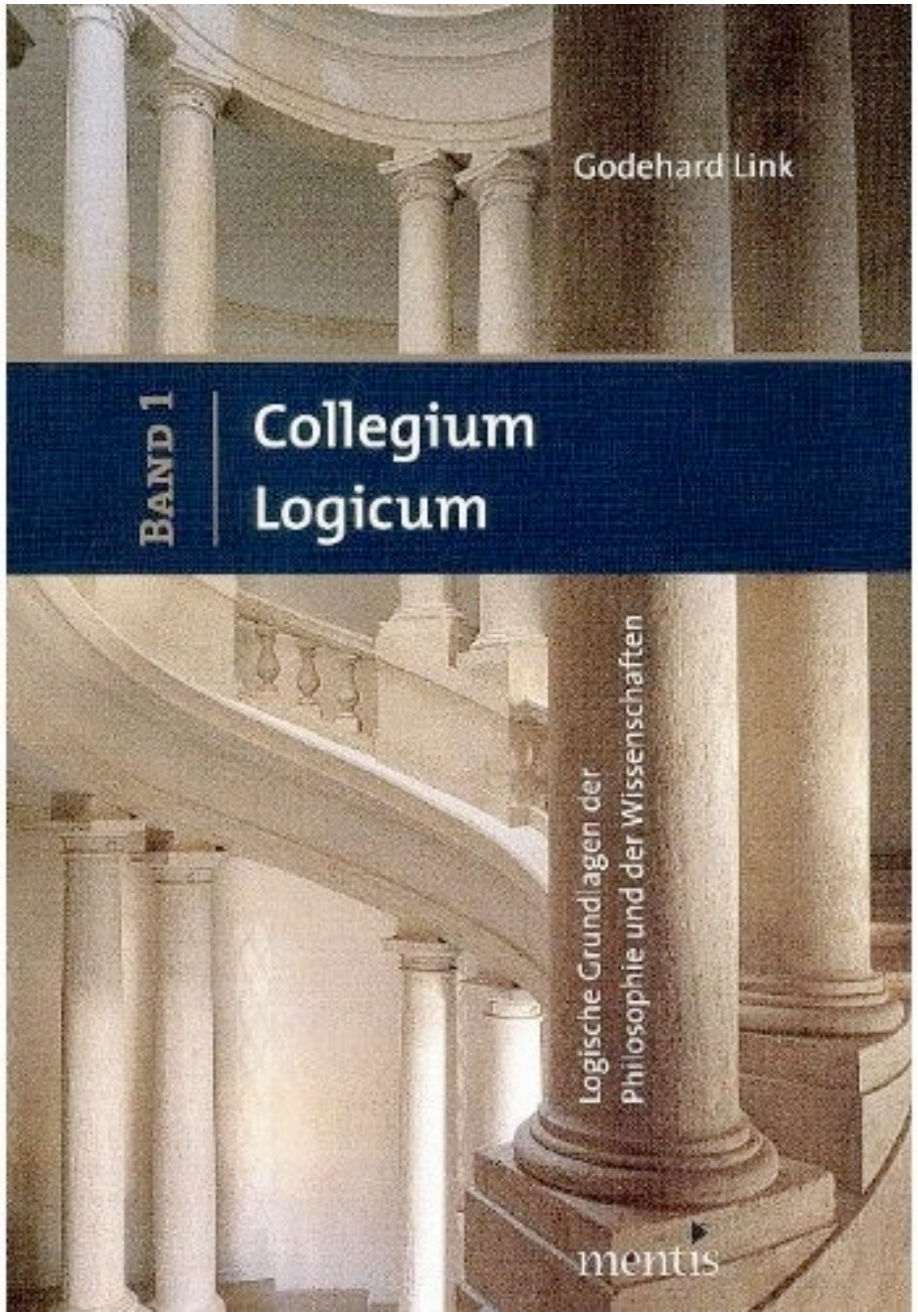
- do research
- write programs
- analyze data
- argue and defend
- write

think straight

My recent experience from lectures on

Describing Nature	winter 2010/11
Physical Law and Free Will	summer 2010, with M. Wilkens
Why is Math the Language of Physics?	winter 2009/10
Modernism in Physics	summer 2009, with M. Wilkens
Physics of Consciousness	summer 2008, with M. Wilkens
Natural Philosophy	summer 2007, winter 2006/07



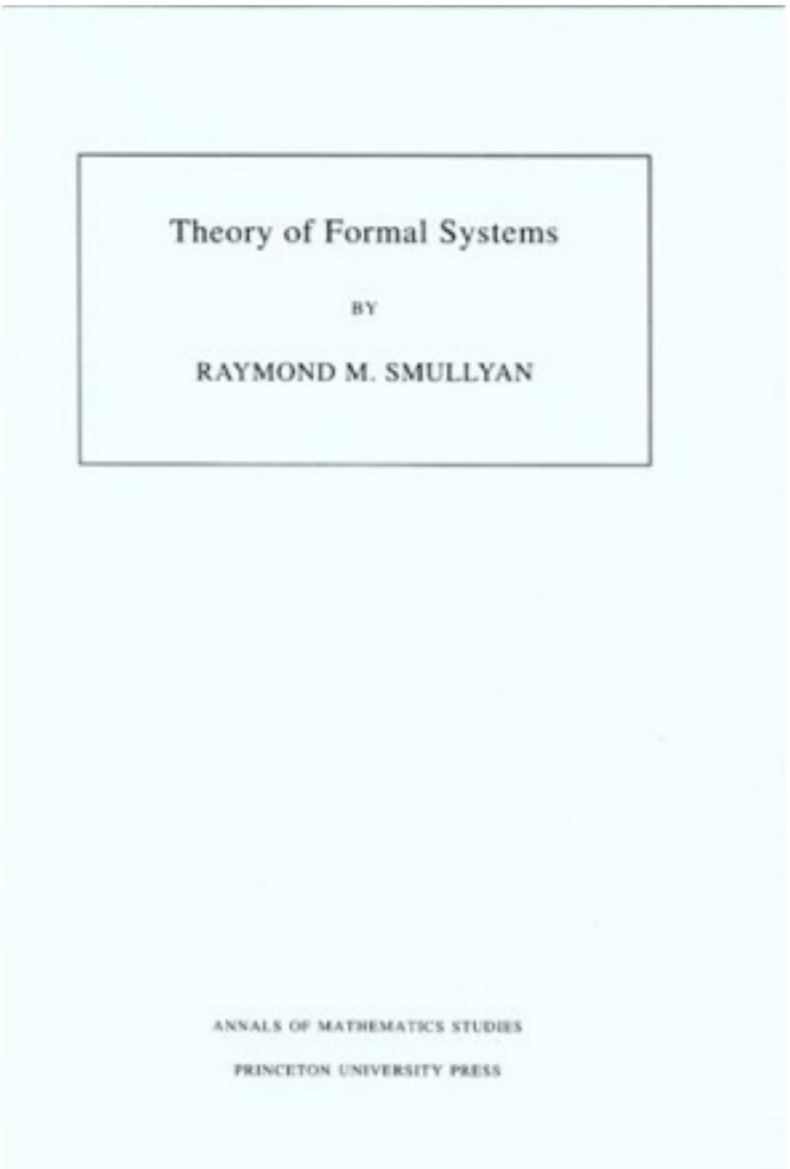


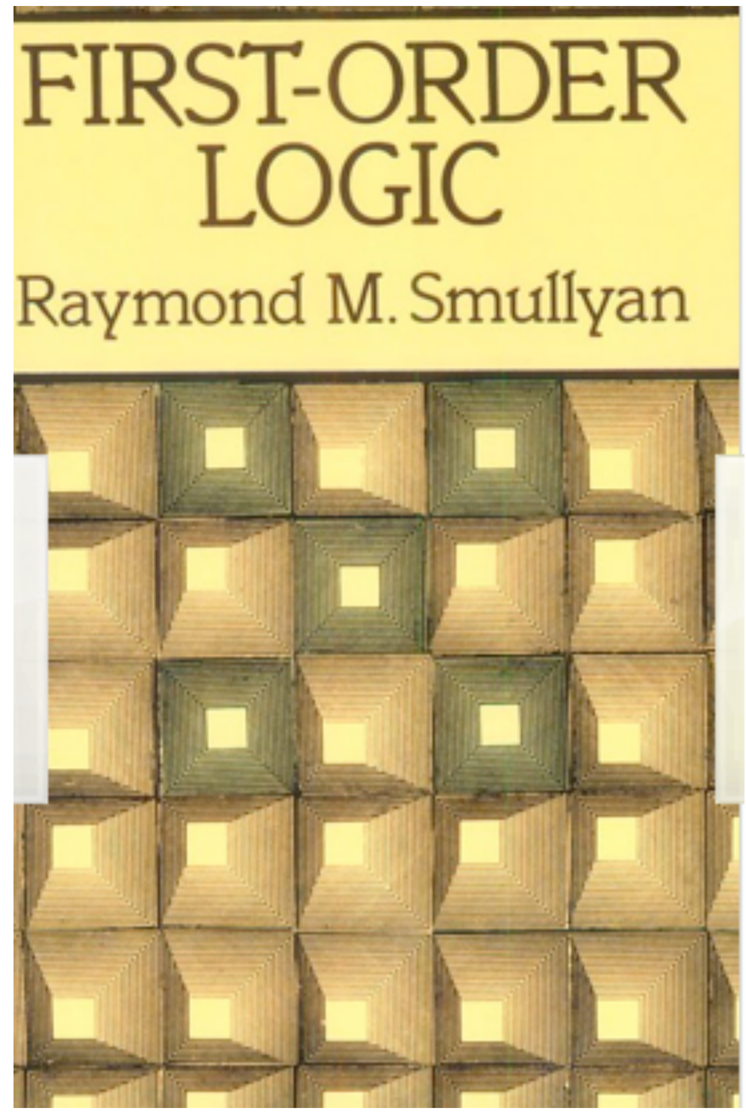
after all: its for the fun of it

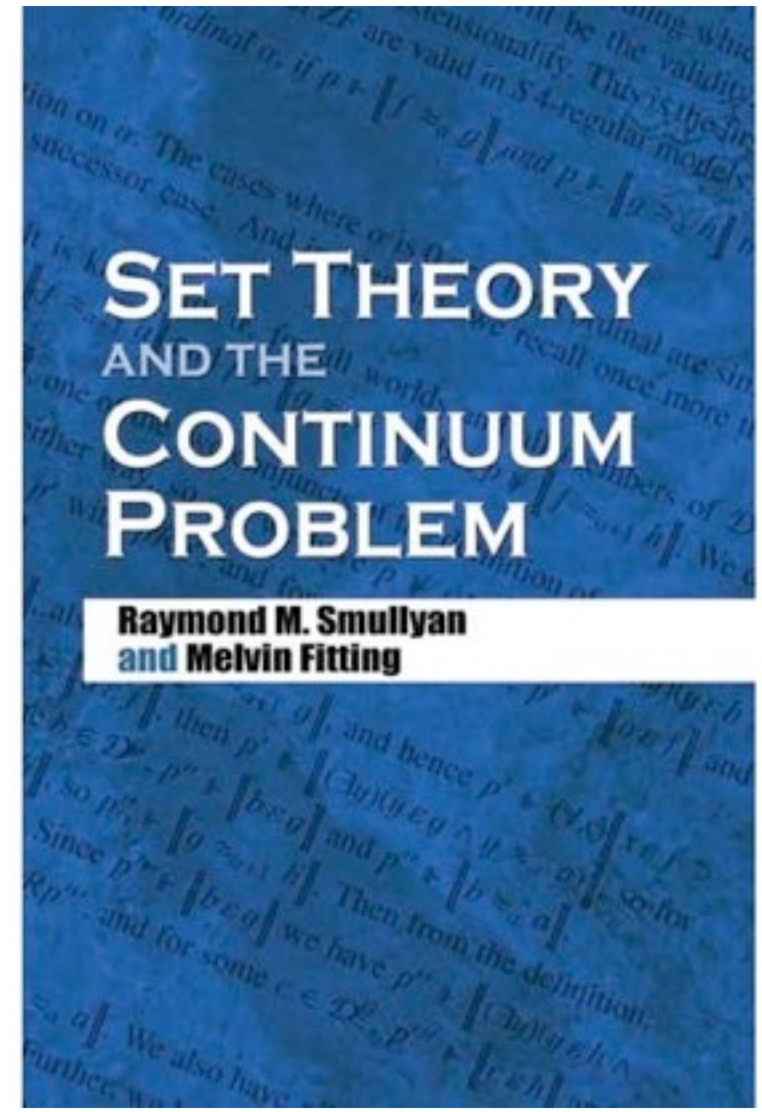
1. Mathematical vs Philosophical Logic

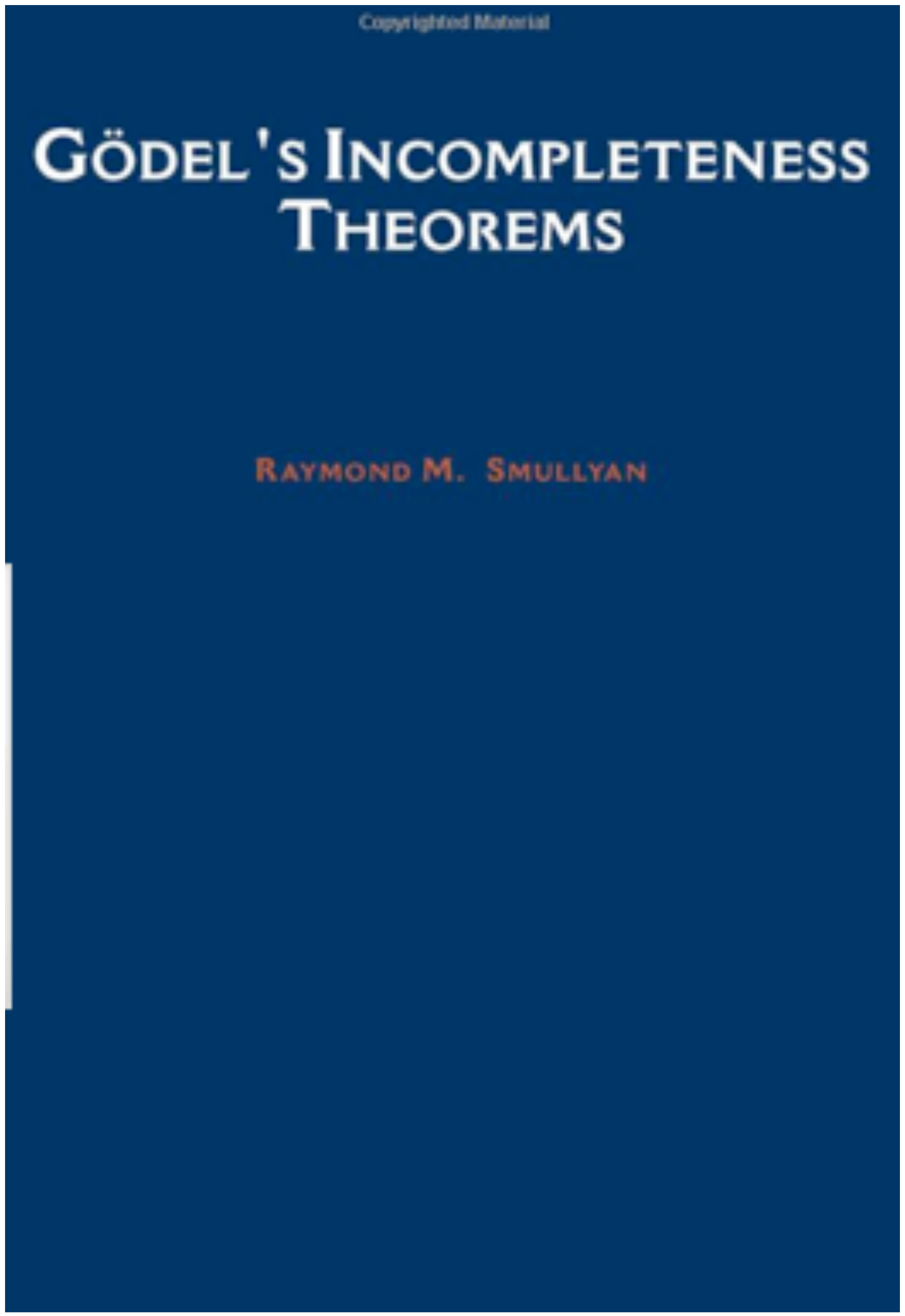
and is there place for the empirical sciences?

Frege:	invents formal language
Russell:	paradox; type theory
Ramsey:	Ramsey sentences (ontological reduction)
Tarski:	undefinability of truth
Gödel:	incompleteness theorem
Carnap:	diagonal argument
Quine:	new Gödel numbering
Cohen:	forcing
Putnam:	Löwenheim-Skolem as epistemic principle
Kripke:	modal logics. Gödel without self-reference
Hintikka:	Gödel & Wittgenstein


Theory of Formal Systems
BY
RAYMOND M. SMULLYAN
ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES
PRINCETON UNIVERSITY PRESS


FIRST-ORDER LOGIC
Raymond M. Smullyan


SET THEORY AND THE CONTINUUM PROBLEM
Raymond M. Smullyan
and Melvin Fitting


Copyrighted Material
GÖDEL'S INCOMPLETENESS THEOREMS
RAYMOND M. SMULLYAN


Raymond M.
Smullyan
WHO
KNOWS?
A Study of
Religious
Consciousness

2. What is first order logic?

(old name: predicate logic)

a) variables $x, y, z, \ldots$ constants $\pi, e, \ldots$

functions $+, \times, \ldots$ relations $=, <, \in, \ldots$

b) plus propositional logic (Aristotle) $\neg, \wedge, \rightarrow$

c) plus quantifiers (over variables only) $\forall x \; \exists y$

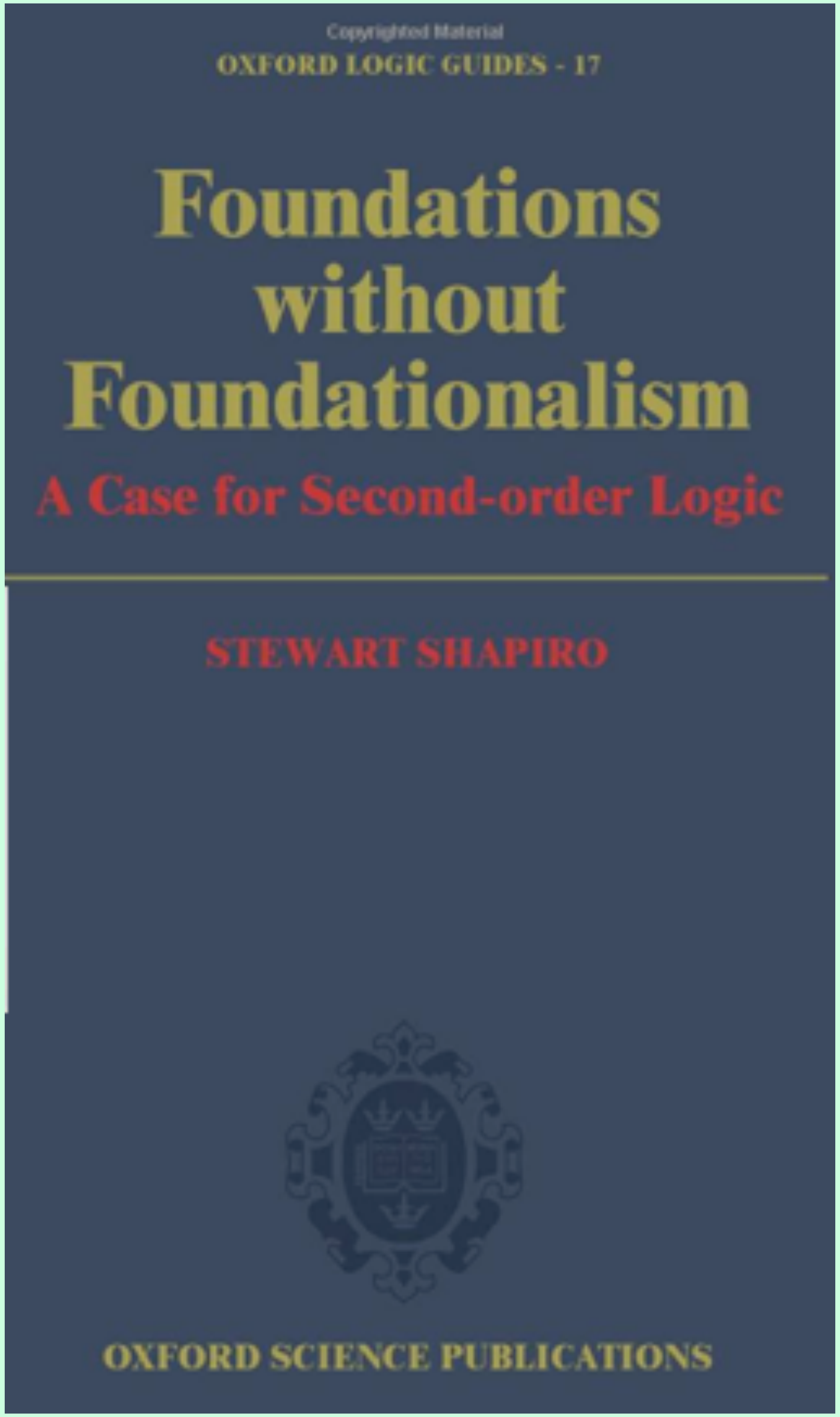
2nd order logic:

quantification

over functions

and predicates

$$\forall f \, \exists x \, f(x) = \ldots$$



3. Löwenheim-Skolem

first, and deepest result in model theory

Löwenheim 1915 Skolem 1920, 1922

If statements have interpretation in a set, then they have interpretation in a countable set

$x^2 = 1$	has interpret. in	$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
$x^2 = 2$	...	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$
$x^2 = -1$	...	$\mathbb{C}$

<u>Definition</u>. Let M_1 and M_2 be two models for a given formal system, i.e., we are given for each, maps from certain constant symbols c_α into the model, and maps associating with certain relation symbols R_β, certain subsets of n-tuples of M_1 and M_2. We say that M_1 and M_2 are elementarily equivalent if the statements in the formal language which are true in M_1 are precisely those true in M_2. If $M_1 \subseteq M_2$ we shall say that M_1 is an elementary sub-model of M_2, if the constants $\bar{c}_\alpha$ are the same in M_2 as in M_1, the relations $\bar{R}_\beta$ on M_1 are the restrictions of the relations $\bar{R}_\beta$ on M_2, and for every formula $A(x_1,\ldots,x_n)$, if $\bar{x}_i$ are in M_1 then $A(x_1,\ldots,x_n)$ is true in M_1 at $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ if and only if it is true in M_2 at $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$.

The notion of elementarily equivalent systems bears some relation to that of isomorphic systems, the latter of course being a much stronger concept. It has not found too much application in mathematics, except in the theory of real-closed fields, and more recently in p-adic number fields. The condition for an elementary sub-model is stronger than that for elementary equivalence because it allows statements which involve specific individuals in M_1 other than the constants. We are now ready to state a theorem whose proof is almost identical with that of the completeness theorem and which states a similar conclusion. It was found earlier than the completeness theorem and was perhaps the first genuine theorem about formal systems.

THEOREM (Löwenheim-Skolem). Let M be a model for a collection T of constant and relation symbols. There is an elementary sub-model of M whose cardinality does not exceed that of T if T is infinite and is at most countable if T is finite.

The proof again uses the axiom of choice. Notice that in particular if M is a model for a certain set of statements, the sub-model will also be a model for these statements. Let N be an arbitrary subset of M containing all the constants $\bar{c}_\alpha$, and let $A(y,x_1,\ldots,x_n)$ be an arbitrary formula of n+1 variables. For each $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ in N, whenever there is a $\bar{y}$ in M such that $A(y,x_1,\ldots,x_n)$ is true in M at $\bar{y},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$, choose <u>one</u> such and adjoin it to N. If we do this for all formulas A and all possible $\bar{x}_i$ we obtain a set N^* containing N. Since the number of n-tuples of elements of N is the same as the cardinality of N if N is infinite, countable if N is finite, and a similar statement

holds concerning the number of formulas in the language T, it easily follows that the cardinality of N^* is at most that of $\bar{\bar{N}} + \bar{\bar{T}} + \aleph_0$ where we write $\bar{\bar{S}}$ for the cardinality of a set S and $\aleph_0$ is the cardinality of the integers. Define N_0 as the set of constants $\bar{c}_\alpha$, and put $N_{k+1} = N_k^*$. We now claim that if we define N' as the union of the N_k, then N' has the desired properties stated in the theorem. It is clear that N' satisfies the cardinality statement. Let $A(x_1,\ldots,x_n)$ be a formula with r quantifiers. The remainder of the proof proceeds by induction on r. If r is zero there is nothing to prove. Assume an induction hypothesis that for any formula $A(x_1,\ldots,x_m)$ with less than r quantifiers and any $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ in N', A is true in N' at $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m$ if and only if it is true in M at $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m$. We may clearly assume that A begins with a quantifier, and by perhaps replacing A by its negation, we can even assume that A is of the form $\exists\, yB(y,x_1,\ldots,x_n)$. Let $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ be arbitrary elements of N'. We now show that $A(x_1,\ldots,x_n)$ holds at $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ in M if and only if it holds there in N'. We know that all the $\bar{x}_i$ lie in N_k for some k. If there is a $\bar{y}$ in M such that $B(y,x_1,\ldots,x_n)$ is true in M at $\bar{y},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$, there is also such a $\bar{y}$ in N_{k+1} and hence in N'. Since B involves r-1 quantifiers it then follows from our induction hypothesis that B is true at $(\bar{y},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ in N'. This in turn means exactly that $A(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ holds in N'. If there is no $\bar{y}$ such that B is true at $\bar{y},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ in M, then there can be no $\bar{y}$ such that it holds in N', since again by the induction hypothesis this would mean that it held in M. This completes the proof.

When the Löwenheim-Skolem theorem is applied to particular formal systems, we obtain as special cases: Every group, field, ordered field, etc., has a countable subsystem of the same type. A more spectacular result follows from applying the theorem to set theory (a system which we shall later formalize): There is a countable collection of sets, such that if we restrict the membership relation to these sets alone, they form a model for set theory (more precisely all the true statements of set theory are true in this model). In particular, within this model which we may denote by M, there must be an uncountable set. This paradox, that a countable model can contain an uncountable set, is explained by noting that to say that a set is uncountable merely asserts the non-

4. Objects of Logic & Science

no REALS
in first-order
logic

von Neumann:
All from empty
set.

Only sets

$0 = \emptyset$

$1 = \{\emptyset\}$

$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$2 < 3$ iff $2 \in 3$

What are
objects of
physics?

Elements of
sets

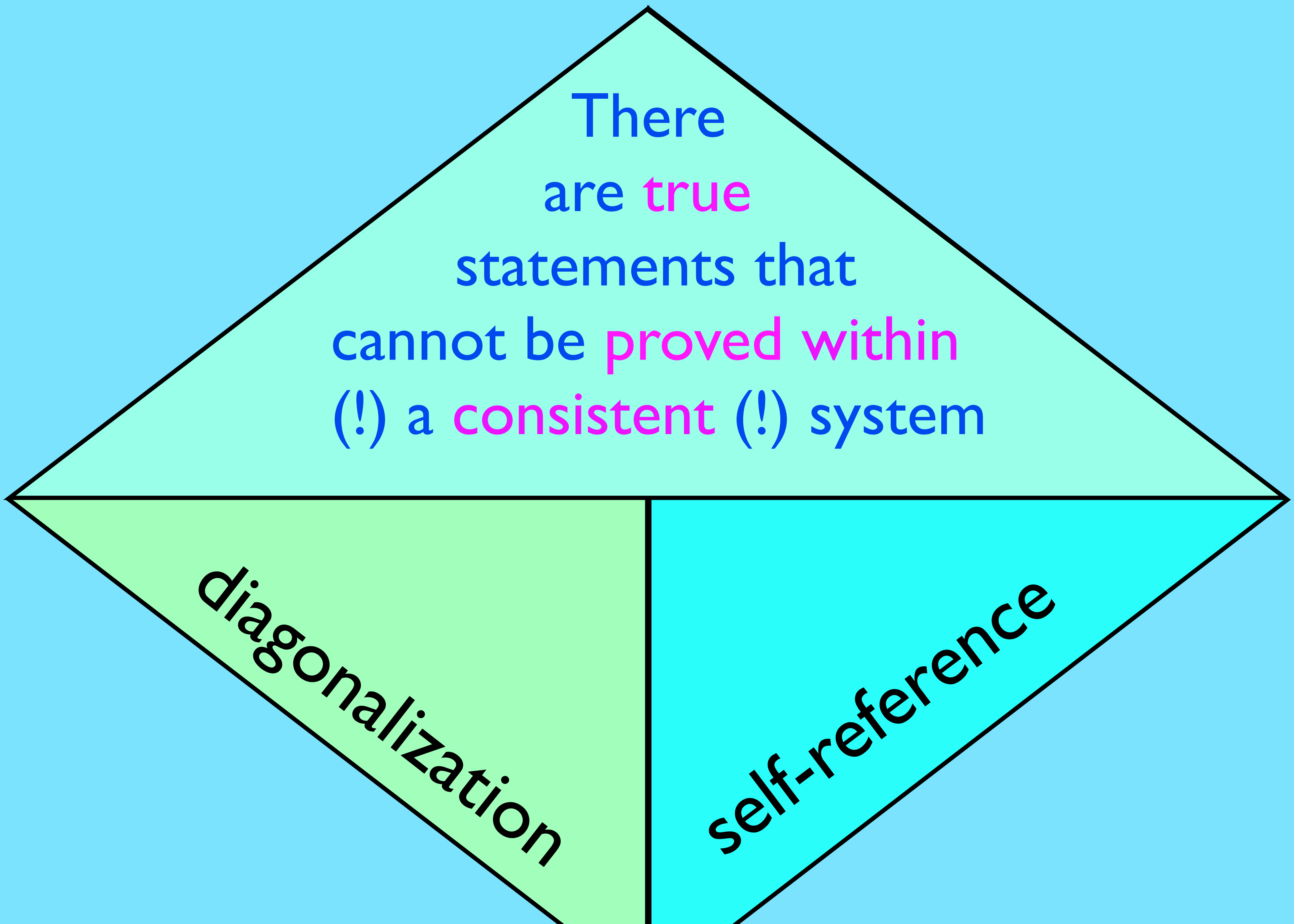
5. Completeness Theorem

in first-order logic TRUE and PROVABLE are synonyms

$$\Phi \models \phi \quad \text{iff} \quad \Phi \vdash \phi$$

Gödel 1930, PhD thesis

6. Incompleteness



Fact:
all mathematics
is set theory

Gödel II: cannot
prove consistency
of set theory
within set theory

cannot know,
whether there
is a Gödel sen-
tence

Consistency
is required in
Gödel I

1. Gödel number: symbols $\longleftrightarrow$ numbers (Leibniz!)

$$n = G[P(x)]$$

2. diagonalization: for each predicate P there is y :

$$y = G[P(y)]$$

3. 'provable' is a predicate:

$Pr[G(P)]$ is true iff P is provable

4. apply (2) to predicate $\neg Pr(x)$

$$g = G[\neg Pr(g)]$$

is true & unprovable

adapted from Smullyan,
"Gödel's incompleteness theorems"

$$
\begin{aligned}
H \text{ drückt } (\neg P)^* \text{ aus} \leftrightarrow \forall n : H(n) \in \mathcal{T} &\leftrightarrow n \in (\neg P)^* \\
\rightarrow \qquad H(h) \in \mathcal{T} &\leftrightarrow h \in (\neg P)^* \\
&\leftrightarrow d(h) \in \neg P \\
&\leftrightarrow d(h) \notin P \\
&\leftrightarrow g(H(h)) \notin P \\
&\leftrightarrow H(h) \notin \mathcal{P}.
\end{aligned}
$$

Philosophy behind Gödel's proof

1. Gödel:	liar paradox
2. (postmoderns):	self-reference
3. Hintikka:	acting; theater play
4. Putnam, Kripke:	no self-reference needed

NONSTANDARD MODELS AND KRIPKE'S PROOF OF THE GÖDEL THEOREM

HILARY PUTNAM

Abstract This lecture, given at Beijing University in 1984, presents a remarkable (previously unpublished) proof of the Gödel Incompleteness Theorem due to Kripke. Today we know purely algebraic techniques that can be used to give direct proofs of the existence of nonstandard models in a style with which ordinary mathematicians feel perfectly comfortable—techniques that do not even require knowledge of the Completeness Theorem or even require that logic itself be axiomatized. Kripke used these techniques to establish incompleteness by means that could, in principle, have been understood by nineteenth-century mathematicians. The proof exhibits a statement of number theory—one which

7. The continuum

Cantor: there is no isomorphism $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Proof:

assume there is such f

consider the set $L = \{n | n \notin f(n)\}$

claim: there is no l such that $L = f(l)$

proof: assume, there is such l

case I: $l \in L \quad \to \quad l \notin f(l) = L$

case II: $l \notin L \quad \to \quad \neg(l \notin f(l)) \quad \to \quad l \in f(l) = L$

both cases lead to contradiction

thus assumption is wrong

thus L has no number l

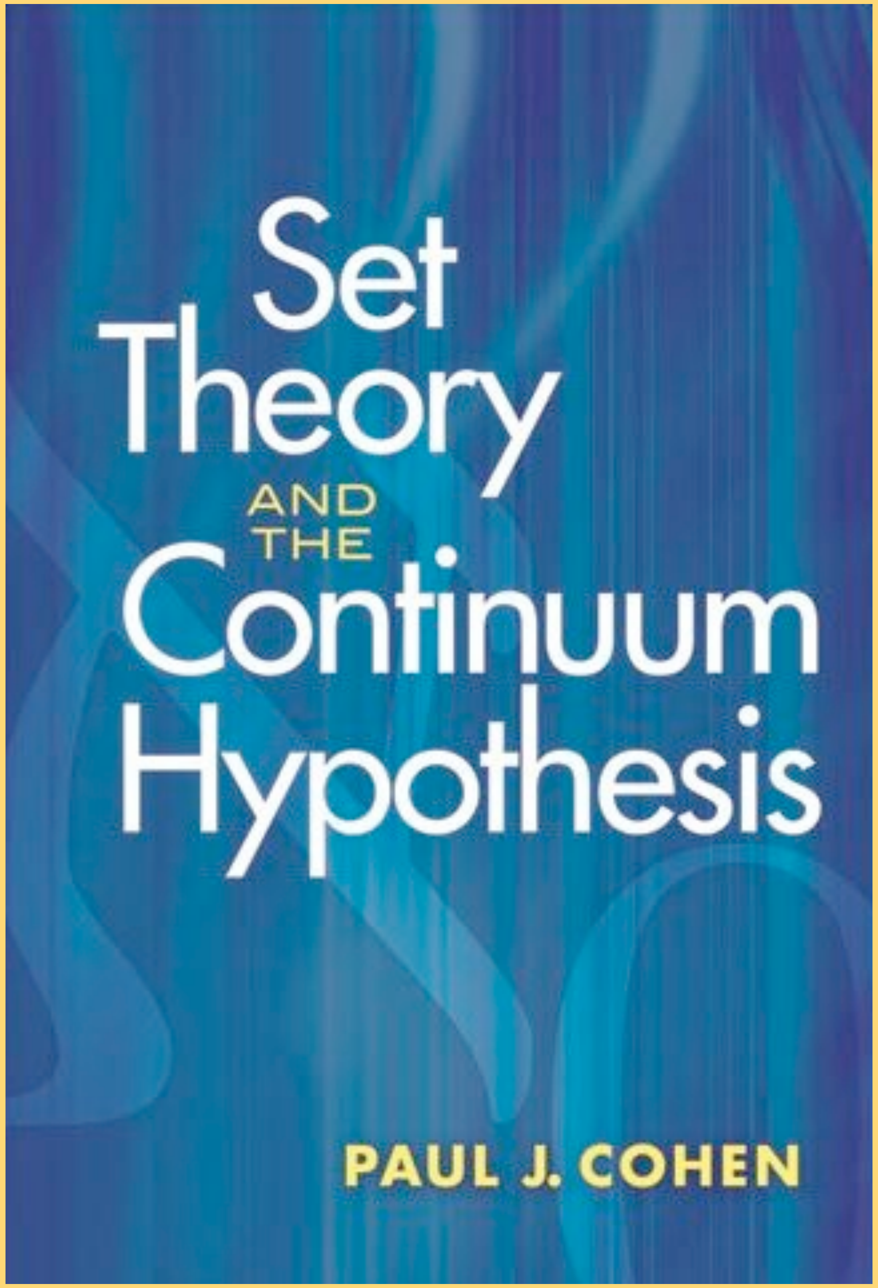
thus there is no f

Continuum Problem (Cantor)

is there a cardinality between $\mathbb{N}$ and $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Since 1963 (P. Cohen) we cannot know

invented method of forcing (which Badiou calls "revolutionary" for philosophy)



8. What is a proof?

high-school students: "these observations prove Einstein's theory"

Kant	***Zer-melo***	***Vienna circle***
Math is synthetical a priori	well-ordering theorem (1904)	Math is analytical a priori

Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.

(Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe.)

Von

E. Zermelo in Göttingen.

... Der betreffende Beweis ist aus Unterhaltungen entstanden, die ich in der vorigen Woche mit Herrn **Erhard Schmidt** geführt habe, und ist folgender.

1) Es sei M eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, deren Elemente mit m bezeichnet werden mögen, M' von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}'$ eine ihrer Teilmengen, welche mindestens ein Element m enthalten muß, aber auch alle Elemente von M umfassen darf, und $M - M'$ die zu M' „komplementäre" Teilmenge. Zwei Teilmengen gelten als verschieden, wenn eine von beiden irgend ein Element enthält, das in der anderen nicht vorkommt. Die Menge aller Teilmengen M' werde mit M bezeichnet.

2) *Jeder Teilmenge M' denke man sich ein beliebiges Element m_1' zugeordnet, das in M' selbst vorkommt und das „ausgezeichnete" Element von M' genannt werden möge.* So entsteht eine „Belegung" γ der Menge M mit Elementen der Menge M von besonderer Art. Die Anzahl dieser Belegungen γ ist gleich dem Produkte $\Pi\mathfrak{m}'$ erstreckt über alle Teilmengen M' und ist daher jedenfalls von 0 verschieden. Im folgenden wird nun eine beliebige Belegung γ zu grunde gelegt und aus ihr eine bestimmte Wohlordnung der Elemente von M abgeleitet.

3) *Definition.* Als „γ-Menge" werde bezeichnet jede wohlgeordnete Menge M_γ aus lauter verschiedenen Elementen von M, welche folgende Beschaffenheit besitzt: ist a ein beliebiges Element von M_γ und A der „zugehörige" Abschnitt, der aus den vorangehenden Elementen $x \prec a$ von M_γ besteht, so ist a immer das „ausgezeichnete" Element von $M - A$.

4) *Es gibt γ-Mengen innerhalb M.* So ist z. B. m_1, das ausgezeichnete Element von $M' = M$, selbst eine γ-Menge, ebenso die (geordnete) Menge $M_2 = (m_1, m_2)$, wo m_2 das ausgezeichnete Element von $M - m_1$ ist.

5) *Sind M_γ' und M_γ'' irgend zwei verschiedene γ-Mengen* (die aber zu derselben ein für allemal gewählten Belegung γ gehören!), *so ist immer eine von beiden identisch mit einem Abschnitte der anderen.*

Es sei nämlich M_γ' die eine der beiden wohlgeordneten Mengen, welche auf die andere, M_γ'', oder einen ihrer Abschnitte ähnlich abbildbar ist. Dann müssen je zwei bei dieser Abbildung einander entsprechende Elemente miteinander identisch sein. Denn das erste Element *jeder* γ-Menge ist m_1, da der zugehörige Abschnitt A kein Element enthält, also $M - A = M$ ist. Wäre nun m' das *erste* Element von M_γ', welches von dem entsprechenden Elemente m'' verschieden wäre, so müssten die zugehörigen Abschnitte A' und A'' noch miteinander identisch sein, mithin auch die Komplementärmengen $M - A'$ und $M - A''$ und als deren ausgezeichnete Elemente m' und m'' selbst, gegen die Annahme.

6) *Folgerungen.* Haben zwei γ-Mengen ein Element a gemeinsam, so haben sie auch den Abschnitt A der vorangehenden Elemente gemein. Haben sie *zwei* Elemente a, b gemein, so ist in *beiden* Mengen entweder $a \prec b$ oder $b \prec a$.

7) Bezeichnet man als „γ-Element" jedes Element von M, das in irgend einer γ-Menge vorkommt, so gilt der Satz: *Die Gesamtheit L_γ aller γ-Elemente läßt sich so ordnen, daß sie selbst eine γ-Menge darstellt, und umfaßt alle Elemente der ursprünglichen Menge M.* Die letztere ist damit selbst wohlgeordnet.

I) Sind a, b zwei beliebige γ-Elemente und M_γ' und M_γ'' irgend zwei γ-Mengen, denen sie angehören, so enthält nach 5) die größere der beiden γ-Mengen beide Elemente und bestimmt die Ordnungsbeziehung $a \prec b$ oder $b \prec a$. Diese Ordnungsbeziehung ist nach 6) unabhängig von der Wahl der verwendeten γ-Menge.

II) Sind a, b, c drei beliebige γ-Elemente und $a \prec b$ und $b \prec c$, so ist immer $a \prec c$. Denn jede c enthaltende γ-Menge enthält nach 6) auch b und mithin a, und da sie einfach geordnet ist, so folgt in ihr aus $a \prec b$ und $b \prec c$ in der Tat $a \prec c$. Die Menge L_γ ist also *einfach geordnet.*

III) Ist L_γ' eine beliebige Teilmenge von L_γ und a eines ihrer Elemente, das der γ-Menge M_γ angehören möge, so enthält M_γ nach 6) alle Elemente $\prec a$, also auch die Teilmenge L_γ'', welche aus L_γ' durch Weglassung aller auf a folgenden Elemente entsteht, und L_γ'' besitzt als Teilmenge der wohlgeordneten Menge M_γ ein *erstes* Element, das zugleich erstes Element von L_γ' ist. L_γ ist also auch *wohlgeordnet.*

IV) Ist a ein beliebiges γ-Element und A die Gesamtheit *aller* vorangehenden Elemente $x \prec a$, so ist A nach 6) der zu a gehörige Abschnitt in jeder Menge M_γ, welche a enthält, und a ist mithin nach 3) das ausgezeichnete Element von $M - A$. *Also ist L_γ selbst eine γ-Menge.*

V) Gäbe es ein Element von M, das *keiner* γ-Menge angehörte, also Element von $M - L_\gamma$ wäre, so gäbe es auch ein ausgezeichnetes Element m_1'

9. Logic of empirical sciences

9.a Quantum mechanics

Uncertainty principle

Role of observer

Schrödinger's cat

Entangle-ment

Universe

Horizons

Hawking radiation

and Relativity

9.b Quotation marks
(e.g. in social sciences)

Quotation marks cannot help to define "truth".
Tarski, "The concept of truth in formalized languages" 1936

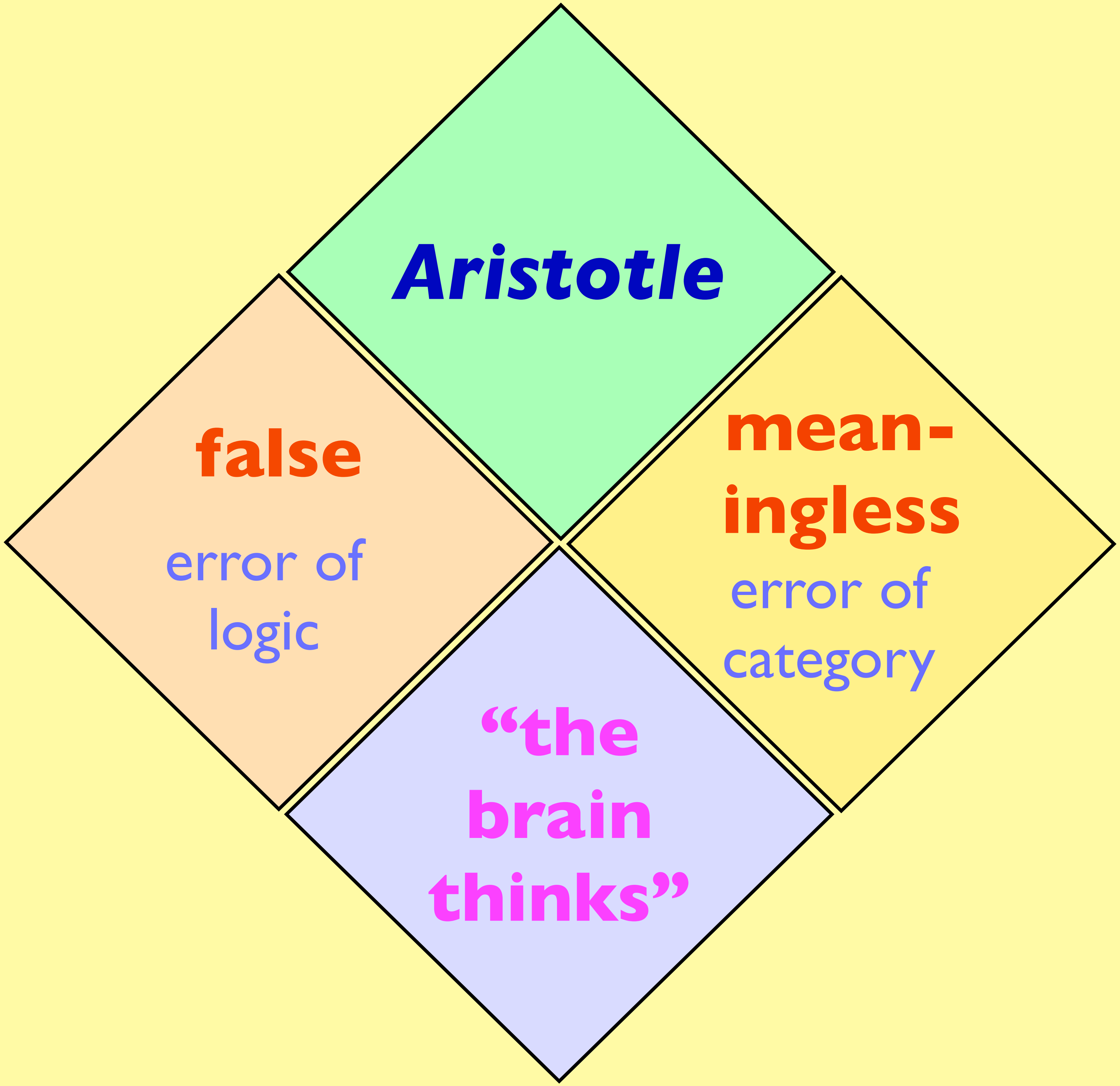
'it is snowing' is a true sentence if and only if it is snowing.

" '*p*' "

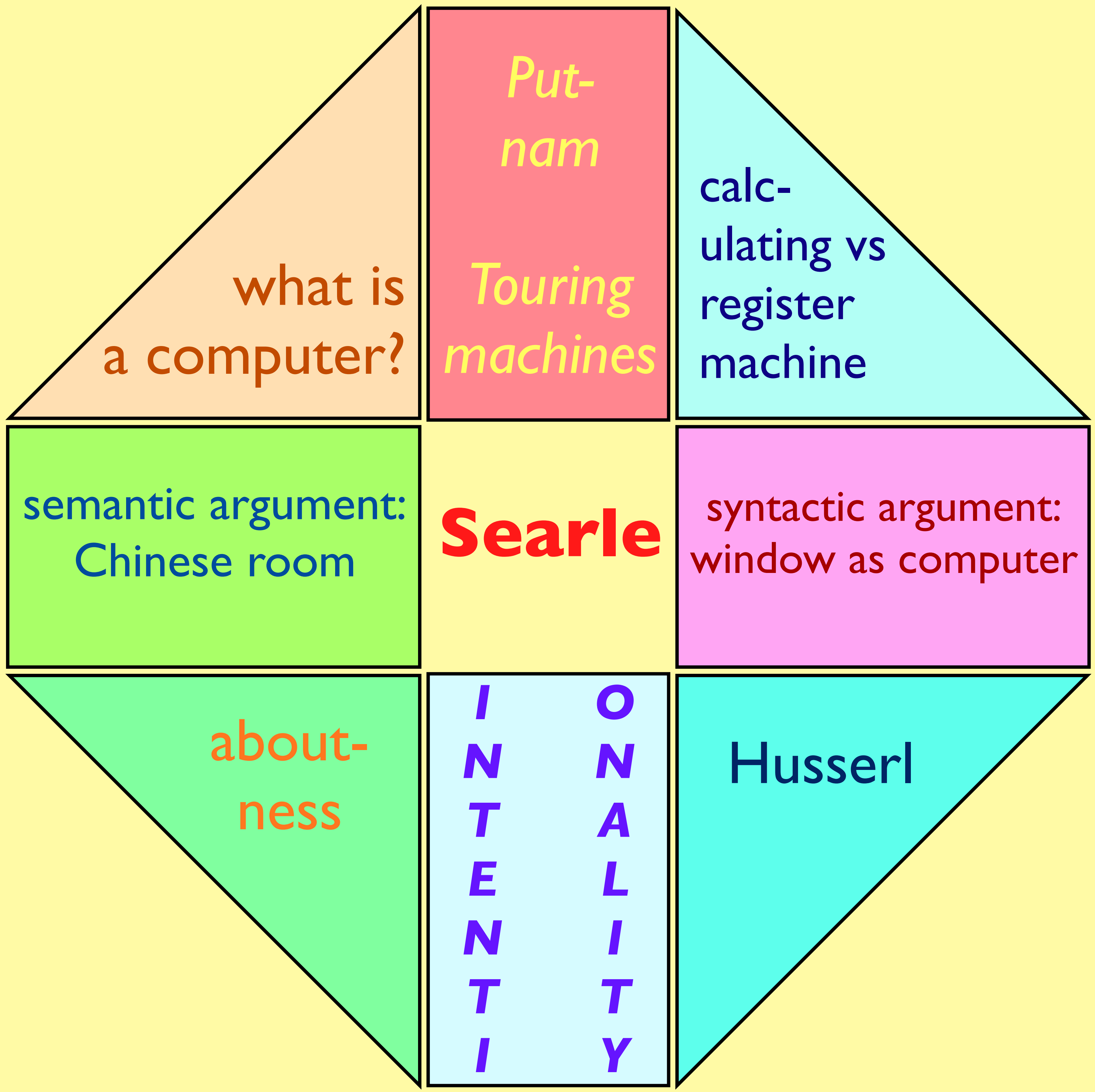
corresponding to the name " 'snow' " we have the name 'a word which consists of the four letters: *Es*, *En*, *O*, Double-*U*

A characteristic feature of colloquial language (in contrast to various scientific languages) is its universality. It would not be in harmony with the spirit of this language if in some other language a word occurred which could not be translated into it; it could be claimed that 'if we can speak meaningfully about anything at all, we can also speak about it in colloquial language'.

9.c Category error



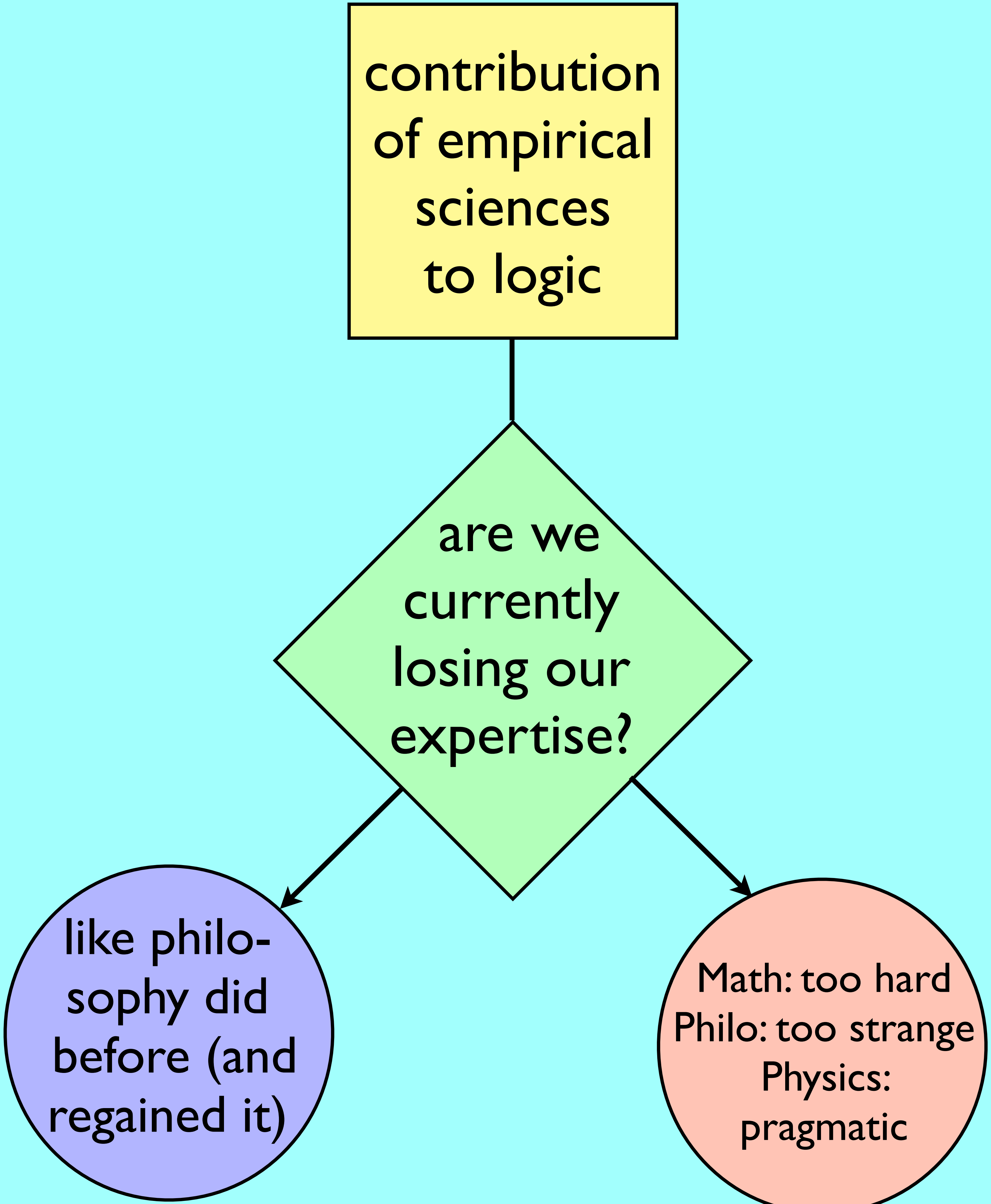
9.d I Turing


what is a computer?
Put-nam
Touring machines
calc-ulating vs register machine
semantic argument: Chinese room
Searle
syntactic argument: window as computer
about-ness
INTENTI
ONALITY
Husserl

9.e Free Will

is freedom of will
compatible
with causation?

SUMMARY


contribution of empirical sciences to logic
are we currently losing our expertise?
like philo-sophy did before (and regained it)
Math: too hard
Philo: too strange
Physics: pragmatic