ACHIM FELDMEIER
ACHIM FELDMEIER

Zeitabhängige Struktur und Energietransfer der Winde heißer, massereicher Sterne

DISSERTATION

der Fakultät für Physik

der Ludwig-Maximilians-Universität

vorgelegt von

Achim Feldmeier

aus Krefeld

München, den 30. Juli 1993

Zeitabhängige Struktur und Energietransfer der Winde heißer, massereicher Sterne

---

DISSERTATION

der Fakultät für Physik

der Ludwig-Maximilians-Universität

vorgelegt von

Achim Feldmeier

aus Krefeld

München, den 30. Juli 1993

1. Gutachter: Prof. Dr. R.-P. Kudritzki

2. Gutachter: Prof. Dr. T. Gehren

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Januar 1994

Zusammenfassung

Die strahlungsdruckgetriebenen Winde heißer, massereicher Sterne werden zum gegenwärtigen Zeitpunkt durch zwei alternative Ansätze beschrieben: Zum einen sind äußerst detaillierte *stationäre* Modelle in der Lage, die mittleren Größen dieser Winde wie Massenverlustrate und Endgeschwindigkeit und das gesamte beobachtete Spektrum vom UV bis zum Radiobereich zu reproduzieren, sofern man von dezidierten zeitabhängigen Phänomenen absieht. Andererseits gibt es eine Vielzahl von Beobachtungsfakten, die auf eine *Zeitabhängigkeit* und *Struktur* der Winde deuten und deshalb in diesem Rahmen nicht beschrieben werden können. Besonders wichtig in diesem Zusammenhang ist die bei allen OB-Sternen (und Wolf-Rayet-Sternen) beobachtete Röntgenemission, deren Ursache in durch den Wind propagierenden Schocks vermutet wird und deren Präsenz auch im Rahmen der stationären Modelle benötigt wird, um die beobachtete Superionisation *quantitativ* zu erklären (Pauldrach et al., 1993). Neben diesen Beobachtungsfakten gibt es ein zweites, äußerst wichtiges theoretisches Argument, das eine detaillierte zeitabhängige Simulation als notwendig erscheinen läßt. Der beschleunigende Mechanismus selbst – der Linienstrahlungsdruck – ist hochgradig instabil und kann nach nichtlinearem Wachstum zur Entstehung der oben postulierten Schocks führen.
Ziel der vorliegenden Arbeit war es nun, die zeitabhängige strahlungshydrodynamische Entwicklung der Winde heißer, massereicher Sterne zu studieren, insbesondere unter Berücksichtigung der *Energiegleichung*, die in bisherigen Simulationen (Owocki, Castor & Rybicki, 1988 und Owocki, 1992) vernachlässigt wurde, jedoch für eine quantitative Beschreibung der die Röntgenstrahlung emittierenden Struktur (Temperatur- und Dichteschichtung) unabdingbar ist.
Um den in dieser Arbeit entwickelten hydrodynamischen Code zu überprüfen und die Auswirkung einer in der Berechnung der Strahlungsbeschleunigung bislang notwendigen Näherung beurteilen zu können, wurden zunächst eine Reihe von *isothermen* Modellen berechnet:
Die Ergebnisse dieser Rechnung ergaben, bei analoger Parameterwahl, praktisch identische Ergebnisse zu vergleichbaren Simulationen von Owocki (1992). Der Wind besteht aus einer Abfolge sehr dichter, schmaler *Schalen* mit großen Dichtekontrasten an den *reverse* und *forward* Schocks dieser Schalen von 10^3 bis 10^4 gegenüber dem dünnen Zwischenschalengas. Die resultierende Sprunggeschwindigkeit an den Schocks ist dabei in ausgezeichneter Übereinstimmung mit den durch die Röntgenbeobachtung (ROSAT) abgeleiteten Werten (Hillier et al., 1993). –
Wir fanden, daß in unseren Modellen wechselseitige Schalenstöße einen signifikanten Einfluß auf die *entwickelte* Struktur haben. Des weiteren stellte es sich heraus, daß nicht nur die Grundperiode der anregenden photosphärischen Störungen, sondern auch deren harmonische Obermoden in signifikanter Weise verstärkt werden können, was für eine zukünftige Analyse des anregenden Mechanismus von Wichtigkeit sein kann. Anzeichen eines chaotischen Verhaltens wurden *nicht* gefunden. Die oben erwähnte Näherung, die die Berechnung der Reemissionsprozesse betrifft, wurde durch alternative Zugänge abgeändert, wobei sich insbesondere ein Einfluß auf den Ort der Strukturentstehung ergab. Welche dieser Möglichkeiten tatsächlich realisiert wird, kann demnächst über

derzeit entwickelte spektraldiagnostische Methoden (Puls et al., 1993, Puls, 1993) durch einen Vergleich mit der Beobachtung entschieden werden. Die vorgestellten Modelle sind dabei schon jetzt in der Lage, die sogenannten schwarzen Absorptionströge in UV P-Cygni Profilen von Resonanzlinien zu erklären, die im alternativen stationären Ansatz nur durch eine ad hoc eingeführte „Turbulenzgeschwindigkeit“ *gefittet* werden.

Der zweite Teil dieser Arbeit setzt sich mit einer Berücksichtigung der Energiegleichung auseinander. Dabei ist insbesondere die Berechnung der radiativen Kühlungszonen des hinter den Schocks stark geheizten Materials notwendig: Einerseits gilt es nämlich zu überprüfen, bis zu welchen Radien/Dichten die obige isotherme Näherung gültig ist – in Bereichen geringer Dichte und hoher Temperatur können die Kühlungszonen *ausgedehnt* sein und die Annahme der Isothermie wird *ungültig*. Andererseits ist für die Berechnung des Röntgenspektrums die Auflösung der Struktur der Kühlungszonen, in denen diese Strahlung emittiert wird, auf jeden Fall unumgänglich. Die hauptsächliche Schwierigkeit ergibt sich dabei durch einen *künstlichen* Kollaps der Kühlungszonen in den numerischen Rechnungen, und zwar selbst in Fällen, wo Abschätzungen *breite* Kühlungszonenen vorhersagen. Der Grund für diesen Defekt wird in der oszillatorischen thermischen Instabilität (Langer et al., 1981) gefunden: Im Verlauf ihrer Kontraktion kann die Ausdehnung der Kühlungszone unter die numerische Gitterbreite kommen, der Schock *wird* isotherm und expandiert nicht wieder. Diese Problematik stellt somit eine beträchtliche Schwierigkeit für eine quantitative Beschreibung der energetischen Prozesse dar. In vorliegender Arbeit wird nun eine Möglichkeit vorgeschlagen, dieses Hindernis zu überwinden: Die aktuelle Kühlungsfunktion wird dabei in dem *physikalisch insignifikanten* Bereich geringer Temperaturen modifiziert, wodurch letztendlich der numerische Kollaps verhindert wird. Es wurden zahlreiche Testrechnungen im Vergleich zu *analytischen* Modellen durchgeführt, die erwiesen, daß diese Methodik in allen Fällen zu den „richtigen“ Ergebnissen führt. Die mit dieser Methode durchgeführten Simulationen zeitabhängiger Winde erbrachten folgende Resultate:
Im betrachteten Bereich bis 10 Sternradien ergeben sich gegen die Längenskala der Strömung *kurze* Kühlungslängen, und damit stimmen diese Modelle in ihrer makroskopischen Windstruktur gut mit den *isothermen* Modellen überein. Die dominanten heißen Bereiche (bis zu 10^7 K) im Wind entstehen hauptsächlich durch *Schalenkollisionen*, und die Kühlungszonen können numerisch gut aufgelöst werden.
Die vorgestellten Modelle erlauben somit, in Zukunft erstmalig *realistische* Röntgenspektren heißer Sterne zu synthetisieren und werden damit eine erhebliche Lücke in der quantitativen Beschreibung der Winde heißer Sterne schließen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **1**

2. Zeitabhängige numerische Hydrodynamik **8**
2.1 Stationäre und zeitabhängige numerische Hydrodynamik 9
2.2 Das numerische Lösungsverfahren 10
2.3 Andere numerische Verfahren 30

3. Grundlegende hydrodynamische Effekte **34**
3.1 Lineare Advektion, planar und sphärisch 34
3.2 Die Burgersgleichung 36
3.3 Vollständige hydrodynamische Advektion 38
3.4 Zweidimensionale Instabilitäten 40
3.5 Stationäre Strömungen 42
3.6 Nohs Schockreflektion 47
3.7 Das Sedovproblem 53
3.8 Die Riemannsche Schockröhre 56
3.9 Der Doppelschock 58
3.10 Strahlungskühlung nach Chevalier & Imamura 66
3.11 Abschließende Bemerkungen 68

4. Die Linienstrahlungsbeschleunigung **70**
4.1 Die allgemeine Strahlungsbeschleunigung 70
4.2 Die Linienbeschleunigung in einem bewegten Medium 71
4.3 Das photosphärische Profil 73
4.4 Linienüberlapp und Linienensemble 74
4.5 Unterschied zur Sobolevnäherung 76
4.6 Eine Symmetrie im Linienstrahlungstransport 77
4.7 Sobolevnäherung in nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldern 79
4.8 Winkelintegration, Mitte-Rand-Verdunklung 82
4.9 Randbedingung an η_- 83
4.10 Nichtisotherme Winde 85
4.11 Numerische Behandlung der Strahlungsbeschleunigung 88

5. Die Instabilität der Linienbeschleunigung **89**
5.1 Mechanismus der Instabilität 89
5.2 Das „Bridging Law“ 92
5.3 Einfluß der Streuung: der „Line Drag“ Effekt 95
5.4 Dispersionsrelationen 98
5.5 Signalausbreitung im Sternwind 100
5.6 Einfluß weiterer Effekte auf die Instabilität 101
5.7 Strahlungsviskosität 102

6. Instabile isotherme Windmodelle **107**
6.1 Berechnung der Modelle 107
6.2 Schalen und Zwischenschalenmedium 112
6.3 Zeitlich gemittelte Windstruktur 117
6.4 Massenkoordinate 119
6.5 Zeitserie der Windentwicklung 120
6.6 Schalenstöße 121
6.7 Zeitreihenanalyse: Chaos im Wind? 122
6.8 Optisch dicke Quellfunktion. Verschiedene Schallamplituden & -perioden .. 128
6.9 Der Zeitschritt 133
6.10 Ausblick auf künftige Arbeiten 135

7. Diagnostik variabler Winde **137**
7.1 Radiowellen 137
7.2 Infrarot 137
7.3 UV-Linien 138
7.4 Optische Linien 146
7.5 Röntgenstrahlung 147
7.6 Gammastrahlen 152

8. Energetische Prozesse in Sternwinden **153**
8.1 Adiabatische Kühlung 153
8.2 Viskosität und Wärmeleitung 155
8.3 Strahlungskühlung: die Kühlungsfunktion 156
8.4 Die kondensatorische thermische Instabilität 161
8.5 Die oszillatorische thermische Instabilität 162
8.6 Der Fermimechanismus in Schocks 165
8.7 Reibungsheizung und Stoßentkopplung 167

9. Instabile Windmodelle mit Energietransfer **168**
9.1 Numerische Behandlung der Energiegleichung in Windrechnungen 170
9.2 Der Kollaps der Kühlungszone 172
9.3 Instabile Windmodelle mit Heizung und Kühlung 186

10. Zusammenfassung **207**

Anhang 1: Analytische Lösungen für stationäre Kühlungszonen 210
Anhang 2: Radiative Kühlungslängen in Sternwinden 213
Anhang 3: Strahlungskühlung innerhalb der viskosen Schockfront 216
Anhang 4: Auflösbarkeit des radiativen Schocks 219
Anhang 5: Numerische Behandlung der Strahlungskühlung 223
Anhang 6: Stabilitätsanalyse der Strahlungskühlungsgleichung 227
Anhang 7: Sprungbedingungen am starken Schock 229
Anhang 8: Ort des Schallpunktes im Wind 233

Literaturverzeichnis **235**

1

Einleitung

Überriesen der Spektraltypen O und B sind die massereichsten, leuchtkräftigsten und heißesten Sterne. Ihre große Leuchtkraft macht sie zu idealen *Entfernungs*indikatoren, und Spektren einzelner OB-Überriesen werden inzwischen bis über die Andromeda-Galaxie hinaus aufgenommen. Die Leuchtkraft bei hoher Effektivtemperatur bewirkt eine *Ionisation* des Gases in ihrer Umgebung, so daß sie meistens in hell leuchtende H II Regionen eingebettet sind.

Aufgrund der Leuchtkraft in der Größenordnung von 10^6 Sonnenleuchtkräften und der großen Dichte absorbierender Metallinien im Flußmaximum des Sterns kommt es zu einem signifikanten Impulsübertrag des Strahlungsfeldes auf die äußeren atmosphärischen Schichten und damit zu einer relativ konstanten Expansion derselben, den *stellaren Wind*. (Winde sind als kontinuierliche Materieabströmungen zu unterscheiden von eruptiven Prozessen). Seit den Raketenbeobachtungen der 60er Jahre ist bekannt (Morton, 1967), welch extreme Bedingungen in diesen Winden herrschen. Die Endgeschwindigkeit der Materie liegt mit 2000 bis 3500 km/s bei einem Prozent der Lichtgeschwindigkeit, die Massenverlustrate eines typischen OB-Überriesen beträgt einige 10^{-6} bis 10^{-5} Sonnenmassen pro Jahr. Aufgrund dieser großen Massenverlustrate haben die Winde heißer Sterne – neben den Supernovae – einen wichtigen Einfluß auf die *chemische* Entwicklung ihrer Umgebung, indem sie das in ihrem Innern nuklear prozessierte Material ausstoßen, und sie können weiterhin durch ihren Impuls- und Energieübertrag an die Umgebung beispielsweise die Entstehung neuer Sterne induzieren. Ihr Massenverlust beeinflußt auch die eigene Entwicklung, denn während einer Lebensdauer von einigen 10^6 Jahren verlieren OB-Überriesen einen merklichen Bruchteil ihrer Masse, was in entsprechenden Sternentwicklungsrechnungen berücksichtigt werden muß.

Es sollen drei prinzipielle Typen stellarer Winde aus sehr verschiedenen Bereichen des Hertzsprung-Russell Diagramms gegenübergestellt werden: i) Die *strahlungsdruck*getriebenen Winde heißer Sterne (speziell werden im folgenden nur leuchtkräftige, massereiche Sterne betrachtet), in welchen der Strahlungsimpuls durch Streuung der *UV*-Photonen in tausenden *Spektrallinien* von *Metallionen* aufgenommen wird, wobei die letzteren den Impuls durch Coulombstöße an das gesamte Windplasma (H und He in erster Linie) weitergeben. ii) Die ebenfalls strahlungsdruckgetriebenen Winde kühler, leuchtkräftiger Sterne (Spektraltypen K bis M, Leuchtkraftklasse Riese oder Überriese) mit kleiner Oberflächengravitation, wo *Staub* durch Absorption des *IR-Kontinuums* den Impuls aufnimmt. (Es soll hier nicht auf den – sehr wichtigen – Einfluß der Sternpulsation eingegangen werden, siehe z. B. Bowen, 1988). Diese Winde haben vergleichbare Massenverlustraten wie die von OB-Überriesen, nämlich 10^{-8} bis $10^{-5}\,M_\odot/\mathrm{yr}$ (abhängig vom Spektraltyp), jedoch sehr kleine Endgeschwindigkeiten von 10 bis 100 km/s (siehe Cassinelli, 1992). iii) *Thermische* Winde ($\rightarrow$ Sonnenwind) als Expansion

einer sehr heißen Korona (bei der Sonne: einige 10^6 K) aufgrund großer Druckgradienten. Thermische Winde treten bei relativ kühlen Sternen kleiner Masse und geringer Leuchtkraft auf. Die Massenverlustrate des *Sonnen*windes liegt bei $2 \cdot 10^{-14}\ M_\odot/\mathrm{yr}$ – jedoch ist der Sonnenwind mit einer Geschwindigkeit in Erdnähe von 300 bis 800 km/s (siehe z. B. Hammer, 1988) ein *schneller* Wind. (Zum Vergleich: Um einen typischen OB-Überriesenwind als koronalen Wind zu erzeugen, wären Temperaturen von 10^8 K nötig.)
Die stark verschiedenen Endgeschwindigkeiten der strahlungsdruckgetriebenen Winde *heißer* und *kühler* Sterne sind durch den Unterschied zwischen *Linien*streuung bei den ersteren und *Kontinuums*absorption bei den letzteren bedingt: Indem eine *Spektrallinie* nur Strahlung in einem kleinen Frequenzintervall (bei einer Linie mit Dopplerprofil entsprechend einem Geschwindigkeitsintervall von einigen thermischen Geschwindigkeiten v_{th}) absorbieren kann, kann Materie bei verschiedenen Geschwindigkeiten im Wind (Dopplerprofil: $\Delta v >$ einige v_{th}) *verschiedene* stellare Frequenzen absorbieren. Insbesondere erhält beschleunigtes Material bei großen Radien weiter die volle, *ungeschwächte* photosphärische Einstrahlung. Die Strahlungs*beschleunigung* durch Streuung in einer optisch dicken Linie ergibt sich damit als proportional zum Geschwindigkeits*gradienten* (siehe Sobolev, 1960, Castor, 1970). – Andererseits wird in staubgetriebenen Winden das stellare IR-Kontinuum bereits durch sternnahe Staubteilchen zum großen Teil absorbiert und damit geschwächt, der Geschwindigkeitsgradient ist klein und die Strahlungsbeschleunigung ergibt sich als unabhängig vom Geschwindigkeitsgradienten.
Dieser Effekt *voller* stellarer Einstrahlung durch den Dopplereffekt bei großen Geschwindigkeitsgradienten ist auch die Wurzel der hydrodynamischen *Instabilität* der Winde heißer Sterne, die wiederum die Ursache der in vorliegender Arbeit betrachteten variablen Struktur dieser Winde ist.

Die *stationäre*, d. h. zeitunabhängige, Theorie der Winde *heißer* Sterne wurde begründet durch zwei fundamentale Arbeiten: Lucy & Solomon (1970) entwickelten das Konzept der Strahlungsbeschleunigung durch Streuung in einer Spektrallinie und berechneten numerische Windmodelle mittels einiger starker, den Wind treibender Linien. Castor, Abbott & Klein (1975) fanden mittels einer *statistischen* Linienverteilungsfunktion eine in großen Teilen analytische Beschreibung des Windes bei Beschleunigung in einer *Gesamtheit* von Linien.
Diese Theorie wurde insbesondere von Abbott weiter ausgearbeitet, der den Bereich im Hertzsprung-Russell Diagramm bestimmte, in dem Strahlungsbeschleunigung durch Linienabsorption wichtig ist (Abbott, 1979), weiterhin den Einfluß der Strahlungsbeschleunigung auf die Ausbreitung hydrodynamischer Wellen im Wind untersuchte (Abbott, 1980) und damit eine physikalische Interpretation des *kritischen* Punktes im Wind gab und schließlich mittels einer umfangreichen Linienliste mit 250.000 Linien der Elemente H bis Zn in den Ionisationsstufen I bis VI (Abbott, 1982) die Strahlungsbeschleunigung berechnete.
Pauldrach, Puls & Kudritzki (1986) und Abbott & Friend (1986) berücksichtigten erstmals die *endliche Ausdehnung* des Sterns (anstelle des bis dahin angenommenen Punktsterns!) in der Berechnung der hydrodynamischen Windstruktur, was Endgeschwindigkeiten und Massenverlustraten in die Nähe der beobachteten Werte brachte. Durch die

Berechnung des detaillierten statistischen Gleichgewichts der Elemente von H bis Zn unter konsistenter Berücksichtigung des ab der He II Ionisationskante optisch *dicken* Kontinuums – im Gegensatz zur Annahme eines optisch dünnen, nur geometrisch verdünnten Kontinuumsstrahlungsfeldes – sowie unter Mitnahme der Elektronenstoßanregung konnte Pauldrach (1987) in einem kühlen Wind $T \approx T_{\mathrm{eff}}$ die Existenz hochangeregter Ionen (O VI, S VI, N V) ableiten und damit die beobachtete *Superionisation* erklären. Hingegen zeigt sich, daß *Multiline* Effekte (Puls, 1987), d. h. die Mehrfachstreuung von Photonen an verschiedenen Orten im Wind, in verschiedenen Spektrallinien, die durch den Dopplereffekt im Geschwindigkeitsfeld in Resonanz sind, bei OB-Sternen bedeutend kleinere Änderungen in Massenverlustrate und Endgeschwindigkeit bewirken als ursprünglich angenommen.
Mit dieser detaillierten non-LTE-Behandlung des Windes – zusammen mit einem korrekten Strahlungstransport – ist nun die *quantitative* Untersuchung verschiedener Aspekte der stationären Winde heißer Sterne möglich:
i) Deren spektrale Morphologie hängt vom evolutionären Status ab. So zeigt beispielsweise das beobachtete Si IV Resonanzliniendublett eine starke Abhängigkeit von der Leuchtkraft (Walborn & Panek, 1984, Pauldrach et al., 1990).
ii) Der extreme Wind (hohe Massenverlustrate bei niedriger Endgeschwindigkeit) des LBVs (*Luminous Blue Variable*) P Cygni kann durch die Nähe des Sterns zum Eddingtonlimit erklärt werden. Des weiteren ist dieser Wind *bistabil* (Pauldrach & Puls, 1990), was den beobachteten Schalenabwurf in zeitlichen Abständen von 60 bis 100 Tagen erklärt.
iii) Die Theorie kann auf die Winde von Zentralsternen planetarischer Nebel (Pauldrach et al., 1988) angewendet werden. Diese Sterne haben gegenüber den OB-Überriesen bedeutend kleinere Massen, Leuchtkräfte *und* Radien, so daß insgesamt der Impulsübertrag durch das Strahlungsfeld wieder groß ist.
iv) Mittels detaillierter Diagnostik einer Vielzahl von UV-Linien ist eine quantitative Wind*spektroskopie* möglich (Pauldrach et al., 1993) und damit die Ableitung stellarer Massen und *Radien* (wobei die letzteren aus photosphärischer Spektroskopie nicht zu gewinnen sind) aus Endgeschwindigkeit und Massenverlustrate. Mit den so gewonnenen Sternradien erhält man *spektroskopische* Entfernungen heißer, leuchtkräftiger Sterne, also eine neue, unabhängige Methode der Entfernungsbestimmung (Kudritzki et al., 1992).

Trotz dieser unbestreitbaren Erfolge des stationären Ansatzes erfordert die Beobachtung der *Variabilität* der Sternwinde eine Erweiterung hin zur nichtstationären Theorie. Die Variabilität äußert sich auf typischen Zeitskalen von einem Tag, mit beobachteten Fluktuationen bis in den Stundenbereich. Die *beobachtbaren* Anzeichen von Veränderlichkeit sind vielfältig und reichen vom Radiobereich bis zu den Röntgenstrahlen, wobei der kurzwellige Bereich in naher Zukunft vielleicht bis zu den Gammastrahlen zu erweitern ist. Die unmittelbarsten und in einer Vielzahl von Beobachtungen nachgewiesenen Kennzeichen von Variabilität sind hierbei:
i) Schmale zusätzliche Absorptionskomponenten „wandern“ durch den Absorptionsteil der breiten P Cygni UV-Linienprofile. Diese *Discrete Absorption Components* (DACs) könnten durch lokale Materieverdichtungen (Schalen oder Klumpen) verursacht sein.

ii) OB-Überriesen sind Röntgenquellen mit einer typischen Röntgenleuchtkraft von 10^{-7} der Gesamtleuchtkraft. Die anfängliche Vermutung, daß diese Röntgenstrahlung aus einer heißen Korona über der Photosphäre stammt (die jedoch nicht weit in den Wind reicht), konnte in den letzten Jahren mit nahezu vollständiger Sicherheit ausgeschlossen werden (Cassinelli & Swank, 1983, Lucy & Baade, 1987). Als Ursprung der Strahlung werden inzwischen starke Schocks im Wind angenommen, die das Material auf Temperaturen von einigen 10^6 K (bis zu 10^7 K) aufheizen können, siehe z. B. Hillier et al., 1993. Diese Schocks sind möglicherweise die Ursache einer Vielzahl anderer beobachtbarer Effekte, wobei hier nur der spektakulärste, die *Fermibeschleunigung* 1. Ordnung von Teilchen auf relativistische Geschwindigkeiten genannt sei. Diese kann sich als nichtthermische Radiostrahlung aufgrund Synchrotronstrahlung relativistischer Elektronen äußern (White, 1985) oder als Gammastrahlung aus dem Pionzerfall relativistischer Protonen (White & Chen, 1992a).

Die Variabilität der Winde heißer Sterne wird auf die *hydrodynamische Instabilität* der Linienstrahlungsbeschleunigung zurückgeführt, die ebenfalls erstmals von Lucy und Solomon (1970) beschrieben wurde (wobei der Mechanismus der Instabilität gewisse Analogien zu einem von Milne (1926) gefundenen Effekt hat.) Erste lineare Analysen dieser Instabilität stammen von MacGregor et al. (1979), Carlberg (1980) und Abbott (1980), wobei eine umfangreiche mathematische Analyse jedoch erst in den Arbeiten von Owocki und Rybicki (1984, 1985, 1986, 1991), Rybicki, Owocki & Castor (1990) und Lucy (1984) unternommen wurde.
Der grundlegende Mechanismus der Instabilität ist der folgende. Erhält Materie im monoton wachsenden Geschwindigkeitsfeld innerhalb einer *optisch dicken* Linie eine kleine positive Geschwindigkeitsstörung, so gelangt sie aufgrund der Dopplerverschiebung aus dem *Absorptionsschatten* weiter innen liegenden Materials heraus und erfährt größere stellare Einstrahlung. Die Strahlungskraft auf diese Materie wächst an, und damit wächst die Geschwindigkeit *weiter*.
Die gleichzeitige *Verringerung* der Strahlungskraft auf *weiter außen* liegende Materie durch *Absorption in der Störung* – was insgesamt eine *Stabilisierung* ergibt – wurde erstmals von Owocki & Rybicki (1984) berücksichtigt.
Nahezu gleichzeitig wies Lucy (1984) auf den „*Line Drag*“ Effekt hin, d. i. die marginale Stabilisierung des Windes unmittelbar über der Sternoberfläche aufgrund des *gestreuten* Strahlungsfeldes. Trotz dieses stabilisierenden Einflusses ist der Wind aber bereits relativ nahe am Stern ($\approx 2\,R_*$) wieder hochgradig instabil (Owocki & Rybicki, 1985).
Weiterhin sollte das diffuse Strahlungsfeld einen großen Einfluß auf das *Ausbreitungs*verhalten von Wellen im Wind haben und damit auf die sich entwickelnde Windstruktur (Owocki & Rybicki, 1985, Puls, 1993).

Diese Stabilitätsanalyse infinitesimal kleiner Störungen des Windes kann nur bedingte Aussagen machen über die voll entwickelte Windstruktur. (Doch ist die Aussagekraft der linearen Stabilitätsanalyse hydrodynamischer Instabilitäten oft sehr groß und kann bereits die entstehenden Strukturen richtig beschreiben, z. B. hexagonale Muster bei der Konvektion, siehe Chandrasekhar, 1961). Erste *phänomenologische* Modelle der voll

entwickelten Windstruktur stammen von Lucy und White (1980) (Klumpenmodell des Windes) und Lucy (1982b) (Sägezahnstruktur aus *forward* Schocks).
Die erste *konsistente* numerische Berechnung der Windstruktur aus der Strahlungskraft*instabilität* unter den vereinfachenden Annahmen von eindimensionaler *sphärischer Symmetrie* und *Isothermie* (Owocki, Castor & Rybicki, 1988) berücksichtigte allein die *Absorption* der stellaren Photonen, nicht das diffuse Strahlungsfeld aufgrund der Reemission. Die übliche *Sobolevnäherung* in der Berechnung der Linienkraft – was zu einer großen Vereinfachung derselben führt – kann hier *nicht* durchgeführt werden, da die Instabilität sich auf Längenskalen *kleiner* als der *Sobolevlänge* L_S entwickelt (Owocki & Rybicki, 1984).
Das Resultat dieser Simulationen ist eine ausgeprägte Windstruktur mit einer Abfolge *dichter Schalen*, die an der inneren, sternwärtigen Seite durch einen *reverse* Schock, an der äußeren Seite durch einen *forward* Schock begrenzt sind. (Hierbei läuft ein „*reverse* Schock“ relativ zum Windmaterial vor und hinter dem Schock nach innen, ein „*forward* Schock“ nach außen, doch laufen beide Schocks im supersonischen Wind *vom Stern* weg.) Dichtekontraste bis zu 10^3 und 10^4 treten an den isothermen Schocks auf. Da Materie einen Schock nur in einer Richtung passieren kann, gelangt sie in die Schalen *hinein*, jedoch nicht mehr aus diesen hinaus; jedes Teilchen wird im Wind höchstens einen Schock durchlaufen. Die Schalen sind sehr *schmal* aufgrund der großen Machzahl der Schocks an ihren Rändern.

Aufgrund des *Line Drag* Effekts (Lucy, 1984) sowie durch die Feststellung, daß sich in den reinen Absorptionswinden ein anderes *stationäres* Geschwindigkeitsfeld als das nach Castor et al. (1975) entwickelt (Poe et al., 1990), ist jedoch ein *wesentlicher* Einfluß des *diffusen* Strahlungsfeldes in den zeitabhängigen, instabilen Windrechnungen zu erwarten. Die exakte Berechnung der *diffusen Kraft* setzt – zu jedem Zeitschritt – die Lösung des Strahlungstransports im nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld des Windes voraus. Bei einer typischen Entwicklungsdauer des Windes von $O(10^4)$ Zeitschritten ist dies ein momentan numerisch nicht behandelbares Problem. Doch kann die diffuse Kraft approximativ mittels der *Smooth Source Function* Methode (Owocki, 1991) als formales Integral mit *vorgegebener* Quellfunktion berechnet werden. Diese Kraft reproduziert den *Line Drag* Effekt und ist um eine Ordnung in einer Entwicklung nach Gradienten der hydrodynamischen Größen genauer als diejenige aufgrund reiner Absorption. Die hiermit berechneten Windmodelle sind stabiler als die mit reiner Absorption, zeigen aber *dieselbe* Struktur dichter Schalen.

Damit sind durch die bisherigen zeitabhängigen strahlungshydrodynamischen Untersuchungen wichtige Erkenntnisse gewonnen worden. Insbesondere ist es möglich, daß stationäre Ansätze zu Ergebnissen führen, die fern von der Realität sind.
Es gilt aber unbedingt zu prüfen, inwieweit die in den bisherigen Modellen zeitabhängiger, instabiler Winde vorausgesetzten Näherungen gerechtfertigt sind, bzw. inwiefern weiterführende Rechnungen notwendig sind.
i) Die zumindest *approximative* Behandlung des *diffusen* Strahlungsfeldes in der Berechnung der Strahlungsbeschleunigung stellt einen entscheidenden Fortschritt gegenüber der Beschleunigung aufgrund reiner Photonenabsorption dar. Es verbleibt jedoch die

Notwendigkeit, die *tatsächliche* Quellfunktion im veränderlichen, nichtmonotonen Wind durch Lösung des Strahlungstransports zu berechnen. Diese *kann* wesentliche Einflüsse auf die Windstruktur haben.
ii) Für die approximative Gültigkeit sphärischer Symmetrie (auch diese aus Gründen verfügbarer Rechnerkapazitäten angenommen) spricht die *Dämpfung* von horizontalen Störungen aufgrund des *Line Drag* Effekts, womit Strukturen im Wind eine große horizontale Kohärenzlänge haben sollten (Rybicki et al., 1990).
iii) Der *Isothermie* liegt die Annahme effektiver *Strahlungskühlung* zugrunde, wonach schockgeheiztes Material innerhalb kurzer Zeiten (gegen die Strömungszeitskala) wieder abkühlen kann, so daß heißes Material keinen Einfluß auf die Wind*dynamik* hat. Die Kenntnis der heißen Bereiche ist jedoch nötig zur Berechnung der *Röntgenemission* der Winde. Weiterhin gilt es, die vorausgesetzte dynamische Isothermie zu überprüfen, denn bei *geringen Dichten* bzw. (sehr) *hohen Temperaturen* ist Strahlungskühlung ineffektiv und die Kühlungszeit nicht mehr notwendig kurz. Geringe Dichten treten bei dünnen Winden auf (z. B. OB-Hauptreihensternen) und weit außen im Wind von OB-Überriesen. Da die beobachtete Röntgenstrahlung der letzteren von großen Radien stammt (nach Hillier et al. (1993) bei ζ Pup von 10 bis einigen $100\,R_*$), ist die Windstruktur in diesen Bereichen von großem Interesse.
Erste Versuche, die instabile Windstruktur unter Mitnahme der Energiegleichung zu berechnen (Cooper & Owocki, 1992), führten auf numerische Defekte: Alle Strahlungskühlungszonen kollabierten, die Schocks wurden wieder (numerisch) isotherm, selbst in Fällen, für die einfache Abschätzungen ausgedehnte Kühlungszonen ergeben.
Zwar können dann *analytische* Lösungen für Kühlungszonen an den *isothermen* Schocks *eingepaßt* werden, um wenigstens zu gewissen Aussagen über das zu erwartende Röntgenspektrum zu gelangen. (Solche Lösungen existieren für planare *stationäre radiative* Kühlungszonen (Chevalier & Imamura, 1982) sowie für eine sphärische *selbstähnliche adiabatisch* kühlende Schale (Simon & Axford, 1966). Doch unterliegen die radiativen Kühlungszonen heißer Schocks einer oszillatorischen thermischen Instabilität (Langer et al., 1981), die nicht mehr analytisch behandelbar ist. Des weiteren ist nicht ganz klar, wo im Wind die radiative Kühlung ineffektiv wird und infolgedessen die adiabatische Kühlung dominant. So könnten *schmale*, dichte Schalen bis zu großen Radien zu finden sein, denn die Schalen werden relativ nahe am Stern in Bereichen hoher Dichte und guter Strahlungskühlung gebildet. Dies (und anderes) ist nur durch eine numerische Berechnung der Winddynamik im Detail zu behandeln.

Neben diesen unmittelbaren Notwendigkeiten erweiterter Rechnungen zu variablen Winden können auch noch einige Punkte breiteren Interesses angeführt werden:
1. In instabilen Medien kommt es zu ungewöhnlichem Verhalten in der Informationsausbreitung. So zeigten Owocki & Rybicki (1985), daß sich in einem Absorptionswind Information *nicht* mit der Gruppengeschwindigkeit ausbreitet (bzgl. dieses Verhaltens instabiler Medien vgl. Bers, 1983). Die Ausbreitung von Information über die *aktuelle* hydrodynamische Struktur hat aber offensichtlich großen Einfluß auf die Ausbildung der Struktur selbst.
2. Die Strahlungshydrodynamik der *Linien*beschleunigung ist insgesamt noch wenig untersucht gegenüber der Kontinuumstrahlungs- und der Magnetohydrodynamik (siehe

z. B. Stone & Norman, 1992a, b, und Stone, Norman & Mihalas 1992). Eine Vielzahl hydrodynamischer Effekte (neben der Instabilität, linearen Wellen, Schocks) könnten in den Winden auftreten. So beschreiben Waldron et al. (1993) die Entstehung von *Solitonen* im starken Geschwindigkeitsgradienten ($\rightarrow$ Dispersion) der Winde. Außerdem ist mit jeder Instabilität die Frage nach dem zugehörigen Weg zur *Turbulenz* verknüpft, wobei bezüglich der Linienkraftinstabilität noch nicht einmal der entsprechende dimensionslose Parameter ($\rightarrow$ Reynoldszahl) bekannt ist.
3. In den Schocks im Wind kann es zu hochenergetischen Prozessen kommen (für eine Zusammenstellung siehe White & Chen, 1992b). In Schocks des Sonnenwinds beim Aufprall auf die Magnetfelder der Erde, Jupiters usw. sowie in Supernovaschocks werden diese schon seit längerem untersucht und beobachtet (siehe Sagdeev & Kennel, 1991).

Ziel vorliegender Arbeit ist die verbesserte Berechnung der zeitabhängigen hydrodynamischen Windstruktur aus der nichtlinearen Entwicklung der Instabilität der Linienstrahlungsbeschleunigung. Dies soll zunächst für sphärisch symmetrische *isotherme* Winde durchgeführt werden. Im nächsten Schritt soll dann der Energietransfer im Wind, also die Schockheizung, Strahlungskühlung und Kühlung durch Expansion berücksichtigt werden.

Die weitere Arbeit gliedert sich wie folgt. Kapitel 2 beschreibt das verwendete numerische Schema zur Lösung der diskretisierten zeitabhängigen hydrodynamischen Gleichungen. Kapitel 3 diskutiert grundlegende hydrodynamische Effekte, die einerseits zum Verständnis der komplexen Winddynamik dienen, andererseits aufgrund ihrer Einfachheit analytische Lösungen erlauben und somit als Tests für das Lösungsverfahren aus Kapitel 2 herangezogen werden können. In Kapitel 4 wird die Linienstrahlungsbeschleunigung nach Owocki et al. (1988) und Owocki (1991) formuliert, mit Erweiterungen bzgl. nichtmonotoner Geschwindigkeitsfelder und der Temperaturabhängigkeit der Kraft. Kapitel 5 behandelt den physikalischen Mechanismus der Instabilität der Linienstrahlungsbeschleunigung und faßt die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse zusammen. Kapitel 6 bringt eine umfangreiche Diskussion instabiler *isothermer* numerischer Windmodelle. In Kapitel 7 werden Beobachtungsfakten über die Windvariabilität zusammengestellt, und es werden zwei Vergleiche von Ergebnissen aus Rechnungen des Kapitels 6 mit Beobachtungen gezeigt. Kapitel 8 gibt einen Überblick der *energetischen* Prozesse im instabilen Wind, mit Schwerpunkten auf der Strahlungskühlung und auf zwei thermischen Instabilitäten. Kapitel 9 beschreibt erste zeitabhängige Windrechnungen unter Einbeziehung des Energietransfers, Kapitel 10 schließlich gibt eine Zusammenfassung der Ergebnisse.

2

Zeitabhängige numerische Hydrodynamik

In diesem Kapitel soll das Verfahren zur Lösung der *zeitabhängigen partiellen* hydrodynamischen Differentialgleichungen behandelt werden.
Zur Untersuchung der nichtlinearen zeitlichen Entwicklung eines instabilen Sternwindes ist ein numerisches Vorgehen notwendig. Zwar gibt es für einige physikalische Situationen analytische *Ähnlichkeits*lösungen mit Schocks (die immer nichtlinear sind), doch stellen diese Lösungen aufgrund ihrer Skaleninvarianz keine echten dynamischen Entwicklungsprozesse dar. Gerade von solchen Prozessen gibt es im Sternwind mehrere, die wesentlich sind:

1. Kleine Störungen wachsen aufgrund der Instabilität der Linienstrahlungsbeschleunigung zu einer voll entwickelten Windstruktur an, nämlich, wie die Rechnungen zeigen, mit Schalen oder Klumpen verdichteten Materials.
2. In der Windstruktur kommt es zu nichtlokalen Kopplungen, wie beispielsweise der spektralen Strahlungsabschattung weit außen liegenden Materials durch innen liegendes.
3. Die Schalen oder Klumpen kollidieren untereinander, verschmelzen zu größeren Einheiten, die eventuell wieder kollidieren können. Setzt hierdurch fraktales Wachstum ein? (Die Selbstorganisation der kosmischen Strahlungsdruckinstabilität wurde von Hogan (1991) und Hogan & Woods (1992) gefunden.)
4. In einem streng monoperiodisch gestörten Wind mit rein lokalen Kräften sollte die entstehende Struktur ebenfalls streng periodisch sein – womit es keine Kollisionen von Schalen bzw. Materieklumpen gäbe. Die Ursache der Kollisionen sind Obermoden der Grundperiode und nichtlokale Einflüsse.
5. Nichtlokale Strahlungstransportprozesse aufgrund vielfacher Resonanzorte in einem nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld treten auf; auch Laufzeiteffekte der Photonen in der ausgedehnten Windstruktur könnten eine Rolle spielen.
6. Verschiedene Zeit- und Längenskalen können im Wind ihre Rangabfolge vertauschen. So sind i. a. nahe am Stern *Kühlungs*zeiten heißen Materials aufgrund von Abstrahlung kurz gegen *dynamische* Zeitskalen, jedoch lang gegen diese für große Abstände vom Stern.

Eine geschlossene Behandlung der zeitabhängigen Strahlungshydrodynamik von Sternwinden kann daher nur durch einen detaillierten numerischen Ansatz erzielt werden. Dies wird im weiteren verfolgt.

In Abschnitt 1 dieses Kapitels werden einige allgemeine Bemerkungen zu stationären und zeitabhängigen hydrodynamischen Verfahren im Hinblick auf Windrechnungen gemacht. In Abschnitt 2 wird das verwendete Lösungsschema beschrieben, Abschnitt 3 stellt einige andere übliche Verfahren zusammen.

Es existieren einige technisch sehr ausführliche Artikel zur numerischen Hydrodynamik, weswegen in diesem Kapitel auf eine Darstellung der technischen Aspekte des verwendeten Verfahrens weitgehend verzichtet werden soll; insbesondere soll keine konsistente Formulierung der Gleichungen auf einem diskreten numerischen Gitter gegeben werden.
Artikel, welche die technischen Punkte bezüglich des in vorliegender Arbeit verwendeten Verfahrens herausarbeiten, sind:
Reile und Gehren (1991). Hier wird (im Rahmen des Problems der Sonnenkonvektion) die Grundlage des von uns (nochmals) programmierten Schemas beschrieben. Frühere Arbeiten zur Anwendung dieses Schemas stammen von Kley & Hensler (Akkretionsscheiben) (1987) und Burkert & Hensler (1988) (Galaxienentwicklung).
Stone und Norman (1992a). Diese neueste Version des Norman et al. (1980) Strahlungsmagnetohydrodynamikprogrammes ist im Kern des verwendeten hydrodynamischen Lösungsverfahrens praktisch identisch mit dem in Reile & Gehren (1991) beschriebenen.
Norman & Winkler (1986) und *Winkler & Norman (1986).* Beide Artikel behandeln einige technische Punkte sehr detailliert (numerische Viskosität, konsistente Advektion, Lösung der Energiegleichung).
Hawley, Smarr & Wilson (1984). Hier wird das Monotonizitätskonzeptes bei der Advektion ausführlich dargestellt.
Rózyczka (1985) gibt eine kurze Darstellung des numerischen Verfahrens sowie ein Schema zur Lösung der Energiegleichung mit Strahlungskühlung.
Van Leer (1977) und *Colella & Woodward (1984).* Dies sind die zwei grundlegenden Arbeiten zu den monotonisierten linearen und parabolischen Advektionsschemata.

2.1 Stationäre und zeitabhängige numerische Hydrodynamik

Zur Lösung *stationärer* hydrodynamischer Probleme werden oft komplexe numerische Verfahren benötigt. Die zu lösenden Gleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen, und die Lösung wird oft durch *Iteration* ermittelt.
Dagegen werden zur numerischen Lösung der vollständigen *zeitabhängigen*, partiellen hydrodynamischen Gleichungen mehr physikalisch motivierte Konzepte verwendet anstelle von numerischen. Solche physikalischen Konzepte sind z. B.: Courantzeitschritt, Kontrollvolumen, *upwind* Advektion, Monotonizität, konsistente Advektion, künstliche Viskosität (und Wärmeleitfähigkeit), nichtreflektierende Randbedingungen, Charakteristikenverfahren, Riemann*solver*, Schockdetektoren.
Stationäre Lösungsverfahren sind oft eng auf das jeweilige Problem beschränkt: Die Berechnung des stationären CAKschen Sternwindes beispielsweise erfordert eine aufwendige Suche nach dem kritischen Punkt der Lösung. Jede Änderung der zugrundeliegenden Physik macht eine eventuell große Abänderung des Lösungsschemas nötig. Zeitabhängige Verfahren sind meist allgemeiner formuliert und neue physikalische Effekte können „schrittweise" hinzugenommen werden. (Für das Beispiel des Sternwinds: Bei der zeitabhängigen Behandlung tritt überhaupt kein kritischer Punkt auf; dieser ist ein mathematisches (siehe aber Abbott, 1980) Artefakt der stationären Gleichungen.)

Man kann ein *zeitabhängiges* Verfahren zur Lösung eines *stationären* Problems verwenden. Hierzu startet man mit einer geeigneten Anfangsbedingung und läßt diese sich entwickeln. Der Weg zur gesuchten Lösung hin ist dann ein *physikalischer* und beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems (z. B. Hinauslaufen eines Schocks), während stationäre Verfahren die gesuchte Lösung numerisch iterieren. Man hat dann mit einem zeitabhängigen Verfahren ggf. auch bessere Kontrolle über die gewonnene Lösung: Die Konvergenz hin zu einem stationären Wind z. B. kann an der räumlichen und zeitlichen Konstanz der Massenverlustrate geprüft werden (bis zur numerischen Signifikanz von ≈ 12 Stellen). In einem stationären Verfahren dagegen ist die konstante Massenverlustrate vorausgesetzt und die wirkliche Konvergenz der Lösung nicht immer sicher.

Da in astrophysikalischen Objekten meist eine komplexe physikalische Situation vorliegt (Hydrodynamik, Strahlung, Magnetfelder, Ionisation, Zustandsgleichung), wird zu deren Beschreibung ein sehr allgemeines *hydrodynamisches* Lösungsverfahren benötigt, welches das Zusammenspiel dieser vielen Effekte erlaubt. Ein solches soll nun beschrieben werden.

2.2 Das numerische Lösungsverfahren

Zusammenfassung

Wir verwenden ein Eulersches, ein- bzw. zweidimensionales, planares bzw. sphärisches, zeitexplizites, Finite-Differenzen Lösungsverfahren für ein einkomponentiges ideales Gas. Die verschiedenen Anteile der *konservativen* adiabatischen hydrodynamischen Gleichungen werden mit *Operator Splitting* behandelt, wobei die Gleichungen auf zwei *versetzten Gittern* (*staggered grid*) diskretisiert werden. Die *Advektion* (in integraler Form) durch die damit definierten *Kontrollvolumen* geschieht mit den *Flüssen* gemäß dem van Leerschen oder dem *PPA* (*Piecewice Parabolic Advection*) Verfahren. Die Randbedingungen werden über die *Riemannschen Invarianten* festgelegt, z. B. *nichtreflektierende* Randbedingungen. *Künstliche Viskosität* an starken Schocks wird im Zusammenhang mit der *mikroskopischen* Energiegleichung benötigt, nicht bei der Lösung der *Gesamt*energiegleichung. Der einzige nichtadiabatische Anteil der Gleichungen, die (parametrisierte) Gleichgewichts*strahlungskühlung*, kann zeit*explizit* oder -*implizit* behandelt werden.

Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Kontinuitätsgleichung, Impulsgleichung, gesamte kinetische und mikroskopische kinetische Energiegleichung (welche der beiden letzteren verwendet wird, hängt vom numerischen Problem ab, s. u.) lauten, für eine *ideale* Flüssigkeit (Viskosität wird später eingeführt), ohne Festlegung der Dimensionalität und des verwendeten Koordinatensystems,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\,\mathbf{v}) &= 0,\\
\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}\,\mathbf{v}) &= -\mathrm{grad}\,p - \mathbf{g}_{\mathrm{grav}} + \mathbf{g}_{\mathrm{line}},\\
\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}\,(E\,\mathbf{v}) &= -\mathrm{div}\,(p\mathbf{v}) - \mathbf{g}_{\mathrm{grav}}\mathbf{v} + \mathbf{g}_{\mathrm{line}}\mathbf{v} - A\rho^2 T^\alpha,\\
\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\,(e\,\mathbf{v}) &= -p\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} - A\rho^2 T^\alpha.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

(In der Impulsgleichung ist $\rho\mathbf{v}$ komponentenweise verstanden.) Es ist $E = \frac{1}{2}\rho v^2 + e$ die gesamte kinetische Energie pro Volumen, e die thermische = mikroskopische Energie pro Volumen, und das Gleichungssystem wird abgeschlossen durch die Zustandsgleichung eines idealen Gases in der Form (γ der Adiabatenexponent)

$$e = \frac{p}{\gamma - 1}. \tag{2.2}$$

Die thermische Energie eines Teilchens mit f Freiheitsgraden ist $fkT/2$ bzw. $kT/(\gamma - 1)$. Die Teilchendichte ist ρ/μ, mit mittlerem Molekulargewicht μ ($= m_H$ für reinen, neutralen Wasserstoff); mit der idealen Gasgleichung $p/\rho = kT/\mu$ folgt (2).
$\mathbf{g}_{\mathrm{grav}}$ und $\mathbf{g}_{\mathrm{line}}$ sind Gravitations- und Linienstrahlungsbeschleunigung, wobei der Ausdruck für die letztere in Kapitel 4 abgeleitet wird. Der Term $A\rho^2 T^\alpha$ beschreibt in parametrisierter Form die Gleichgewichtsstrahlungskühlung eines heißen, stoßangeregten Plasmas mit Kühlungskonstante A und Kühlungsexponent α. Dies wird in Kapitel 8 näher ausgeführt.
Terme in *vollständiger* Divergenzform spielen im folgenden eine besondere Rolle, siehe die Abschnitte *Advektion* und *Flüsse*.

Dimension und Symmetrie

Das numerische Schema ist für zweidimensionale Rechnungen in kartesischen Koordinaten (x, y) bzw. in Kugelkoordinaten (r, θ) formuliert. Bezüglich der z- bzw. der ϕ-Koordinate ist *Symmetrie* angenommen. In kartesischen Koordinaten ist jede Achse als Symmetrieachse gleichwertig. Für Kugelkoordinaten dagegen ist die erste Symmetrie*brechung*, die einen Übergang von vollständiger 1d Kugelsymmetrie zu 2d notwendig macht, die *Rotation* mit Brechung der θ-Symmetrie. In (r, θ)-Koordinaten ist dann beispielsweise die Ausbildung einer *Scheibe* beschreibbar. Die nächste Symmetriebrechung (ϕ-Symmetrie) bedeutet, daß diese Scheibe nicht mehr 'vollständig' ist, sondern *einzelne* Bahnen in ihr betrachtet werden, die dann durch die Rotation aufgewickelt sind (Gasstrahlen im Wind, Galaxienarme). Diese (r, ϕ)-Koordinaten (z. B. die $\theta = 90^0$ Ebene) sind im Programm noch nicht realisiert.
Bis auf eine Ausnahme (siehe Abschnitt 3.4) sind alle in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen *ein*dimensional, nehmen also vollständige planare bzw. sphärische Symmetrie an. Bezüglich der Testrechnungen ist der Grund hierfür, daß fast alle interessieren-

den analytischen Modellprobleme eindimensional sind. Für zeitabhängige Windrechnungen mit der instabilen Linienstrahlungsbeschleunigung sind 2d Rechnungen momentan aus Rechenzeitgründen nicht möglich. Die Berechnung der 1d Windstruktur mit 1000 radialen Gitterpunkten benötigt etwa 1/2 Cray Y-MP CPU-Stunde. Für 2d Rechnungen mit 100 horizontalen Gitterpunkten würden dann etwa 50 CPU-Stunden gebraucht.
Da aber aus der linearen Analyse der Strahlungskraftinstabilität bekannt ist (Rybicki et al., 1990), daß horizontale Störungen aufgrund des *Line Drag* Effekts (siehe Kapitel 5) schnell gedämpft werden, sollten Strukturen im Wind (die durch die Instabilität verursacht sind) *kleine* Ausdehnung bzw. Skalenlänge in radialer Richtung, jedoch *große* parallel zur Sternoberfläche haben, womit das Auftreten mehr schalenartiger Strukturen als klumpenförmiger zu erwarten ist. Hiermit scheint die Behandlung des Windes in 1d Kugelsymmetrie (als erster Ansatz) gerechtfertigt.

Zeitexplizites Verfahren

Die zeitlichen Ableitungen in den hydrodynamischen Gleichungen werden diskretisiert als

$$\frac{\partial}{\partial t} f_k(x,t) = H[f_1(x,t),\ldots,f_l(x,t)] \rightarrow$$
$$f_k(x,t^{n+1}) = f_k(x,t^n) + \Delta t^n \; H[f_1(x,t^n),\ldots,f_l(x,t^n)], \tag{2.3}$$

wobei f_k für die hydrodynamischen Größen (Dichte, Geschwindigkeit, Energie) steht, H für die entsprechenden Terme der Kontinuitäts-, Euler- und Energiegleichung. Auf der rechten Seite treten nur alte, bekannte Größen zur Zeit t^n auf, mittels derer die neuen, unbekannten Größen zur Zeit t^{n+1} berechnet werden. In einem *impliziten* Verfahren hingegen stehen hier (auch) Größen zur Zeit t^{n+1}. Das im *impliziten* Schema entstehende Gleichungssystem wird man im allgemeinen nicht mehr nach den Unbekannten auflösen können, es wird eine iterative Lösung notwendig. Demgegenüber ist das *explizite* Verfahren nur dann numerisch stabil, wenn der Zeitschritt das Courant, Friedrich & Levi (1928) Kriterium erfüllt (siehe unten), es ist also nur ein bestimmter maximaler Zeitschritt erlaubt. Implizite Verfahren gestatten (meistens; siehe aber Anhang 5) beliebig große Zeitschritte – für einen sehr großen Zeitschritt wird allerdings die Lösung zum neuen Zeitpunkt i. a. sehr stark von der Lösung zum vorherigen abweichen, so daß man keine geeignete Startnäherung für das Iterationsverfahren hat. Die Verwendung impliziter Verfahren ist dann *notwendig*, wenn physikalische Effekte auf *sehr* verschiedenen Längenskalen gleichzeitig mittels nichtäquidistanter Gitter berechnet werden. Dies wird im nächsten Abschnitt 2.3 bei den adaptiven Gittern weiter diskutiert.

Euler vs. Lagrange Code

Eulersche Koordinaten sind *ortsfeste* Koordinaten (x,t). Das Koordinatensystem kann beliebig sein, im engeren Sinn ist jedoch immer ein Inertialsystem gemeint. Lagrangesche Koordinaten (X,t) sind *materiefest*, und die Koordinate X ist der Ort eines Flüssigkeitsteilchens zur (Anfangs-)Zeit t_0; hiermit ist das Teilchen für alle Zeiten charakterisiert, d. h. identifizierbar.
Es soll hier einer manchmal zu begegnenden Fehlinterpretation der Lagrangeschen Koordinaten widersprochen werden. Dieses Koordinatensystem ist *kein* mitbewegtes System. Die Bewegungsgleichung in Lagrangescher Form *ist* die Newtonsche Gleichung für ein (Flüssigkeits-)Teilchen. In der Newtonschen Gleichung $\mathbf{F} = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t)$ ist $\mathbf{x}$ der Ort des Teilchens in einem *beliebigen* Koordinatensystem, meist in einem Inertialsystem; und dies Koordinatensystem braucht sich insbesondere *nicht* mit dem Teilchen mitzubewegen.

Eine Möglichkeit, numerisch zwischen Eulerscher und Lagrangescher Darstellung einfach wechseln zu können, ist die Einführung eines (beliebigen) Vektors von *Gittergeschwindigkeiten* $v_g(x,t)$ (siehe Norman & Winkler, 1986, Stone & Norman, 1992a). Bezüglich der Quellterme der hydrodynamischen Gleichungen (siehe unten) tritt v_g überhaupt nicht auf; in den Ein- und Ausflußgleichungen durch Volumenränder tritt $v(r,t) - v_g(r,t)$ anstelle von $v(r,t)$ auf, also die *relative* Ein-/Ausströmgeschwindigkeit. Am Ende jedes Zeitschrittes wird das neue numerische Gitter mittels

$$x_i(t^{n+1}) = x_i(t^n) + v_g(x_i,t^n)\Delta t^n \tag{2.4}$$

berechnet. Für $v_g \equiv 0$ hat man die Eulersche Darstellung, für $v_g \equiv v$ die Lagrangesche. $v_g = const$ liefert eine Galileitransformation.
Allerdings ist die Formulierung der Randbedingungen in Lagrangescher Darstellung oftmals nicht ganz einfach (siehe MacFarlane & Cassinelli, 1989, Imamura et al., 1984).

Das Operator Splitting

Prinzip des *Operator Splitting* ist, verschiedene *Summanden* (im folgenden durch „H“ bezeichnet) in den hydrodynamischen Gleichungen *nacheinander* abzuarbeiten, wobei jeweils die *aktuellen* Werte der hydrodynamischen Größen ($f,g,\ldots$ im folgenden) verwendet werden. Das *Operator Splitting* Schema lautet dann *beispielsweise*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = H_1(f,g,\ldots) + \cdots + H_m(f,g,\ldots) \rightarrow$$
$$f^1 = f^0 + \Delta t\, H_1(f^0,g^n,\ldots),$$
$$\vdots \tag{2.5}$$
$$f^m = f^{m-1} + \Delta t\, H_l(f^{m-1},g^n,\ldots),$$

wobei hier angenommen wurde, daß alle Summanden H bzgl. f behandelt werden mit Werten von $g,\ldots$ vom Schritt n: *Operator Splitting* führt immer gewisse Freiheitsgrade in das numerische Schema ein, doch meist kann die Reihenfolge der Abarbeitung

und Gruppierung der Terme mittels physikalischer Gründe festgelegt werden. *Operator Splitting* kann auch bezüglich der x- und y-Koordinate in zweidimensionalen Rechnungen durchgeführt werden.
Es gibt Summanden in den Gleichungen, die *nicht* nacheinander mit aktualisierten Werten abgearbeitet werden sollten, beispielsweise in der Eulerschen Bewegungsgleichung die Summe aller auftretenden Beschleunigungen. Diese Summe verschwindet im *stationären* Fall, doch jeder einzelne Term für sich kann große Beschleunigungen bewirken. Bei *Operator Splitting* dieser Terme kann sich zwar insgesamt wieder eine stationäre Lösung entwickeln, doch das Verfahren neigt zur numerischen Instabilität (im Sinne eines Aufschaukelns kleiner Fehler bzw. Störungen). In von uns durchgeführten *isothermen* Testrechnungen mit *Operator Splitting* der Kraftterme traten derlei Instabilitäten *nicht* auf, während die entsprechenden *adiabatischen* Rechnungen extreme numerische Oszillationen zeigten.

Auch gibt es bezüglich des *Operator Splitting* noch gewisse grundlegende Unklarheiten. So findet man in der Literatur häufig die Aussage, *Operator Splitting* bewirke eine (teilweise) „Zeitsymmetrisierung" und das numerische Schema sei von „formal 2. Ordnung" bzgl. der Zeitableitungen (wenn man diese wie oben in 1. Ordnung diskretisiert). Reile (1993) findet *keine* klare Rechtfertigung dieser Aussage.

Versetzte Gitter (Staggered Grids)

Alle *skalaren* hydrodynamischen Felder (bzw. gerade Tensoren), also Dichte, Druck, Energie und Temperatur, sind auf einem *primären* räumlichen Gitter definiert; die Gitterabstände können frei gewählt werden. In die *geometrische Mitte* zwischen zwei Gitterpunkten wird ein *sekundäres* Gitter gelegt, auf dem alle Vektoren (bzw. ungerade Tensoren), also insbesondere die Impulse, definiert sind. Dies entspricht der (differentialgeometrischen) Definition eines Vektorfeldes als Ableitung eines Skalarfeldes und der Tatsache, daß die genauesten numerischen Ableitungen *zentrierte* Ableitungen sind. Das numerische Verfahren wird hierdurch räumlich formal um eine Ordnung genauer sein als bei Verwendung nur eines Gitters, siehe z. B. Richtmyer & Morton (1967). Die einzigen Größen, die auf *beiden* Gittern definiert sind, sind die *Advektions*geschwindigkeiten. Diese werden aus der Dichte und der Impulsdichte mittels linearer Interpolation bestimmt.

Die Advektion

Der Kern der hydrodynamischen *Gleichungen*, wie auch jedes zeitabhängigen Eulerschen hydrodynamischen Differenzen*schemas*, ist die *Advektion*. Die große Vielfalt hydrodynamischer Erscheinungen gründet sich auf diese.

Idee der *Kontrollvolumen*-Methode ist es, den advektiven Anteil der hydrodynamischen Gleichungen in der unmittelbaren integralen = Durchflußform (durch ein Volumen) zu

lösen, anstatt vermittels des Gaußschen Satzes den Übergang zu Differentialgleichungen zu vollziehen. Ein Vorteil ist sofort klar: Die hydrodynamischen Gleichungen erlauben sogenannte *schwache* Lösungen, also Lösungen mit Unstetigkeiten (Schocks und Kontaktunstetigkeiten), an welchen die Differentiale nicht definiert sind.
Als *infinitesimales* Kontrollvolumen wird ein *Gitterzellen*volumen verwendet. Hier zeigt sich ein großer Vorteil der versetzten Gitter: Die Gitterlinien des einen Gitters definieren eine Berandung für zentrierte Volumina des anderen Gitters. Die Diskretisierung der hydrodynamischen Funktionen,

$$f(x) \to F_i = F(x_i),$$

geschieht dann als *Volumenmittel*,

$$F_i = \Delta V_i^{-1} \int_{\Delta V_i} f(x) dV. \tag{2.6}$$

In der Kontrollvolumenformulierung ist das numerische Schema auf direkte Weise *global konservativ*, in einem Rechengebiet mit *undurchlässigen* Rändern sind also Gesamtmasse, -impuls und -energie erhalten: Berechnet man beispielsweise die Gesamtmassenänderung innerhalb eines Volumens mit undurchlässigen Rändern aufgrund der Advektion, so heben sich bezüglich benachbarter infinitesimaler Volumina Ein- und Ausfluß durch die Oberflächen heraus. (In Schemata, welche die hydrodynamischen *Differential*gleichungen diskretisieren, kann es schwierig sein, globale Konservativität sicherzustellen.)

Die Flüsse

Das „Innerste" eines Eulerschen Differenzenschemas ist die Formulierung der *Flüsse* durch die Ränder der Kontrollvolumina. Hier wurden in den letzten 15 Jahren entscheidende Fortschritte erzielt.
Grundidee der neuen Verfahren ist die *Hybridisierung* (wir lehnen uns hier eng an den Übersichtsartikel von Woodward & Colella, 1984, an): Ein Differenzenschema hoher Ordnung und damit großer Genauigkeit wird in *glatten* Bereichen der Strömung verwendet. Dieses Schema wird an Unstetigkeiten stark überschwingen – weswegen an diesen ein Verfahren niedriger Ordnung verwendet wird, welches genügend große numerische Abschneidefehler = Dissipativität (s. u.) hat, um an Unstetigkeiten *monoton* zu bleiben. Ist die Gewichtung beider Schemata optimal gewählt, so wird die Unstetigkeit durch das Verfahren hoher Ordnung scharf gehalten, und unmittelbar hinter der Unstetigkeit wird die Oszillation durch das Verfahren niedriger Ordnung unterdrückt. Boris & Book (1973) führten erstmals ein *Monotonizitäts*kriterium ein, um die relative Gewichtung (an jedem Ort) der beiden Schemata festzulegen:

"*They set the weight factor of the low-order flux to zero unless this would cause an extremum to be introduced which would not be computed using the low-order flux alone.*

In such a case the low-order flux is given just enough weight so that no new extremum is generated" (aus Woodward & Colella, 1984).
Das Monotonisierungsverfahren von van Leer (1977) lautet (auf einem äquidistanten Gitter): Sind $a = (f_i - f_{i-1})/\Delta x$ und $b = (f_{i+1} - f_i)/\Delta x$ links- und rechtsseitige Steigungen einer (hydrodynamischen) Funktion f an der Stelle x_i, so wird die Funktion in der Umgebung dieser Stelle gemäß $f(x) = f_i + s\,(x - x_i)$ mit Steigung

$$s = \begin{cases} 2ab/(a+b) & \text{für } ab > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.7}$$

linear interpoliert.
Dies liegt zwischen f_{i-1} und f_{i+1}! Es werden also keine neuen Extrema in die Funktion f eingeführt. Im Fall eines Extremums in f, und dies kann insbesondere durch eine Überschwingung verursacht sein, ist $\mathrm{sig}(a) = -\mathrm{sig}(b)$ und es wird $s = 0$ gesetzt: anstelle linearer Interpolation (1. Ordnung) wird der konstante Funktionswert f_i verwendet, entsprechend dem *upwind* Schema 0. Ordnung. Die Ableitung s hat die Eigenschaft

$$s \begin{cases} \approx \frac{1}{2}(a+b) & \text{für } a \approx b \\ = \min(a,b) & \text{für } a \gg b \text{ oder } a \ll b\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

"*This ... prevents central differencing across a discontinuity in the solution or in its first derivative, which would lead to numerical oscillations*" (aus Albada, van Leer & Roberts, 1982).
Mit dieser Interpolationsfunktion für f wird dann der Fluß von f berechnet.

Die *stückweise parabolische Advektion* (PPA) nach Colella & Woodward (1984) ist das Kernstück der *stückweise parabolischen Methode*, PPM. Dieses Advektionsschema (mindestens) zweiter Ordnung ist sehr genau, dabei aber auch schwingungsanfällig. Außerdem ist der Algorithmus um ein Vielfaches aufwendiger als das van Leersche Schema, benötigt daher eine relativ große Rechenzeit. Innerhalb des PPA-Verfahrens kann noch ein Unstetigkeitsdetektor verwendet werden (dies nur für Kontaktunstetigkeiten, nicht für Schocks); damit kann PPA Kontaktunstetigkeiten über *beliebig* lange Zeiten hinweg *zwei* Gitterpunkte scharf halten.

Konsistente Advektion

Die *konservativen* hydrodynamischen Größen sind „pro Volumen" definiert, also als *Dichten*: (Massen-)Dichte, Impulsdichte und Energiedichte. Die dann volumen*integrierten* Größen sind bis auf Quell- und Senkenterme erhalten, werden also bis auf diese nur advektiert. Norman, Wilson & Barton (1980) schlagen vor, daß (bei der Berechnung des protostellaren Kollapses) der *Drehimpuls*fluß aus dem *Massen*fluß berechnet werden soll, indem man den letzteren mit dem *spezifischen* Drehimpuls multipliziert – dadurch würde die lokale Erhaltung des Drehimpulses stark verbessert. Dieses Schema wird *konsistente* Advektion genannt, da hiermit die Entwicklung einer Drift zwischen

verschiedenen Eigenschaften der Flüssigkeit verhindert wird: Masse und Drehimpuls können nicht mehr außer Phase geraten.

Die hydrodynamischen Größen Impuls *pro Volumina* und Energie *pro Volumina* haben *keine* Kopplung an die tatsächliche Flüssigkeit, also die *Masse*. Die numerischen Fehler bei der Berechnung der Advektion von Masse, Impuls und Energie sind *unabhängig* voneinander, und es kann sich eine *Drift* dieser Größen ergeben. Typisches Anzeichen dafür ist das Auftreten von scharfen Spitzen (Spikes) an Unstetigkeiten.

Die durch ein infinitesimales Flächenelement $d\mathbf{A}$ mit Normalenvektor $\mathbf{n}$ pro Zeiteinheit fließende Menge der integralen Größe $\mathcal{F}$ (Masse, Impuls, Energie) ist durch den Flußvektor $\mathbf{F}$ der Dichte $f = d\mathcal{F}/dV$ dieser Größe gegeben, nämlich

$$\mathbf{F}(f)\; d\mathbf{A}, \tag{2.9}$$

mit dem Flußvektor

$$\mathbf{F}(f) = \hat{f}\,\mathbf{v}, \tag{2.10}$$

wobei $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit bei $d\mathbf{A}$ ist. Das „Dach" über f soll andeuten, daß der gemäß dem *upwind*, van Leer- oder PPA-Schema *interpolierte* Wert von f einzusetzen ist (f ist in den Zentren der Volumina definiert, nicht auf den Rändern dieser Volumina; eine *Retardierung* berücksichtigt die *Strömung* der Flüssigkeit – für genauere Ausführungen sei auf die in der Einleitung dieses Kapitels angegebenen Artikel verwiesen).
Konsistente Advektion bedeutet dann (siehe Norman et al., 1980, Norman & Winkler, 1986, Stone & Norman, 1992a)

$$\mathbf{F}(f) \to \widehat{f/\rho}\;\mathbf{F}(\rho), \tag{2.11}$$

mit Massenfluß

$$\mathbf{F}(\rho) = \hat{\rho}\,\mathbf{v}. \tag{2.12}$$

f/ρ ist eine *spezifische* Größe, und die Advektion von f ist an die Masse gekoppelt.

Im Programm können konsistene Advektion und Standardadvektion alternativ verwendet werden. Dies, da konsistente Advektion nicht *immer* die besseren Ergebnisse gibt (vgl. Kapitel 3).

Künstliche Viskosität und Wärmeleitfähigkeit

Schocks sind nur im Rahmen der *idealen* Gasdynamik (d. h. reibungsfreies Medium = verschwindende Viskosität) Unstetigkeiten; bei realen Gasen hat der Übergangsbereich eines starken Schocks die Dicke einiger weniger molekularer freier Weglängen (siehe Zeldovich & Raizer (1967), Vol. II, Kap. VII, §1), also einer Skala, die man in numerischen hydrodynamischen Rechnungen (im allgemeinen) nicht auflösen kann. In diesen ist auch

ein realer gasdynamischer Schock eine Unstetigkeit, verbunden mit den entsprechenden numerischen Problemen (Oszillationen usw.).
Beim Konzept der *künstlichen* Viskosität (von Neumann & Richtmyer, 1950) wird der Viskositäts*koeffizient* proportional zum Geschwindigkeitsgradienten gesetzt; damit hat die Viskosität nur verschwindenden Einfluß in hinreichend glatten Strömungsbereichen (auch Kontaktunstetigkeiten), ist jedoch groß an Schocks. Der Viskositätskoeffizient wird so groß gewählt, daß die Dicke des Schocks einige wenige Gitterabstände beträgt: Der Schock stellt dann keine Unstetigkeit mehr dar, sondern nur einen Bereich großer Gradienten, und kann mit demselben numerischen Schema behandelt werden wie der Rest der Strömung. Zwar führt künstliche Viskosität also einen *freien* Parameter ein (den Viskositätskoeffizienten), jedoch beeinflußt dieser die Lösung nur auf der nicht aussagekräftigen Skala im Bereich einiger weniger Gitterabstände.

Von der künstlichen Viskosität ist zu unterscheiden die *intrinsische* Viskosität eines Differenzenschemas, die durch den numerischen Abschneidefehler bei der Diskretisierung der ursprünglichen Differentialgleichungen entsteht. In einem einseitigen ($\rightarrow$ *upwind*) Schema beispielsweise erhält man durch Taylorreihenentwicklung

$$f_i' \overset{\text{Diskret.}}{\longrightarrow} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \overset{\text{Taylor}}{=} f_i' + \frac{1}{2} f_i'' \Delta x + O(f'''), \tag{2.13}$$

wobei $v < 0$ angenommen wurde. (Bei Verwendung zentrierter Differentiale verschwindet der f'' Term.) Der durch die Diskretisierung entstehende Abschneidefehler niedrigster Ordnung ist also von der Form eines viskosen Terms; die Abschneidefehler bewirken insgesamt (u. a.) die *Diffusivität* des Verfahrens.
Wie im letzten Abschnitt beschrieben, ist diese intrinsische Viskosität eine *Alternative* zur künstlichen Viskosität, indem man an Schocks von einem Verfahren hoher Ordnung auf ein Verfahren niedriger Ordnung und hoher Diffusivität umschaltet.

Die ursprünglich von von Neumann und Richtmyer (1950) formulierte künstliche Viskosität ist in Wirklichkeit ein künstlicher *Druck*. Dieser Unterschied zeigt sich in eindimensionalen Rechnungen erst im nichtplanaren Fall, und, wie von Schulz (1964) gezeigt, sollte dann tatsächlich besser eine künstliche *Viskosität* verwendet werden. Es sei q der *skalare* künstliche Druck, $\mathbf{Q}$ die *tensorielle* künstliche Viskosität; q und $\mathbf{Q}$ sollen in Euler- und Energiegleichung wie ein echter hydrodynamischer Druck und eine echte Viskosität eingehen,

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = \cdots - \operatorname{grad} q, \qquad \frac{\partial e}{\partial t} = \cdots - q \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{2.14}$$

bzw.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = \cdots - \operatorname{div} \mathbf{Q}, \qquad \frac{\partial e}{\partial t} = \cdots - \mathbf{Q} : \operatorname{grad}_s \mathbf{v}. \tag{2.15}$$

Hierin ist

$$\operatorname{grad}_s \mathbf{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \tag{2.16}$$

der symmetrisierte Geschwindigkeitstensor. Der Doppelpunkt zwischen zwei Tensoren bedeutet deren zweifache Kontraktion, $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B^{ij}$. Als „echter" Viskositätstensor hat $\mathbf{Q}$ die Gestalt (siehe z. B. Landau & Lifschitz, 1991)

$$\mathbf{Q} = \rho \nu \operatorname{grad}_s \mathbf{v}, \tag{2.17}$$

mit Viskositätskoeffizient ν. Der von Neumann-Richtmyersche künstliche Druck q ist für ein *ein*dimensionales Problem durch *denselben* Ausdruck gegeben.
Eine Unklarheit entsteht bzgl. des *Koeffizienten* ν der künstlichen Viskosität (bzw. des Drucks). Wie schon festgestellt, soll er proportional zum Geschwindigkeitsgradienten sein (womit dann dritte Ableitungen auftreten); jedoch sollte der Viskositätskoeffizient als *Skalar* koordinatenunabhängig sein (Winkler & Norman, 1986), was die Komponenten des Tensors grad $\mathbf{v}$ nicht sind. Winkler & Norman schlagen daher $\nu \sim \operatorname{div} \mathbf{v}$ vor. Damit ergibt sich aber im Sedovproblem (siehe nächstes Kapitel) eine falsche Position des Schocks; die richtige Position erhält man mit $\nu \sim \operatorname{grad} \mathbf{v}$.
Der *künstliche* Viskositätskoeffizient ist dann

$$\nu \equiv b^2 l^2 \, \partial v / \partial r, \tag{2.18}$$

wobei l die mikroskopische Längenskala ist, über die der Schock verschmiert wird, und es wird gesetzt $l = \Delta x$ mit Gitterabstand Δx; b (im folgenden Kapitel im engeren Sinne als *Viskositätskoeffizient* bezeichnet) ist eine Zahl von der Größenordnung 1. Die (analytische) Schockstruktur bei Verwendung der von Neumann-Richtmyerschen Viskosität ist in Richtmyer und Morton (1967) angegeben.

Intrinsische Viskosität reicht manchmal nicht aus, um Schocks numerisch gut behandeln zu können. So wird im PPM-Verfahren neben intrinsischer Viskosität (Umschalten von einem Schema hoher Ordnung auf ein Schema niedriger Ordnung) auch (sehr wenig) künstliche Viskosität verwendet. Da außerdem die Diffusivität eines Verfahrens mit *kleiner* werdender Courantzahl wächst (van Leer, 1977), benötigt man für Rechnungen mit starken Schocks ohne künstliche Viskosität oft lange Rechenzeiten. Es gibt außerdem in zeitabhängigen instabilen Windrechnungen einen relativ zwingenden Grund für die Verwendung künstlicher Viskosität: Aufgrund der hohen Machzahlen der Schocks im Wind führt die *Gesamt*energiegleichung (womit im folgenden immer die gesamte *kinetische* Energie gemeint ist ohne Beiträge *potentieller* Energie) zu numerischen Problemen, und es sollte die *mikroskopische* Energiegleichung gelöst werden.
Es tritt dann bei der mikrokopischen Energiegleichung jedoch eine andere Schwierigkeit auf, wozu wir die hydrodynamischen *Differential*gleichungen und (im weiteren) die *physikalische* Viskosität betrachten. Die *ideale* Gesamtenergiegleichung, also ohne Viskosität, liefert zusammen mit Kontinuitäts- und Impulsgleichung die richtigen Sprungbedingungen am Schock, auch den Entropiesprung. Der letztere bedeutet einen irreversiblen Prozeß, welcher an Energiedissipation geknüpft sein muß – welche von der Viskosität (und Wärmeleitung) durchgeführt wird*! (Siehe hierzu Zeldovich & Raizer

* "*That the entropy should increase across a shock was first pointed out by G. Zemplén*

(1967), Vol. II, Kap. VII §1.) Die Viskosität bedingt also *nur* die Schockdicke, *nicht* die Menge an dissipierter Energie. (Das Entsprechende tritt bei *stationärer* Turbulenz auf. Die makroskopisch zugeführte konstante Energierate (wäre diese 0, würde die Turbulenz zerfallen, also nicht stationär sein) ist gleich der durch Dissipation abgeführten Energierate. Die mikroskopisch dissipierte Energie ist makroskopisch vorgegeben, und die Größe der kleinsten = dissipierenden Wirbel (vgl.: Dicke des Schockübergangs) stellt sich so ein, daß die Viskosität gerade diese Energie in Wärme umwandelt.)
Aus der *mikroskopischen* Energiegleichung kann der richtige Schockübergang *nur* unter Berücksichtigung von Viskosität erhalten werden, die makroskopische kinetische Energie in mikroskopische thermische Energie umwandelt. Ohne Viskosität wäre der Schock ein unstetiger Übergang und könnte allein mittels der integralen Erhaltungssätze richtig behandelt werden. – Jedoch legt die Viskosität nur die Schockdicke fest, und *jedes* Maß an Viskosität führt zum selben Schocksprung; doch liefert der Grenzfall *verschwindender* Viskosität ein falsches Ergebnis: die stationäre planare mikroskopische Energiegleichung ohne Viskosität lautet

$$\frac{d}{dx}(ev) = -p\frac{dv}{dx}. \tag{2.19}$$

Die Verwendung von $e = p/(\gamma - 1)$ und der stationären Kontinuitätsgleichung $\rho v = const$ gibt

$$\frac{d\ln p}{dx} - \gamma\frac{d\ln \rho}{dx} = 0, \tag{2.20}$$

also die *Adiabaten*gleichung $p\rho^{-\gamma} = const$, die am Schock gerade *nicht* erfüllt ist. Der Grund für dieses „falsche" Ergebnis ist die (implizite) Annahme von Differenzierbarkeit: Diese setzt eine stetige Funktion voraus (insbesondere keine Schocks), und in solchen glatten Bereichen *gilt* die Adiabatengleichung.

*Gesamt*energiegleichung, Kontinuitäts- und Impulsgleichung sind auch numerisch in Erhaltungsform formuliert*, so daß sich, unabhängig von den numerischen Abschneidefehlern, die richtigen Schocksprünge ergeben. Die *mikroskopische* Energiegleichung ist keine Erhaltungsgleichung; der Unterschied in der numerischen Behandlung der mikroskopischen Energiegleichung einerseits und der konservativen Kontinuitäts- und Impulsgleichung andererseits äußert sich als echte *numerische Dissipativität* des Verfahrens:

(1905). Zemplén's remark, which today seems obvious enough, is actually far from a triviality. At the time when his note was published, both Kelvin and Rayleigh were of the opinion that $[S] = 0$ *at a shock surface. They therefore had serious doubts as to the validity of the shock wave hypothesis as a model for the behavior of real gases, since the first three of Eqs. (54.1)* [Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie am Schock] *are incompatible with the presumed truth of* $[S] = 0$" (aus Serrin, 1959, S. 219).

* Die Viskosität geht in die Gesamtenergiegleichung als totale Divergenz ein; Integration mittels des Gaußschen Satzes über ein den Schockübergang einschließendes Volumen (so groß, daß wegen kleiner Gradienten $q = \mathbf{Q} = 0$ gesetzt werden kann) läßt den viskosen Energiebeitrag verschwinden. Dies gilt für physikalische Viskosität, künstliche Viskosität und künstlichen Druck.

*Gesamt*energieerhaltung wird numerisch verletzt†, und die Schocksprünge sind nicht mehr richtig. Der einzige Ausweg ist die Verwendung eines *ausreichenden* Maßes an künstlicher Viskosität an Schocks, so daß makroskopische kinetische Energie in mikroskopische thermische Energie überführt wird (physikalische Dissipation), ehe sie numerisch dissipiert wird (Verletzung der Gesamtenergieerhaltung.)

Neben der bisherigen *quadratischen* (wegen den Differentialen zweiter Ordnung) künstlichen Viskosität wird manchmal auch eine *lineare* künstliche Viskosität verwendet (siehe Noh, 1987). Sie soll vor allem numerische Oszillationen hinter dem Schock dämpfen. Jedoch

"*... a noisier shock results from the use of a smaller* C_0^2 *(and* C_1*)* [Koeffizienten der künstlichen quadratischen und linearen Viskosität]*, but this noise does not seem, in practise, to result in any numerical error. Thus, a noisier shock is to be preferred (even though a smooth shock is esthetically more appealing)*" (aus Noh, 1987).

Die *künstliche Wärmeleitfähigkeit* (Noh, 1987) soll einen durch die künstliche Viskosität bedingten Fehler korrigieren: In der Nähe von Wänden (oder allgemeiner: stagnierenden Bereichen der Flüssigkeit, z. B. Kontaktunstetigkeiten) kommt es bei Schockentstehungsprozessen unter Verwendung künstlicher Viskosität zu einer künstlichen Aufheizung des Mediums (siehe nächstes Kapitel). Diese findet über einen Bereich von nur wenigen Gitterpunkten statt, was die Abführung der Exzeßwärme mittels Wärmeleitung nahelegt. Für die entsprechenden Formeln sei auf Noh (1987) verwiesen.

Die Energiegleichung

Die *adiabatische* hydrodynamische Energiegleichung, wonach ein Flüssigkeitsteilchen seine thermische Energie nicht durch Wärmeaustausch mit seinen Nachbarn ändert, sondern nur aufgrund Volumenarbeit, welche durch den an seiner Umrandung angreifenden Druck geleistet wird, wird durch die *nicht*adiabatische Strahlungskühlung erweitert. (Auch die künstliche Viskosität ist, als dissipativer Prozeß, nicht adiabatisch.)

Der *adiabatische* Anteil der *Gesamt*energiegleichung wird nach folgendem numerischen Schema gelöst: i) Advektion der Gesamtenergie, ii) Behandlung von div(pv) mittels Druckadvektion, iii) Gravitationsarbeit, Linienkraftarbeit. An einem Schock sind externe Arbeitsbeiträge gemäß iii) vernachlässigbar, und die Energiegleichung wird in i) und ii) *allein* mit dem Advektionsschema gelöst. Da dieses in *integraler Form* geschieht, erhält man in numerisch exakter Form die Sprungbedingungen am Schock.
Ein Problem bei der Integration der adiabatischen mikroskopischen Energiegleichung ist es, die Gesamtenergieerhaltung *möglichst gut* sicherzustellen. Da *Lagrangesche* Schemata mit primitiven (d. h. nicht-konservativen) Größen (insbesondere der spezifischen thermischen Energie) formuliert sind, tritt dieses Problem dort immer auf. Trulio &

† Physikalische Dissipation bezieht sich auf die makroskopische Energie, numerische Dissipation auf die Gesamtenergie.

Trigger (1961) (wiedergegeben in Noh, 1987) geben folgendes Schema an zur Verbesserung der Energieerhaltung gegenüber dem originalen von Neumann-Richtmyer Lagrangeschen Schema (wir haben dieses Lagrangesche Schema in ein Eulersches übertragen und die künstliche Viskosität weggelassen)

$$\begin{aligned} \hat{e}^{n+1} &= e^n - p^n\,\Delta t\,\operatorname{div}\mathbf{v}^n, \\ p^{n+1} &= (\gamma-1)\hat{e}^{n+1}, \\ e^{n+1} &= e^n - \frac{1}{2}(p^n + p^{n+1})\,\Delta t\,\operatorname{div}\mathbf{v}^n, \\ \textbf{nicht}\quad p^{n+1} &= (\gamma-1)e^{n+1}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Die letzte Zeile hierin bedeutet, daß der Druck *nicht* mehr aus der neuen Energie berechnet wird. Als Druck zum neuen Zeitschritt wird der aus $\hat{e}^{n+1}$ berechnete verwendet. Ein ähnliches Eulersches Schema wird von Norman & Winkler (1986) angegeben. Deren *Operator Splitting* Schema zur Lösung der *mikroskopischen* Energiegleichung lautet:

1. Beschleunigung aufgrund aller Kräfte, außer Viskosität (und außer Inertial- = Advektionstermen)
2. Künstliche Viskosität in Euler- und Energiegleichung
3. Energiegleichung, insbesondere p div $\mathbf{v}$
4. Advektionsterme in Integralformulierung

Dabei ist Punkt 3 der entscheidende. Wir führen folgende Bezeichnung ein: Indizes n und $n+1$ beziehen sich auf Beginn und Ende des *kompletten* hydrodynamischen Zeitschritts. Indizes p und q beziehen sich auf Beginn und Ende des Teil-Zeitschrittes 3. Die Energieerhaltung kann nach Norman & Winkler (1986) verbessert werden, indem man eine *implizite* Gleichung für den Druck ansetzt:

$$p^{n+1/2} = \frac{1}{2}[p^n + (\gamma-1)e^p]. \tag{2.22}$$

In der Energiegleichung kann $\partial e/\partial t = \ldots - p$ div $\mathbf{v}$ mit diesem impliziten Druck berechnet werden; diskretisiert man dies und löst nach der neuen Energie auf, ergibt sich

$$e^p = \frac{e^q - p^n \Delta t \operatorname{div}\mathbf{v}^q}{1 + (\gamma-1)\Delta t \operatorname{div}\mathbf{v}^q}. \tag{2.23}$$

Wichtig ist, daß in dieser Gleichung derselbe Druck p^n verwendet wird wie in der Druck*beschleunigung* $(\rho\mathbf{v})_t = \ldots - \operatorname{grad} p$; *nicht* geeignet wäre der Ansatz

$$p^{n+1/2} = \frac{1}{2}[p^q + (\gamma-1)e^p] \tag{2.24}$$

in der Berechnung der adiabatischen Arbeit.

Eine alternative Behandlung der mikroskopischen Energiegleichung wurde von Hawley et al. (1984) vorgeschlagen (deren Gleichung (18)) und z. B. in Burkert und Hensler

(1988) verwendet. Der Anteil der adiabatischen Arbeit in der mikroskopischen Energiegleichung lautet

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -p\,\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv -(\gamma-1)\,e\,\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{2.25}$$

Integriert man dies über einen Zeitschritt (unter der Voraussetzung, daß div $\mathbf{v}$ konstant ist → *Operator Splitting*), so ist

$$e^{n+1} = e^n\ \exp[-(\gamma-1)\Delta t\,\operatorname{div}\mathbf{v}]. \tag{2.26}$$

Dies stellt auf jeden Fall sicher, daß die thermische Energie niemals negativ werden kann; weiterreichende Betrachtungen zur Energieerhaltung scheinen aber nicht einzugehen, so daß wir den Schemata nach Trulio & Trigger und Norman & Winkler den Vorzug geben.

Der Grund für die Verwendung der mikroskopischen Energiegleichung (und nicht der *konservativen* Gesamtenergiegleichung) in instabilen Windrechnungen ist folgender:
Die Winde von OB-Überriesen erreichen Endgeschwindigkeiten von 2000 bis 3000 km/s, während die thermische Geschwindigkeit der windtreibenden Metallionen bei weniger als 10 km/s liegt, womit das Verhältnis von makroskopischer zu mikroskopischer kinetischer Energie im kühlen Wind größenordnungsmäßig 10^5 ist. Entstehen die beobachteten Röntgenspektren dieser Sterne mit Temperaturen von $T = 3\ldots5\cdot10^6$ K (siehe Kapitel 7) an Schocks im Wind, so haben diese Schocks Machzahlen von 15 bis 20 (dies aus $p_{\rm post}/p_{\rm pre} = 1,25\,{\rm Ma}^2$ und $\rho_{\rm post}/\rho_{\rm pre} = 4$ an einem starken Schock). Die Schocks sind also stark genug, um den Großteil der makroskopischen kinetischen Energie in thermische Energie umzuwandeln, das Verhältnis der beiden Energien am Schock ist dann von der Größenordnung 1. Der thermische Anteil der Gesamtenergie ist daher eine numerisch sehr schlecht konditionierte Größe und kann im ungeschockten Wind praktisch nicht berechnet werden, denn Interpolationsfehler der Energie zwischen den versetzten Gittern sind bereits größer als dieser thermische Anteil. Rechnungen mit der Gesamtenergiegleichung führen in instabilen Winden zu i) stark negativen Temperaturen und ii) starken Oszillationen an Schocks (siehe hierzu Abschnitt 3.9).

Die nichtadiabatische *Strahlungskühlung* schließlich wird im Rahmen dieser Arbeit nur in parametrisierter Form betrachtet. (Physikalische Prozesse bei der Strahlungskühlung werden in Kapitel 8 behandelt.)
Die Strahlungskühlung kann zeit*explizit* oder -*implizit* berechnet werden. Ein implizites Schema empfiehlt sich, wenn die Kühlungszeit bedeutend kürzer ist als die adiabatische Strömungszeitskala r/v bzw. $1/v'$; in diesem Fall müßte ein sehr viel kürzerer Zeitschritt als der Courantsche verwendet werden, um die Strahlungskühlung richtig zu berechnen. Wir werden im übernächsten Abschnitt abschätzen, daß in solchen Fällen die Kühlungs*zone* kürzer ist als der Gitterabstand, es also keinen Sinn macht, den Zeitschritt so kurz zu machen, daß die Strahlungskühlung „aufgelöst" wird; stattdessen können diese kurzen Kühlungszonen rein *numerisch* korrigiert werden: Negative Temperaturen, die bei zu großen Zeitschritten auftreten, können einfach auf einen willkürlichen Minimalwert (*floor value*) gesetzt werden.

Zum anderen finden wir in Anhang 5, daß für die parametrisierte Strahlungskühlung auch das implizite Verfahren einer Zeitschrittbegrenzung – allein aufgrund der Forderung *positiver Temperaturen* – unterliegt, die i) für implizite Verfahren kürzer sein kann als für das explizite Verfahren und ii) kürzer sein kann als die entsprechende Stabilitätszeitgrenze (siehe hierzu Anhang 6), soweit man die letztere überhaupt angeben kann.
Numerische Schemata zur Behandlung der Strahlungskühlung werden in Rózyczka (1985) und Mair et al. (1988) angegeben. Rózyczka schlägt folgende Reihenfolge in der Energiegleichung vor: *vorläufige Kompression → vorläufige neue thermische Energie → echte Strahlungsverluste (bzgl. dieser Energie!) → vorläufige neue Energie → neuer Druck → echte Kompression mit Druckmittelwert.* Mair et al. (1988) berechnen die *halbe* Strahlungskühlung zu Beginn des Zeitschritts, anschließend (→ *Operator Splitting*) den vollständigen *adiabatischen hydrodynamischen* Zeitschritt und abschließend die zweite Hälfte der Strahlungskühlung.
Im Rahmen vorliegender Arbeit hingegen wurde zuerst der adiabatische Teil der *Energie*gleichung berechnet und nach Aktualisierung aller erforderlichen Werte die Strahlungskühlung. Dies hat den Vorteil einer größtmöglichen Trennung adiabatischer von nichtadiabatischen Termen.

Quell- und Senkenterme

Die neben advektiven Termen, Kompressionsarbeit, künstlicher Viskosität und Strahlungskühlung auftretenden Ausdrücke in den hydrodynamischen Gleichungen (1), also Druck-, Gravitations- und Linienkraft sowie ggf. Gravitations- und Linienarbeit, können direkt und einfach diskretisiert werden, d. h. man hat bei der *Diskretisierung* keine weiteren Feinheiten zu beachten.

Der Zeitschritt

In einem zeit*expliziten* Verfahren ergibt sich eine Begrenzung des Zeitschrittes aus der Forderung nach numerischer Stabilität. Die CFL-Bedingung (nach Courant, Friedrichs & Lewy, 1928) für ein eindimensionales Problem ist

$$\Delta t \leq \min \frac{\Delta x_i}{|v| + a}, \tag{2.27}$$

wobei das Minimum über das ganze Rechengebiet zu erstrecken ist. Dieser Zeitschritt gilt für eine adiabatische Strömung nur mit Advektionstermen und Druckkräften. Jeder weitere Term in Euler- oder Energiegleichung, der von den hydrodynamischen Größen (ρ, v, p, T) abhängt, bewirkt eine weitere Grenze an den Zeitschritt. (Ein *vorgegebenes* Gravitationsfeld hat keinen Einfluß auf den Zeitschritt, da GM/r^2 unabhängig von den hydrodynamischen Größen ist.) Da aufgrund des *Operator Splitting* jeder Summand in den hydrodynamischen Gleichungen *für sich* abgearbeitet wird, sollte der tatsächliche

Zeitschritt sich ableiten aus den jeweiligen erlaubten Zeitschritten der Einzelprozesse. Eine solche mögliche Formulierung wird in Stone und Norman (1992a) gegeben,

$$\Delta t \leq \left[\max(\Delta t_1^{-2} + \cdots + \Delta t_n^{-2})\right]^{-1/2}, \tag{2.28}$$

mit den Zeitschritten $\Delta t_1, \ldots$ der jeweiligen Einzelprozesse an *einem Gitterpunkt* (wir haben hier auf den Index i verzichtet); das Maximum ist wieder über den gesamten Rechenbereich zu nehmen. Diese Gleichung entspricht dem mehrdimensionalen Courant-Kriterium, siehe Roache (1982).
In den Windrechnungen ist neben dem adiabatischen Courantschen Zeitschritt noch der Zeitschritt aufgrund künstlicher Viskosität und aufgrund von Strahlungskühlung (s. o.) zu bestimmen.

Die jeweils erlaubten Zeitschritte findet man mittels einer *Stabilitäts*analyse (siehe Roache, 1982, für die Verfahren nach von Neumann, Thom & Apelt und Hirt). Grundschwierigkeit hierbei sind nichtlineare Terme in den hydrodynamischen Gleichungen, weshalb z. B. für die *künstliche* Viskosität aufgrund des Viskositäts*koeffizienten*, der proportional zum Geschwindigkeitsgradienten ist, kein exaktes Zeitschrittkriterium angegeben werden kann. Wir verwenden daher, wie in der Literatur üblich (siehe Stone & Norman, 1992a), einfach das Zeitschrittkriterium für *echte Newtonsche*, lineare Viskosität,

$$\Delta t \leq (\Delta x)^2 / 2d\nu, \tag{2.29}$$

mit $d = 1$ für eindimensionale Rechnungen, $d = 2$ für zweidimensionale Rechnungen, siehe Roache (1982), S. 39 und S. 52.

Die Zeitschrittbegrenzung für *Strahlungskühlung* wird in Anhang 5 und 6 behandelt. – Es ist aber auch anschaulich klar, daß der Zeitschritt kleiner als die Kühlungszeit sein muß, um die Dynamik der Kühlung zu erfassen. Wir wollen abschätzen, daß solchen Kühlungszeiten, die kleiner sind als der Courantzeitschritt, Kühlungszonen entsprechen, die kürzer als der Gitterabstand und somit prinzipiell unauflösbar sind. (Das räumliche Gitter wird zu Beginn der Rechnung fest vorgegeben, es gibt keine Gitterverfeinerungen im Lauf der Zeit. Daher können nur Strukturen berechnet werden, die größer als dieser vorgegebene Gitterabstand sind.)
Die radiative Kühlungslänge ist die Strecke *im Schocksystem* zwischen Schockfront und dem Ort, wo ein durch den Schock gelaufenes Teilchen wieder auf die *preshock* Temperatur abgekühlt ist*; diese ist ungefähr

$$L_c \approx \tau_c \, v_{\mathrm{post}}, \tag{2.30}$$

* In diese Definition der Kühlungslänge geht auch die *adiabatische* Kühlung mit ein. Da aber gegen die Courantzeit $\sim \Delta r/v$ (wegen $v \gg a$) *kurze* und damit auch gegen die adiabatische Strömungszeitskala r/v bzw. $1/v'$ *kurze* Kühlungszeiten betrachtet werden, ist der Beitrag der adiabatischen Kühlung verschwindend. Der Schock + radiative Kühlungszone kann als *stationär* angenommen werden und wird dann als *radiativer* Schock bezeichnet.

mit *postshock* Geschwindigkeit $v_{\rm post}$ und Strahlungskühlungszeit τ_c. Falls nun

$$\tau_c < \Delta t_{\rm CFL} = \min \frac{\Delta r}{|v| + a} \tag{2.31}$$

ist, dann ist weiter, wegen $v_{\rm post} = \frac{1}{3} v_{\rm jump}$ an einem starken $\gamma = 5/3$ Schock (vgl. Anhang 7),

$$L_c < \frac{1}{3} \Delta r, \tag{2.32}$$

wobei $v_{\rm jump} \leq v$ verwendet wurde (keine Änderung der Bewegungsrichtung).
Im allgemeinen sind sogar die Sprunggeschwindigkeiten an Windschocks ($\approx$ 400 km/s, siehe Kapitel 6) deutlich kleiner als die Windgeschwindigkeit (1000 bis 2000 km/s), so daß der Faktor 1/3 noch unterschritten wird.

Randbedingungen

Aufbauend auf Hedstroms (1979) *nichtreflektierenden* Randbedingungen, gibt Thompson (1987, 1990) eine allgemeine Formulierung einer Vielzahl möglicher Randbedingungen mittels Riemannscher Invarianten. Dieses Verfahren soll hier kurz zusammengefaßt werden.

Nichtreflektierende Randbedingungen. – Randbedingungen in der *zeitabhängigen* Hydrodynamik (hyperbolische Gleichungen) bedeuten immer die Formulierung des *Hereinfließens* durch die Ränder. Denn geschlossene Ränder sind meist trivial zu formulieren (verschwindende Flüsse usw.), und wenn ein Strömungsmerkmal aus dem Lösungsbereich *herausfließt*, so war dieses zuvor innerhalb des Lösungsbereichs, somit bekannt, und muß nicht durch Randbedingungen festgelegt werden. Mathematisch heißt das, daß nur auf *Charakteristiken*, die in den Lösungsbereich *einlaufen*, Randbedingungen angegeben werden müssen, nicht jedoch auf auslaufenden Charakteristiken.
In den hydrodynamischen Gleichungen treten räumliche Ableitungen auf, die auf dem Rand nicht direkt verfügbar sind: Die Diskretisierung aller Ableitungen als *zentrierter* Ableitungen würde die Information von Punkten außerhalb des Rechenbereiches erfordern, die als Randbedingungen festgelegt werden müssen; die Verwendung *einseitiger* Differentiale ist *dann und nur dann* numerisch stabil, wenn sie an das *upwind* Konzept geknüpft ist, wenn also linksseitige Differentiale genommen werden bei einer von links nach rechts fließenden Flüssigkeit und umgekehrt (für den mathematischen Beweis siehe Steger & Warming, 1981). Wenn eine adiabatische Strömung supersonisch aus dem Rechenbereich ausfließt, also keine Schallwellen von außerhalb des Rechenbereiches nach innen laufen können, dann gelangt *alle* Information von innerhalb des Rechenbereiches nach außerhalb, und in diesem Fall ist die Verwendung einseitiger Differentiale am Rand, die nur Größen innerhalb und am Rand des Rechenbereiches verwenden, stabil.

Nichtreflektierende Randbedingungen sind allgemein dadurch definiert, daß *nichts* vom Rand kommend in den inneren Bereich gelangt.

(Es ist klar, daß dies für bestimmte physikalische Situationen eine *falsche* Randbedingung sein wird, z. B. in variablen Windrechnungen, in welchen die Erzeugung der Windstruktur gerade durch aus der Photosphäre in den Wind einlaufende Schallwellen (und deren Verstärkung durch die Strahlungskraftinstabilität) angeregt wird.)
Für die große physikalische Reichweite nichtreflektierender Randbedingungen gibt es zwei (wesentliche) Gründe:
1. Sie sind dann geeignete Randbedingungen, wenn die Lösung am Rand oder im gesamten Rechengebiet *stationär* sein soll, da durch ein stationäres Medium keine Wellen laufen.
2. Numerische Ränder sind Quellen (numerischer) hydrodynamischer Wellen. Es ist im allgemeinen numerisch schwierig, eine Störung, einen Puls oder einen Schock durch einen offenen Rand hinausströmen zu lassen, denn das numerische Schema zur Lösung der hydrodynamischen Grundgleichungen am Rand ist notwendig ein anderes als im Inneren des Rechenbereiches. Der Unterschied zwischen innerem Schema und Randschema bewirkt eine *Störung* beim Transport des Strömungsmerkmals, und eine Störung ist immer die Quelle hydrodynamischer Wellen. Diese können wieder in den Rechenbereich zurücklaufen und die innere Lösung beeinflussen und verfälschen. Die nichtreflektierenden Randbedingungen verhindern gerade die Ausbreitung von jeglichen Signalen vom Rand her ins Innere des Rechengebietes.

Die Analyse an den Rändern nach ein- und auslaufenden Wellen geschieht mit der Riemannschen Charakteristikenmethode (Landau & Lifschitz VI, 1991, Chorin & Marsden, 1990, Smirnov, 1989, Sommerfeld, 1948). Es ergeben sich genau zwei Signalgeschwindigkeiten, nämlich die Geschwindigkeit der Strömung selbst (mit dieser breiten sich Entropiestörungen aus) sowie die Geschwindigkeit linearer Schallwellen.
Die Zerlegung nach Riemannschen Invarianten vereinfacht sich für ein 1d planares isothermes Gas, das daher im folgenden betrachtet werden soll. Kontinuitäts- und Eulergleichung lauten hierfür

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Die Kontinuitätsgleichung wird mit $\pm a/\rho$ multipliziert und zur Eulergleichung addiert,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_\pm = 0, \tag{2.34}$$

mit den Riemannschen Invarianten

$$J_\pm = v \pm \int \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho, \tag{2.35}$$

die sich mit Geschwindigkeiten $v \pm a$ *ausbreiten*: Entlang der Bahnen = Charakteristiken $C_\pm = (t, x_\pm(t))$ im (t,x)-Raum, die sich als Integralkurven des Steigungsfeldes

$$\frac{dx_\pm}{dt} = v \pm a \tag{2.36}$$

ergeben, sind die Invarianten $J_\pm$ *konstant*. (Es ergibt sich hier aufgrund der vorausgesetzten Isothermie keine Invariante, die sich mit v ausbreitet.)
Die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}(t,x) &\to (C_+, C_-)\\ (\rho, v) &\to (J_+, J_-)\end{aligned} \tag{2.37}$$

gestattet die Formulierung der Randbedingung. Dazu werden die charakteristischen Gleichungen (34) in der Form geschrieben

$$\frac{\partial J_\pm}{\partial t} + L_\pm = 0, \tag{2.38}$$

mit $L_\pm = (v \pm a)\,\partial_x J_\pm$. Ist eine Charakteristik C am Rande *aus*laufend, so kann das entsprechende L *berechnet* werden, indem das x-Differential durch eine *einseitige innere* Ableitung diskretisiert wird. Ist andererseits die Charakteristik auslaufend, so muß für das entsprechende L eine Randbedingung festgelegt werden.
Die gesuchte Dichte und Geschwindigkeit am Rand sind zu berechnen aus der *Rück*transformation

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\rho}{2a}[L_+ - L_-],\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{2}[L_+ + L_-],\end{aligned} \tag{2.39}$$

denn mit den so bekannten zeitlichen Ableitungen der hydrodynamischen Größen am Rand können die hydrodynamischen Gleichungen bis zum nächsten Zeitpunkt integriert werden, $\rho^{n+1} = \rho^n + \Delta t\,\dot\rho$, usw.

Wir verzichten hier auf die entsprechende Verallgemeinerung der Gleichungen für den mehrdimensionalen Fall, für andere Symmetrien (sphärische, zylindrische), für nichtverschwindende Körperkräfte, wie Gravitation und Linienkraft und für den adiabatischen Fall anstelle des isothermen. Dies ist in den Artikeln von Thompson (1987, 1990) durchgeführt.

Aus dieser – bisher allgemeinen Betrachtung – ergeben sich *nichtreflektierende* Randbedingungen im speziellen wie folgt:

"*Hedstrom's nonreflecting boundary condition can be stated in the following way: The amplitudes of the incoming waves are constant, in time, at the boundaries. This is the same as saying that there are no incoming waves, as it is the change in amplitude which indicates a wave*" (aus Thompson, 1987).
Für eine einlaufende Charakteristik wird also gesetzt

$$0 = \frac{\partial J}{\partial t} = L. \tag{2.40}$$

Barometrische Strömung. – Um die allgemeine Anwendbarkeit der Zerlegung in Riemannsche Invarianten zur Formulierung von Randbedingungen zu zeigen, soll noch der

Fall einer stationären, planaren, isothermen barometrischen Strömung betrachtet werden. Darunter wird verstanden

$$\begin{aligned}v &\ll a,\\ \rho &= \rho_* e^{-z/H},\\ \rho v &= const.\end{aligned} \tag{2.41}$$

$H = a^2/g$ (mit Gravitationsbeschleunigung g) ist die barometrische Skalenhöhe, ρ_* die („photosphärische") Dichte in der Höhe $z = 0$. Dies ist eine geeignete Randbedingung für stationäre isotherme Winde, also beispielsweise zur Berechnung des CAK/PPK-Windes (siehe Abschnitt 3.5). Es läuft hier nur die C_+ Charakteristik in den Rechenbereich (den Wind) ein, muß also durch eine Randbedingung festgelegt werden. Aus obigen Bedingungen findet man sofort

$$L_+ = -g. \tag{2.42}$$

Dasselbe ergibt sich bei Verwendung nichtreflektierender Randbedingungen.

Für zeitabhängige instabile Windrechnungen wird eine *zweifache* innere Randbedingung verwendet. Zum einen soll sich der Wind zu einer stationären Lösung hin entwickeln können, dies wieder mittels obiger barometrische Einströmung; zum anderen wird eine (monochromatische) Schallwelle erzeugt, die als „infinitesimale" Störung zum Angriffspunkt der Strahlungskraftinstabilität wird.
Die entsprechende Randbedingung lautet (für Schallwellen mit so kleiner Wellenlänge, daß die Dispersionsrelation (6.3) noch näherungsweise linear ist, und deren Amplitude „infinitesimal" klein ist),

$$L_+ = -g + 2Av_*\omega\cos(\omega t), \tag{2.43}$$

wobei v_* die Einströmgeschwindigkeit ist, $A = \delta\rho/\rho_* = \delta v/a$ die Amplitude der Schallwelle und ω deren Winkelgeschwindigkeit. Wir verzichten hier auf die etwas umfangreiche Rechnung.

Ideales Gas, einkomponentiges Medium, Ionisation und NLTE

Die ideale Gasgleichung ist in Sternwinden aufgrund der hohen Temperaturen und niedrigen Dichten sehr gut erfüllt.

Die Rechtfertigung, den Wind als einkomponentiges Medium beschreiben zu können und nicht die einzelnen (dynamisch gekoppelten) Komponenten, nämlich Elektronen, Protonen (ionisierter Wasserstoff), He^+, He^{++} und Metallionen betrachten zu müssen (bzw. Gruppen davon), wurde von Castor et al. (1976) gegeben. Für die in vorliegender Arbeit betrachteten OB-Überriesen ist die Einkomponentennäherung gewährleistet. Castor, Abbott & Klein (1976) sowie Springmann & Pauldrach (1992) finden jedoch, daß diese in *dünnen* Winden, wie sie z. B. bei OB-Hauptreihensternen auftreten, ungültig

werden kann; es kommt (Springmann & Pauldrach, 1992) zur Entkopplung der strahlungsdruckbeschleunigten Metallionen vom restlichen Windmedium und damit einhergehend zum *runaway* der Metallionen (vgl. Abschnitt 8.7).

Die genaue Kenntnis der Ionisationsgrade (und Anregungsgrade) im Wind ist nötig für die korrekte Berechnung der Linienstrahlungsbeschleunigung (siehe insbesondere Abschnitt 4.10) und der Strahlungskühlung (Abschnitt 8.3).
Die Ionisationsgrade müssen hierbei aus einer i) zeitabhängigen Behandlung des ii) nichtlokalen thermischen Gleichgewichts (NLTE) im Wind gewonnen werden.
Im Rahmen vorliegender Arbeit wird nur die *Temperatur*abhängigkeit der Linienbeschleunigung und Strahlungskühlung mittels parametrisierter Ergebnisse aus *stationären* statistischen Gleichgewichtsrechnungen betrachtet.

2.3 Andere numerische Verfahren

Es sollen hier einige andere gebräuchliche Schemata für zeitabhängige numerische Hydrodynamik zusammengestellt und gegen das verwendete Verfahren abgegrenzt werden.

PPM nach Colella & Woodward

Dies scheint das derzeit beste zeitabhängige Verfahren zu sein. Es wurde im Rahmen vorliegender Arbeit allein wegen des erforderlichen Programmieraufwandes nicht verwendet.
Jedoch sollte für die hier durchgeführten Rechnungen die Verwendung des im letzten Abschnitt vorgestellten Verfahrens ausreichen. PPM kann Schocks um bis zu einen Faktor zwei besser als dieses auflösen, doch die prinzipiellen Schwierigkeiten in zeitabhängigen Windrechnungen, wie sie im Detail später geschildert werden, scheinen dadurch nicht lösbar. (Diese Schwierigkeiten sind insbesondere: 1) Die dichten, schmalen Schalen im Wind, in denen ein Großteil der Windmasse komprimiert ist und die deshalb das *beobachtbare* Verhalten des Windes bestimmen, werden schlecht aufgelöst. 2) Die durch die globale thermische Instabilität verursachte Oszillation der Schalen kann diese auf einen so kleinen räumlichen Bereich komprimieren, daß ihre Ausdehnung geringer als der Gitterabstand ist. Dadurch geht wesentliche Information über die Strömung verloren.)

Lagrangesches Differenzenschema

Die Entstehung dichter, schmaler Schalen oder Klumpen im Wind, in welchen fast die gesamte Windmaterie angesammelt wird, legt die Verwendung eines Lagrangeschen Schemas nahe (vgl. MacFarlane & Cassinelli, 1989), bei welchem, in eindimensionalen Rechnungen, die *Masse* anstelle des Ortes als unabhängige Koordinate verwendet wird. Es ist vorgesehen, das bestehende Programm um eine Lagrangesche Option zu erweitern, dies mittels des im letzten Abschnitt beschriebenen Verfahrens eines bewegten räumlichen Gitters.

Adaptive Gitter

Hierunter wird die Hinzunahme einer *Gittergleichung* (Winkler, 1976, Winkler & Norman, 1986, Dorfi & Drury, 1987) zu den hydrodynamischen Gleichungen verstanden. Die Gittergleichung ist so formuliert, daß in Bereichen großer *Änderungen* (→ Winkler) in den hydrodynamischen Größen oder in Bereichen großer *Krümmungen* („Ecken" an Unstetigkeiten → Dorfi & Drury) viele Gitterpunkte gelegt werden. Dabei werden, im Gegensatz zur unten diskutierten „lokalen Gitterverfeinerung", keine neuen Gitterpunkte eingeführt, sondern nur die bestehenden neu gesetzt. Diese Methode kann Phänomene auf *weit* auseinanderliegenden Skalen (viele Dekaden) gleichzeitig behandeln, z. B. eine detaillierte („mikroskopische") Schockstruktur in einer makroskopischen Strömung.
Probleme bei der Verwendung adaptiver Gitter sind:
1. Wegen der sich ausbildenden sehr kleinen Gitterabstände muß ein zeitimplizites Schema verwendet werden. Der Courantsche Zeitschritt eines expliziten Verfahrens würde extrem kurz werden.
2. Eine Gittergleichung ist nur für eindimensionale Rechnungen relativ einfach zu formulieren.
3. Die Gittergleichung führt neue numerische Schwierigkeiten ein. Winkler, Norman & Newman (1983) beschreiben das Auftreten einer „Gitterresonanz", wobei Bereiche im Gitter mit einer Abfolge *kurz - lang - kurz - lang* usw. der Intervalle entstehen. Dies Problem ist zwar zu beheben, doch besteht die Möglichkeit weiterer Gittereffekte.
4. Es kann zu numerischen Schwierigkeiten kommen, wenn *verschiedene* physikalische Längenskalen in bestimmten Bereichen des Rechengebietes oder zu bestimmten Zeiten *vergleichbar groß* werden (P. Höflich, 1992, mündl. Mitteilung). Diese Gefahr besteht bei Schocks nicht, denn der Schockübergang findet immer auf der kleinstmöglichen Skala statt, deutlich unterhalb der betrachteten dynamischen Längenskala. Doch treten konkurrierende Längenskalen in variablen Windrechnungen auf: Die Strahlungskühlungslänge (siehe Kapitel 8) im dichten Wind nahe am Stern wird klein sein gegen die Längenskala der Strömung, jedoch groß sein gegen diese im dünnen Wind weit außen.
5. Owocki et al. (1988) geben als Grund für die Nichtverwendung adaptiver Gitter an, daß die Instabilität der Strahlungsbeschleunigung dazu neigt, Strukturen auf *kleinstmöglichen* Skalen zu entwickeln. Die Verwendung von adaptiven Gittern würde dann eine (von den Autoren so bezeichnete) „Ultraviolettkatastrophe" bewirken: Die Instabilität entwickelt Strukturen auf der kürzesten Gitterskala; aufgrund der Formulierung der Gittergleichung wird dann in diesem Bereich das Gitter verfeinert, die kleinstmögliche Längenskala ist damit kürzer geworden, eine feinere Struktur wird entwickelt werden und so fort.

Lokale Gitterverfeinerung

(Es werden in der folgenden Beschreibung äquidistante Gitter vorausgesetzt.) In räumlichen Bereichen großer Abschneidefehler (→ Schocks usw.) des numerischen Schemas wird bei diesem Verfahren zwischen benachbarten Gitterpunkten ein neues, feineres Untergitter gelegt, dessen Randpunkte die benachbarten Punkte des groben Gitters sind. Das Verhältnis $\Delta t/\Delta x$ von Zeitschritt zu Gitterweite wird, zu einem bestimmten Zeitpunkt, für *alle* Gitter als gleich angenommen. Das Untergitter wird in einer *ganzen* Zahl von Zeitschritten bis zum *nächsten* Zeitschritt des *groben* Gitters weiterentwickelt, ebenso das grobe Gitter um *einen* Zeitschritt. Die *Rand*werte des feinen Gitters werden danach als neue Werte auf den entsprechenden Punkten des groben Gitters verwendet. Die Untergitter werden je nach Bedarf eingeführt und aufgegeben (letzteres wenn z. B. ein Schock einen bestimmten Gitterbereich passiert hat). Die Verfeinerung geschieht rekursiv, indem Untergitter wiederum feinere Untergitter erzeugen können. (Diese Beschreibung gilt für das von Berger & Oliger (1984) entwickelte Verfahren.)

Der Nachteil der Methode ist die große Komplexität der Untergitterparkettierung bei mehrdimensionalen Rechnungen:

> "*It is very tricky to find a general clustering algorithm ... We are lucky to be able to draw on the large literature in pattern recognition and artificial intelligence*" (aus Berger & Oliger, 1984).

Darum empfehlen Berger und Oliger (1984) die Verwendung von insgesamt nicht mehr als drei Gitterhierarchien (also Grundgitter und zwei Subgitter); da jedes Gitter weiterhin nur einen Faktor 2 bis 4 feiner sein sollte als das darüberliegende, ergibt sich eine typische Steigerung der Auflösung von der Ordnung 10, gegenüber bis zu 10^6 bei adaptiven Gittern! Der Vorteil des Verfahrens ist, daß *nur* die Subgitter mit kleinem Zeitschritt gerechnet zu werden brauchen, nicht das ganze Gitter, womit ein zeitexplizites Schema möglich ist. Die „Ultraviolettkatastrophe" kann auch hier stattfinden, hat jedoch eine (künstliche) Grenze in der Abbruchbedingung weiterer Verfeinerung. Das Verfahren scheint insgesamt (für die von uns verfolgten Zwecke) sehr interessant.

Flux vector splitting

Der Flußvektor wird hier in Untervektoren aufgespalten, deren zugehöriger Satz von Eigenwerten – der Jacobimatrix des hyperbolischen Systems der hydrodynamischen Gleichungen in konservativer Form – jeweils *ein* Vorzeichen hat. Die Eigenwerte sind die (Ausbreitungs-)Geschwindigkeiten entlang der Charakteristiken. Die Fluß-Untervektoren werden jeweils mit einem einseitigen *upwind* Schema diskretisiert (Steger & Warming, 1981).

Es sei hier nicht auf die weiteren Entwicklungen dieser grundsätzlichen Idee eingegangen (van Leer, 1982, 1990). Bzgl. der numerischen Qualität ist das Schema mit dem in vorliegender Arbeit verwendeten vergleichbar.

Ältere Verfahren

Hier sind vor allem die Schemata von Lax-Wendroff und MacCormack zu nennen (siehe Roache, 1982). Beide erreichen (bei weitem) nicht die Genauigkeit und Stabilität des im letzten Abschnitt dargestellten Verfahrens, sind aber für Test- und Vergleichszwecke interessant. Außerdem wurde eine Vielzahl analytischer Aussagen bezüglich des numerischen Verhaltens für solche Schemata abgeleitet (siehe Richtmyer & Morton (1967). Wir haben vergleichende Testrechnungen mit dem MacCormack-Schema durchgeführt, verzichten aber im folgenden auf die Wiedergabe der entsprechenden Ergebnisse.

3

Grundlegende hydrodynamische Effekte

Die vollständigen hydrodynamischen Gleichungen (des variablen Sternwindes) beinhalten eine Vielzahl verschiedener Phänomene (Wellen, Instabilitäten, Schocks, ...). Es ist daher nützlich, soweit möglich *einzelne* Phänomene zu isolieren und analytisch zu betrachten. Solche analytischen Lösungen bieten weiterhin die Möglichkeit von *Tests* des numerischen Programms. In diesem Kapitel sollen einige der für uns wichtigen hydrodynamischen Grundeffekte dargestellt werden und ihre analytische mit der numerischen Lösung verglichen werden.

3.1 Lineare Advektion, planar und sphärisch

Das numerische Advektionsschema wird in zwei Schritten getestet: zuerst bezüglich der Lösung der *linearen* Advektionsgleichung, womit sich Stabilität und Diffusivität des Verfahrens testen lassen; im nächsten Abschnitt wird dann die *nicht*lineare Burgersgleichung betrachtet.
Die *lineare* planare Advektionsgleichung lautet

$$\partial_t f + v\partial_x f = 0, \tag{3.1}$$

mit *konstantem* v. Die analytische Lösung ist, für beliebiges f,

$$f(x,t) \equiv f(x - vt). \tag{3.2}$$

Wir betrachten die Advektion eines Dichtesprungs ($f \equiv \rho$)

$$\rho(x, t = 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0,2 \\ 0,1 & \text{für } x > 0,2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Die Advektionsgeschwindigkeit ist $v = 1$. Das Intervall $[0, 1]$ wird in 100 äquidistante Gitterpunkte zerlegt. Mit fester Courantzahl $\sigma = 0,5$ werden 120 Zeitschritte, also bis zum Zeitpunkt $t = 0,6$, gerechnet; der Dichtesprung liegt dann am Ort $x = 0,8$.
Abbildung 1 zeigt die Ergebnisse für das *upwind*, van Leer- und PPA-Schema. (Der Unstetigkeitsdetektor des PPA-Verfahrens wird in hydrodynamischen Rechnungen nur für Kontaktunstetigkeiten verwendet, nicht für Schocks.) Man sieht, daß das *upwind* Schema wegen seiner großen Diffusivität, zu erkennen an der Ausschmierung der Unstetigkeit, praktisch nicht brauchbar ist. Vom van Leerschen Verfahren über PPA zu PPA mit Detektor sinkt die Zahl der numerischen Gitterpunkte innerhalb des Sprungs von 8 über 4 auf 2: Das PPA-Verfahren mit Unstetigkeitsdetektor liegt damit (bezüglich dieses Tests!) an der Grenze zur Exaktheit.

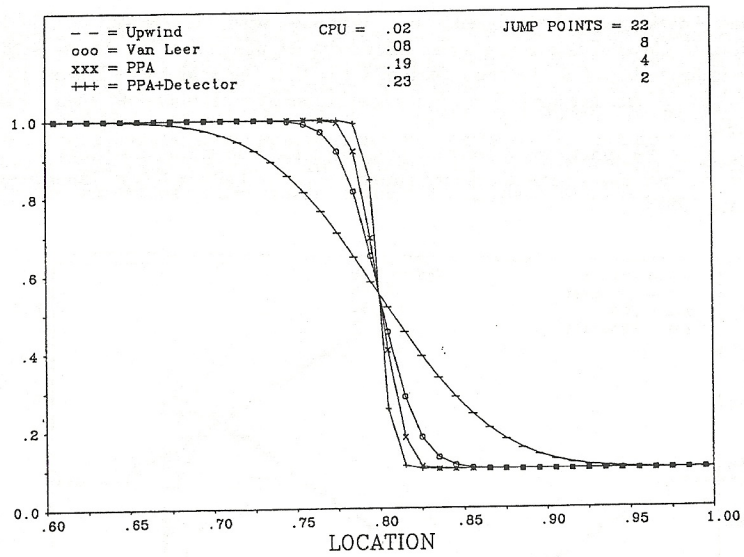


Abb. 3.1. Lineare planare Advektion eines Sprungs.

(Die Spalte „CPU" in Abbildung 1 bedeutet die jeweils benötigte (gesamte) Rechenzeit.)

In den hydrodynamischen Gleichungen in *Erhaltungs*form treten die Advektionsterme in echter *Durchfluß*form (vollständige Divergenzen) auf, siehe Gleichung (2.1). Daher soll auch die *sphärische* lineare Advektionsgleichung betrachtet werden,

$$\partial_t f + \frac{v}{r^2}\partial_r(r^2 f) = 0, \tag{3.4}$$

wobei das konstante v wieder vor das Differential gezogen wurde. Als Lösung dieser Gleichung findet man

$$f(r,t) = \frac{f(r - vt)}{r^2} \equiv f(r - vt, 0)\left(\frac{r - vt}{r}\right)^2. \tag{3.5}$$

Abbildung 2 zeigt die Ergebnisse für einen anfänglichen Rechteckspuls der Dichte,

$$\rho(r, t = 0) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < 0,1 \\ 1 & \text{für } 0,1 \leq r \leq 0,5 \\ 0 & \text{für } 0,5 < r\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

bei einer Advektionsgeschwindigkeit $v = 1$. Wie oben wird das Intervall $[0, 1]$ in 100 äquidistante Gitterpunkte zerlegt. Der Zeitschritt ist nun $\Delta t = 0,1\,\Delta r$, es werden 400 Zeitschritte berechnet bis zum Zeitpunkt $t = 0,4$. Die analytische Lösung ist in Abbildung 2 als durchgezogene Linie gezeichnet (diese ist *nicht* linear zwischen $r = 0,5$ und 0,9).
Insgesamt ist die sphärische Advektion numerisch nicht so zufriedenstellend wie die planare, dies vor allem nahe der Koordinatensingularität bei $r = 0$ (vgl. Mönchmeyer & Müller, 1989).

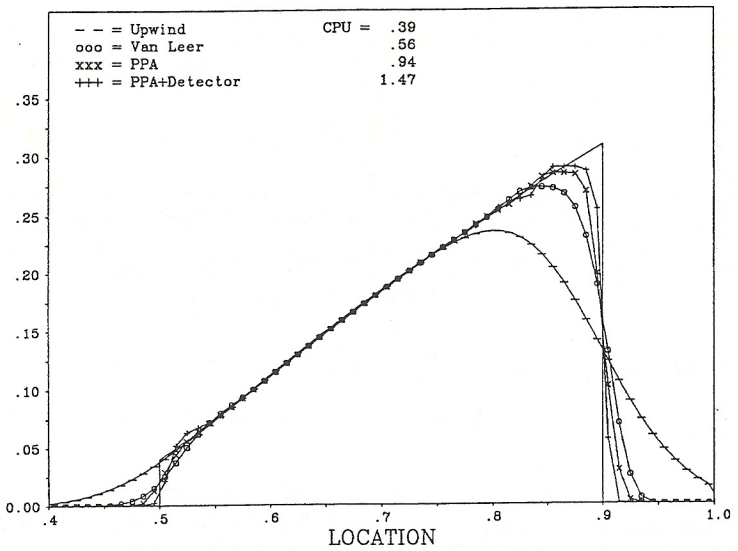


Abb. 3.2. Lineare sphärische Advektion eines anfänglichen Rechteckspulses.

3.2 Die Burgersgleichung

Eine ausführliche Darstellung hierzu gibt Burgers (1974); die viskose und nichtviskose Burgersgleichung werden beispielsweise zur modellhaften Beschreibung von „Knoten“ in astrophysikalischen Jets (stellar und extragalaktisch) verwendet (Kofman & Raga, 1992).
Wir verwenden die Gleichung hier in der *nicht*viskosen Form

$$\partial_t v + v\partial_x v = 0, \tag{3.7}$$

was gerade heißt, daß die Lagrangeableitung dv/dt für jedes Flüssigkeitsteilchen verschwinden soll, jedes Teilchen sich also kräftefrei bewegt (insbesondere treten keine Druckgradienten auf). Die Burgersgleichung ist damit die einfachste Gleichung, welche die *nichtlinearen* Advektionsterme der Eulergleichung beinhaltet. Sie ist elementar lösbar: Jedes Flüssigkeitsteilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, nämlich seiner Anfangsgeschwindigkeit. Als Anfangsbedingung verwenden wir eine Dreieckswelle $v(x)$ mit Wellenlänge λ und Maximalamplitude $v_{\max}$, siehe Abbildung 3.

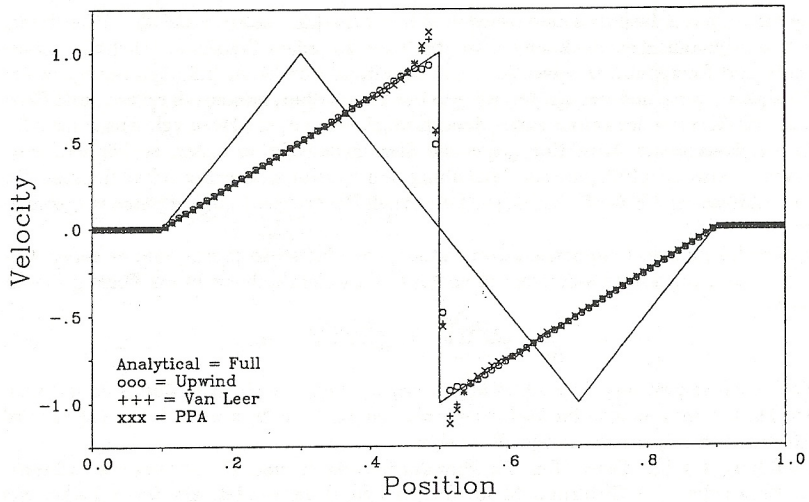


Abb. 3.3. Aufsteilung einer Welle gemäß der nichtviskosen Burgersgleichung. Startbedingung ist eine Dreieckswelle.

Wir zerlegen das Intervall $[0, \lambda]$ auf der $x-$Achse in willkürliche infinitesimale Intervalle – hierdurch sind die Flüssigkeitsteilchen definiert. Zum Zeitpunkt $t_s = \lambda/4v_{\max}$ hat die Funktion $v(x)$ dann den in Abbildung 3 gezeigten Verlauf mit einer Unstetigkeit bei $x = \lambda/2$. Zu einem späteren Zeitpunkt hätte schnelles Material langsames überholt, es ergäbe sich damit eine physikalisch nicht sinnvolle *mehrdeutige* Funktion $v(x)$. In einer realen Flüssigkeit wird dies durch Druck- und viskose Kräfte verhindert, welche gerade die Wechselwirkung der Flüssigkeitsteilchen beschreiben. Man kann jedoch auch im Rahmen der nichtviskosen Burgersgleichung eine *Vorschrift* angeben, wie das mehrdeutige $v(x)$ physikalisch korrekt in ein eindeutiges umdefiniert werden muß. Dies ist in Landau & Lifschitz VI, 1991, §102 behandelt.
Abbildung 3 zeigt neben der analytischen Lösung die numerischen Lösungen für die

verschiedenen Advektionsschemata. Wieder sind 100 Punkte ins Intervall von 0 bis 1 gelegt. Die Courantzahl ist 0,2, die Endzeit $t = 0,2 = \lambda/4v_{\max}$, also gerade die Zeit bis zur Ausbildung einer Unstetigkeit bei $x = 0,5$. Das *upwind* Schema gibt die besten Ergebnisse! Van Leer und PPA schwingen beide stark über, und zwar beide ungefähr im gleichen Maße. Doch selbst beim *upwind* Schema ist eine deutliche Schwingung in Nähe der Unstetigkeit zu sehen.

3.3 Vollständige hydrodynamische Advektion

Die bisherigen Advektionstests bezogen sich auf die Lösung *einer* (Modell-)Gleichung. In hydrodynamischen Rechnungen werden aber zu jedem Zeitschritt Dichte, Impulsdichte und Energiedichte advektiert. Die simultane Advektion (nämlich bezüglich *der* Flüssigkeit) verschiedener Größen ist, wie bereits erwähnt, numerisch kritisch und führte zur Einführung der *konsistenten Advektion* (Norman et al., 1980; vgl. Abschnitt 2.2). Um die konsistente Advektion gegen die Standardadvektion testen zu können, wurde von S. Owocki (1991, mündl. Mitteilung) ein hydrodynamischer Advektionstest für Kontinuitäts- und Eulergleichung (und eventuell Energiegleichung) *zugleich* vorgeschlagen.
Es wird 1d planare Symmetrie angenommen, das Gas sei isotherm, und es sollen weiterhin nur Druckkräfte auftreten; dann kann die Eulergleichung in die Form gebracht werden

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^2 \frac{\partial v/\partial x}{v} + a_{\text{iso}}^2 \frac{\partial \rho/\partial x}{\rho} = 0. \tag{3.8}$$

Die beiden logarithmischen Ableitungen werden von derselben Größenordnung sein. Druckkräfte werden also im *hochsupersonischen* Limes $v \gg a$ unwichtig, und es wird sich dann ein reiner Advektionsfall ergeben.
Abbildung 4 zeigt diesen Test für Standardadvektion und für konsistente Advektion. Es werden 100 Gitterpunkte im Intervall $[0,1]$ verwendet, ein fester Zeitschritt $\Delta t = 0,1\,\Delta x$, und die Endzeit der Rechnung ist 0,2. Die (einheitslose) isotherme Schallgeschwindigkeit wird auf $a = 5 \cdot 10^{-4}$ gesetzt. Anfangsbedingung (nicht eingezeichnet) ist ein Rechtecksprofil in der Dichte,

$$\rho(x, t=0) = \begin{cases} 0,5 & \text{für } x < 0,2 \\ 1,5 & \text{für } 0,2 \le x \le 0,4 \\ 0,5 & \text{für } 0,4 < x\ , \end{cases} \tag{3.9}$$

sowie konstante Geschwindigkeit

$$v(x, t=0) = 1.$$

Die analytische Lösung (für verschwindende Schallgeschwindigkeit) zur Zeit $t = 0,2$ ist dasselbe Rechtecksprofil in der Dichte, um $\Delta x = 0,2$ nach rechts versetzt; die Geschwindigkeit ist wie zuvor $v(x) = 1$.
Für *Standard*advektion erhält man mit dem *upwind* Verfahren und dem van Leer-Verfahren noch brauchbare Ergebnisse. PPA ist extrem schlecht. Man sieht hieran die

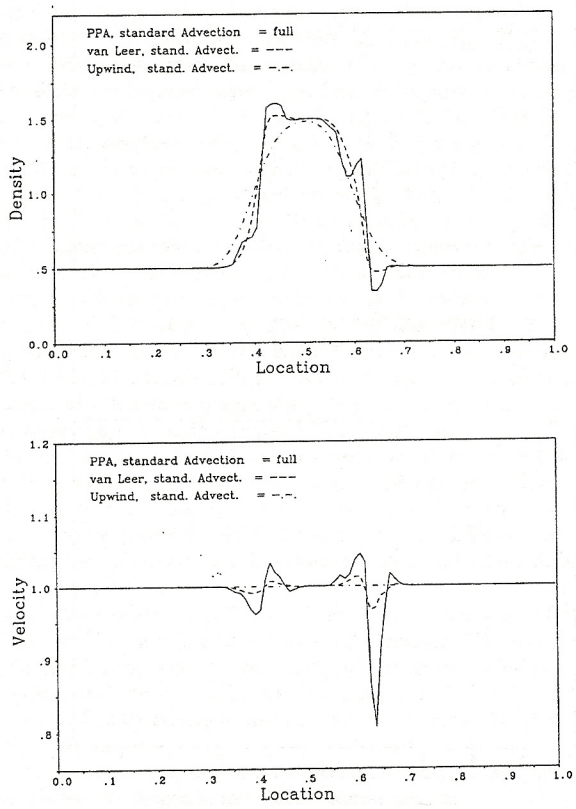


Abb. 3.4a. Volle hydrodynamische Advektion: Standardadvektion.

Gefahr, die ein Advektionsverfahren hoher Ordnung birgt: Obwohl im PPA-Schema (2. Ordnung) die Interpolationsfunktion *zweimal* monotonisiert wird, schwingt die Geschwindigkeit an beiden Kanten des Rechteckspulses über. Dieses Überschwingen ist beim van Leer-Verfahren (1. Ordnung) viel geringer, und es gibt *kein* Überschwingen beim *upwind* Verfahren (0. Ordnung): *upwind* ist die numerisch stabilste Methode, PPA die instabilste. Der Preis für die Stabilität ist im Dichteverlauf erkennbar: das *upwind* Verfahren hat aufgrund seiner großen Diffusivität den ursprünglichen Dichtepuls stark verschmiert. PPA hingegen hat die Kanten des Rechtecks scharf gehalten. – Dieser Advektionstest gibt also auch eine Veranschaulichung der manchmal konträren Forderungen nach *geringer Diffusivität* und *hoher Stabilität* eines Advektionsschemas.

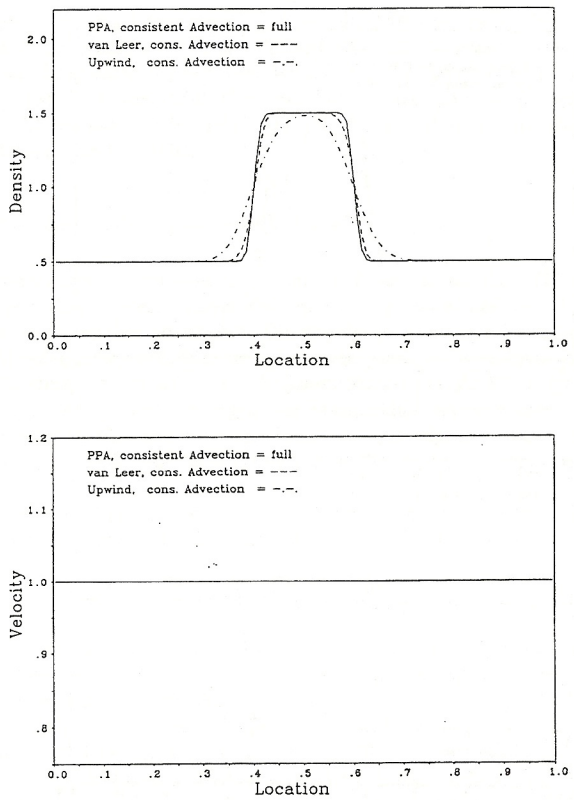


Abb. 3.4b. Volle hydrodynamische Advektion: konsistente Advektion.

Im Gegensatz zur recht unbefriedigenden Standardadvektion gibt *konsistente Advektion* sehr gute Ergebnisse. Alle drei Advektonsschemata zeigen nun keine Schwingungen mehr in der Geschwindigkeit und Dichte, und van Leer und PPA bewirken vergleichbar geringe Diffusion des Rechteckspulses.

3.4 Zweidimensionale Instabilitäten

Wir wollen mit zeitabhängigen numerischen Rechnungen den *instabilen* Sternwind simulieren. Es sollte daher die Fähigkeit des Schemas getestet werden, überhaupt physi-

kalisch instabile Situationen behandeln zu können, denn es könnten mit einer physikalischen Instabilität auch numerische Instabilitäten einhergehen.
In instabilen Strömungen geschieht exponentielles Wachstum kleiner Störungen; zwei infinitesimal dicht beieinander liegende Anfangsbedingungen werden sich im Lauf der Zeit beliebig weit auseinanderentwickeln. Es stellt sich damit die Frage nach der physikalischen und numerischen Vorhersagbarkeit der Strömung.
Eine verwandte Frage ist die nach der kleinsten Skalenlänge; sie soll am Beispiel der Turbulenz betrachtet werden. Es wurde schon in Abschnitt 2.2 festgestellt, daß die kleinsten Wirbel in einer turbulenten Strömung von solcher Größe sein werden, daß deren viskose Energiedissipation gerade den makroskopisch zugeführten Energiestrom abführt. Mit wachsender Turbulenz wird die Skalenlänge immer kürzer und unterschreitet irgendwann jedes (praktisch) mögliche Gitter. In solchen Fällen muß der weitere Verlauf der nicht auflösbaren Energiekaskade auf analytische Weise in die Rechnung einbezogen werden, z. B. mittels des Konzepts der „Wirbelviskosität“ nach Deardoff (1970, 1971). Es ist also in instabilen Windrechnungen darauf zu achten, daß sich keine Strukturen auf Gitterlängenskala entwickeln – ansonsten besteht die Gefahr, daß wesentliche Dynamik unterhalb der Gitterlänge stattfindet.
Beide Probleme, also zeitliche Vorhersagbarkeit und räumliche Auflösbarkeit, nehmen mit Annäherung an den turbulenten Bereich zu. Ist dagegen gerade erst die kritische Reynoldszahl (o. ä.) überschritten, so wird die Instabilität die ursprünglich laminare Strömung in eine streng *periodische* Strömung umwandeln. Von dieser ist zwar nicht die *Phase* vorhersagbar (siehe Landau & Lifschitz, 1991, §26), jedoch das Strömungsbild als ganzes.
Die Nichtvorhersagbarkeit einer Phase äußert sich bei der *Konvektion* beispielsweise darin, daß für ein Teilchen „zwischen“ zwei Konvektionszellen die Zellenzugehörigkeit von der genauen Teilchenposition abhängt. Im *instabilen Wind* (wir greifen hier der Darstellung der Windstruktur in Kapitel 6 voraus) kann ein Teilchen in die nächstäußere oder nächstinnere Schale gelangen, was ggf. von der genauen Teilchenposition zwischen den Schalen abhängt.
Um zu prüfen, inwieweit das numerische Schema prinzipiell fähig ist, Instabilitäten zu handhaben, bieten sich folgende instabile Strömungen an:

- Umströmung eines Hindernisses (Kármánstraße)
- Kelvin-Helmholtz-Instabilität
- Rayleigh-Taylor-Instabilität
- Konvektion

Es soll hier die Umströmung eines Hindernisses, nämlich einer Platte, betrachtet werden. Für kleine Reynoldszahlen $\mathrm{Re} = vd/\nu \lesssim 1$, wobei v eine typische Strömungsgeschwindigkeit ist (hier: Geschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit weit entfernt vom Hindernis), d eine typische Abmessung (hier: des Hindernisses), ν die Viskosität der Flüssigkeit, ist die Umströmung der Platte *laminar*. Bei $\mathrm{Re} \approx 10 \ldots 100$ kommt es zur Ausbildung von zwei symmetrischen Wirbeln hinter der Platte. Ist $\mathrm{Re} \gtrsim 200$, entsteht hinter der Platte eine Kármánsche Wirbelstraße. Im weiten Bereich $\mathrm{Re} \approx 400 \ldots 3 \cdot 10^5$ ist diese Wirbelstraße von Turbulenz überlagert. Für größere Reynoldszahlen wird die

Situation komplizierter: Die Strömung in der Grenzschicht (*boundary layer*) der Platte wandelt sich von laminar nach turbulent um, es werden aber immer noch Wirbel von der Platte abgelöst. – Obige Reynoldszahlen und eine genauere Beschreibung der verschiedenen Strömungsbilder finden sich in Prandtl & Tietjens (1934) und Tritton (1988), Kapitel 3. Der Grund für den Doppelwirbel bei relativ kleinen Reynoldszahlen ist *Separation* (in) der Flüssigkeit, siehe Tritton (1988), Kapitel 12. Die das Hindernis umströmende Flüssigkeit löst sich hierbei vom Hindernis ab (z. B. an einer scharfen Kante). Im Raum zwischen Oberfläche des Hindernisses und umströmender Flüssigkeit entsteht ein Wirbel, der zwischen beiden vermittelt. Die *Kármán*straße bei höheren Reynoldszahlen entsteht als Folge der *Scherungs*instabilität (*shear flow instability*) im Totwasser (*wake*) der Platte. Jedoch auch die *Wirbelablösung* (*eddy shedding*) von der Platte spielt eine Rolle. Die nicht ganz klare Trennung beider Effekte ist in Tritton (1988), Abschnitt 17.8, diskutiert. Die Entstehung der Turbulenz sei hier nicht diskutiert.

Abbildung 5 zeigt numerische Simulationen der laminaren Strömung, des symmetrischen Doppelwirbels sowie eines stark asymmetrischen Doppelwirbels hinter der Platte als erste Stufe einer sich ausbildenden Kármánstraße. Vom laminaren Fall zum asymmetrischen Doppelwirbel wächst die Geschwindigkeit der Strömung und damit die Reynoldszahl. In allen drei Fällen wurde ein $60 * 60$ Gitter verwendet (Abb. 5 zeigt nur einen Ausschnitt des Rechenbereiches). Der asymmetrische Doppelwirbel zeigt deutliche numerische Defekte, einige benachbarte Pfeilstellungen sind unstetig. Um tatsächlich die Kármánstraße zu berechnen, müßten mehr Gitterpunkte verwendet, die Strömung über längere Zeit verfolgt werden (obige Rechnung ist noch im Übergangsgebiet, die Strömung noch nicht voll ausgebildet) und vor allem spezielle numerische Vorkehrungen getroffen werden (Randbedingungen beim Ausströmen der Flüssigkeit aus dem Rechenbereich), was in diesem mehr illustrativen Beispiel nicht unternommen wurde. Abbildung 6 zeigt die entsprechenden experimentellen Beobachtungen der drei Strömungsbilder aus Prandtl & Tietjens (1934).

3.5 Stationäre Strömungen

Stationäre Strömungen eignen sich dazu, die *Genauigkeit* des numerischen Schemas zu testen. Im Gegensatz zu zeitabhängigen Problemen hat man hier die Möglichkeit, die (langfristige) *Konvergenz* der numerischen gegen die analytische Lösung zu prüfen. Wir betrachten folgende Strömungen:

- barometrische Schichtungen
- den isothermen Parkerschen Sonnenwind
- die Bondi-Akkretion
- den strahlungsgetriebenen Wind nach CAK/PPK

Barometrische Schichtungen

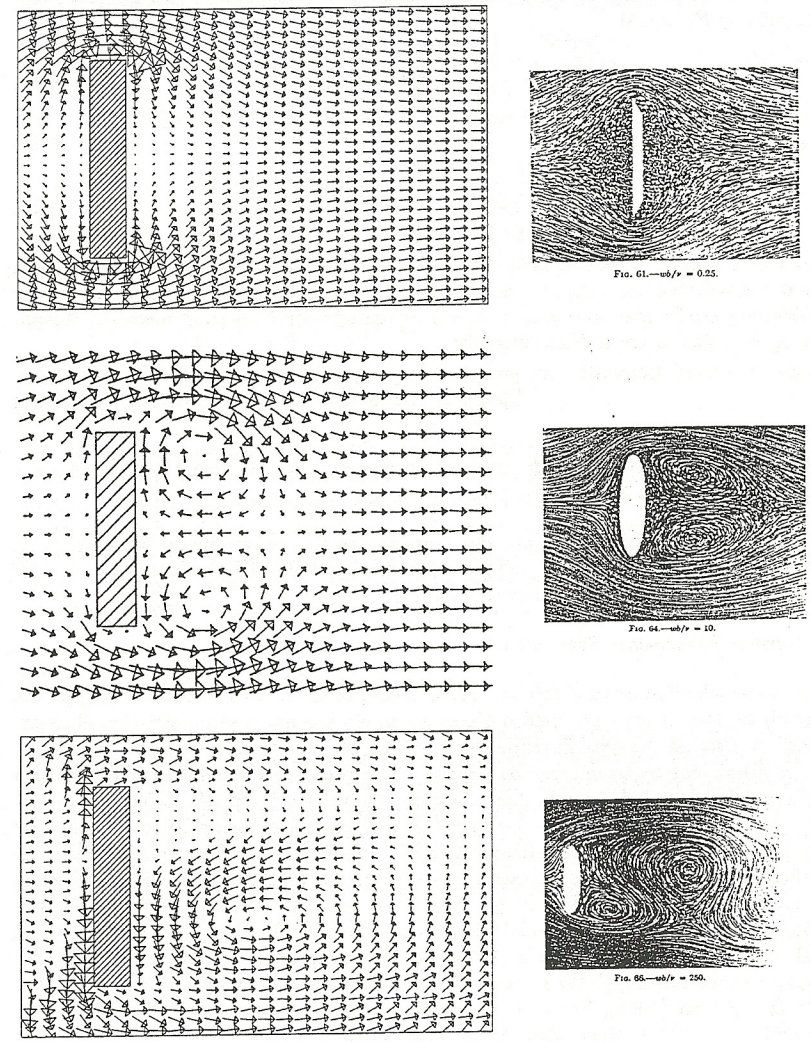


Abb. 3.5. (Links) Umströmung einer Platte bei verschiedenen Reynoldszahlen.

Abb. 3.6. (Rechts) Beobachtungen hierzu, aus Prandtl & Tietjens (1934).

Die analytische Lösung für die *sphärische, adiabatische* barometrische Atmosphäre lautet, mit $r \geq R_*$, $v = 0$

$$\rho(r) = \rho_* \left[1 - (\gamma - 1)\frac{R_*}{H_*}\left(1 - \frac{R_*}{r}\right)\right]^{1/(\gamma-1)}, \tag{3.10}$$

mit barometrischer Skalenhöhe

$$H_* = \frac{a_*^2}{g_*}, \qquad g_* = \frac{GM}{R_*^2}, \tag{3.11}$$

und a ist die adiabatische Schallgeschwindigkeit. Druck und Temperatur ergeben sich aus der Adiabatengleichung und der idealen Gasgleichung. Die *planare* barometrische Schichtung erhält man aus obiger Gleichung mittels der Näherung niedriger Höhen, $r \approx R_* + z$, was in erster Näherung gibt

$$\frac{R_*}{H}\left(1 - \frac{R_*}{r}\right) \approx \frac{z}{H_*}. \tag{3.12}$$

Schließlich erhält man die *isotherme* Schichtung, indem man den Übergang $\gamma \to 1$ macht und $\lim_{\epsilon\to 0}(1 + \epsilon x)^{1/\epsilon} = \exp(x)$ verwendet.

Wir verzichten auf die Wiedergabe der numerischen Ergebnisse für die vier Kombinationen isotherm vs. adiabatisch und planar vs. sphärisch. Die Übereinstimmung mit der analytischen Gleichung ist numerisch exakt.

Isothermer Parkerscher Sonnenwind

Der Parkersche Sonnenwind (Parker 1958, 1960a, b; siehe auch Mihalas, 1978) ist die thermische Expansion eines heißen Gases gegen ein sphärisch symmetrisches Gravitationsfeld. Dies ist die grundlegende Beschreibung eines *koronalen* Windes. Zentral ist, daß es genau eine *trans*sonische Lösung gibt, die subsonisch auf dem Stern beginnt, den kritischen Punkt = Schallpunkt durchläuft und danach supersonisch ist. Verallgemeinerungen der Theorie beziehen die Energiegleichung ein, geben die sphärische Symmetrie auf und berücksichtigen Magnetfelder und Plasmaeffekte; viele für strahlungsdruckgetriebene Winde interessante Themen sind bereits in der Literatur über den Sonnenwind diskutiert worden (wir begnügen uns hier mit einigen Stichworten): Art der Lösungstopologie (X-Typ, Satteltyp, nodal) (bezüglich koronaler Winde (KW): Holzer (1977), bzgl. radiativ getriebener Winde (RW): Poe, Owocki, Castor (1990)); Stabilität der transsonischen Lösung (KW: Parker, 1966); Auftreten von *reverse* Schocks (KW: Sonett & Colburn (1965), Sturrock & Spreiter (1965), Simon & Axford (1966), RW: Owocki et al. (1988), MacFarlane & Cassinelli (1989)).

Die stationäre sphärische Kontinuitätsgleichung lautet

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v = \text{konst}_{t,r}. \tag{3.13}$$

Dies in die isotherme Eulergleichung eines idealen Gases eingesetzt, ergibt

$$\left[1 - \frac{a^2}{v^2}\right]\frac{dv^2}{dr} = -\frac{2GM}{r^2}\left[1 - \frac{2a^2 r}{GM}\right], \tag{3.14}$$

mit dem Schallpunkt $v = a$ bei $r_a = GM/2a^2$. Diese Bewegungsgleichung ist elementar integrierbar,

$$v^2 - v_0^2 - a^2 \ln\frac{v^2}{v_0^2} = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_a}\ln\frac{r}{r_0}\right), \tag{3.15}$$

mit *beliebigen* Integrationskonstanten (r_0, v_0). Speziell die transsonischen Lösungen erhält man durch die Bedingung $(r_0, v_0) = (r_a, a)$, nämlich

$$\frac{v^2}{a^2} - \ln\frac{v^2}{a^2} = 4\frac{r_a}{r} + 4\ln\frac{r}{r_a} - 3. \tag{3.16}$$

Es sind dies tatsächlich zwei Lösungen, nämlich eine, die subsonisch bei $r < r_a$ ist und supersonisch bei $r > r_a$, die andere gerade umgekehrt.

Abbildung 7 zeigt die Entwicklung hin zum stationären Sonnenwind unter Hinauslaufen eines Schocks (wiederum einheitslose Größen; die Zahlenwerte sind für das weitere ohne Belang). Die Übereinstimmung der stationären numerischen Lösung mit der analytischen Lösung ist wieder numerisch exakt. (Anmerkung: Die Entwicklung hin zur transsonischen Lösung (es gibt unendlich viele subsonische und supersonische Lösungen) wird durch eine transsonische *Anfangsbedingung* erzwungen. Die *nichtreflektierenden* Randbedingungen machen keine weiteren Vorgaben nötig.)

Akkretion nach Bondi

Die isotherme transsonische Akkretion im sphärischen Gravitationsfeld (Bondi, 1952) ist das zum Parkerschen Sonnenwind inverse Problem. Die Bewegungsgleichung ist exakt dieselbe, nun jedoch mit den Randbedingungen verschwindender Gasgeschwindigkeit im Unendlichen und supersonischen Einfalls auf den Stern (oder einen entsprechenden Körper). Da die Geschwindigkeit in die Parkersche Bewegungsgleichung quadratisch eingeht, ist mit $v(r)$ auch $-v(r)$ Lösung dieser Gleichung. Die Lösung des Bondiproblems ist demnach die zweite transsonische Lösung (anstelle des Parkerschen Windes), mit einem negativen Vorzeichen. Abbildung 8 zeigt analytische und numerische Ergebnisse.

Stationärer strahlungsdruckgetriebener Wind

Der stationäre *strahlungsdruck*getriebene Wind eines Punktsterns mit der Linienkraft nach Castor, Abbott & Klein (1975; CAK im folgenden) ist nur unter Vernachlässigung der Druckkräfte streng analytisch lösbar, siehe Poe et al. (1990) für eine einfache entsprechende Herleitung; der Wind eines ausgedehnten Sterns nach Pauldrach,

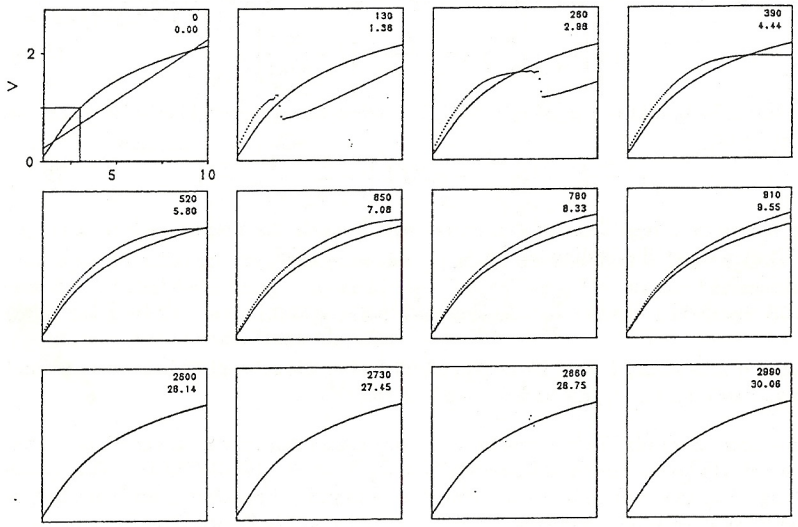


Abb. 3.7. Entwicklung zum stationären Parkerschen Wind unter Hinauslaufen eines Schocks.

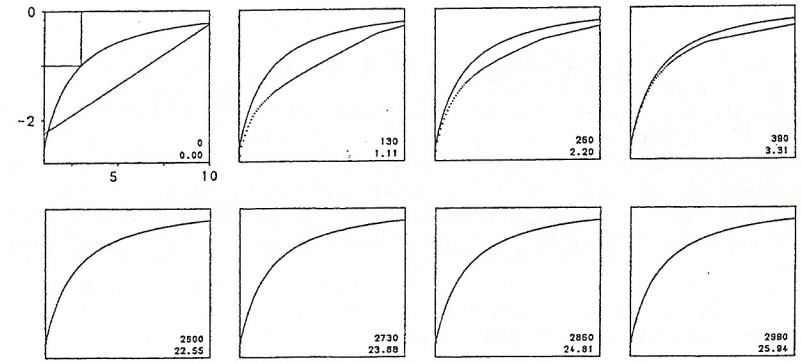


Abb. 3.8. Stationäre transsonische Akkretion nach Bondi.

Puls & Kudritzki (1986; PPK im folgenden) und Friend & Abbott (1986) ist nicht

mehr (streng) analytisch lösbar. Wir beschränken uns hier auf eine Wiedergabe der CAKschen Bewegungsgleichung, die unter folgenden Voraussetzungen gilt: Stationarität, sphärische Symmetrie, Isothermie, Punktstern, Sobolevnäherung bezüglich der Strahlungsbeschleunigung, kein Linienüberlapp, CAKsches Linienensemble (diese Begriffe werden in Kapitel 4 erklärt). Es ist dann

$$\left(v-\frac{a^2}{v}\right)\frac{dv}{dr}=\frac{2a^2}{r}-\frac{GM(1-\Gamma)}{r^2}+\frac{\Gamma GMk}{r^2}\left(\frac{4\pi}{\sigma_e v_{\rm th}(dM/dt)}\right)^{\alpha}\left(r^2 v\frac{dv}{dr}\right)^{\alpha}. \quad (3.17)$$

Hierin ist $0 \le \Gamma (< 1$ für Stabilität) der Eddingtonfaktor, σ_e der Massenabsorptionskoeffizient für Thomsonstreuung an freien Elektronen, $v_{\rm th}$ die thermische Geschwindigkeit der windtreibenden Metallionen, dM/dt die Massenverlustrate des Sterns und $0 \le \alpha \le 1$ der Parameter der Linienliste. Die Gleichung kann auch für eine variable Temperatur geschrieben werden, worauf hier verzichtet sein soll. Der entscheidende Term ist der letzte auf der rechten Seite, welcher die gesamte Linienkraft für ein CAKsches Linienensemble in Sobolevnäherung angibt. Hierin beschreibt $(r^2 vv')^{\alpha}$ die Abhängigkeit der Linienbeschleunigung von der hydrodynamischen Struktur *nach Verwendung* der stationären Kontinuitätsgleichung. In zeitabhängigen Rechnungen muß dies durch einen entsprechenden Ausdruck $\sim (v'/\rho)^{\alpha}$ ersetzt werden.
Das analytische Geschwindigkeitsgesetz für einen Punktstern unter Vernachlässigung der Druckterme (d. h. Schallgeschwindigkeit $a = 0$) lautet ($v_{\rm esc}$ die Entweichgeschwindigkeit vom Stern)

$$\begin{aligned} v(r) &= v_\infty\left(1-\frac{R_*}{r}\right)^{1/2}, \\ v_\infty &= \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha} v_{\rm esc}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dies sollte im supersonischen Bereich, wo Druckkräfte keine Rolle spielen (vgl. Abschnitt 3.3), eine gute Näherung sein. (Im subsonischen Bereich andererseits folgt die Dichte einer exponentiellen barometrischen Schichtung, siehe Anhang 8, und aufgrund der Kontinuitätsgleichung wächst die Geschwindigkeit exponentiell an.)

Abbildung 9 zeigt den Vergleich einer Punktsternrechnung mit dem Wurzel-Geschwindigkeitsgesetz (18) (letzteres ist nur für nicht zu kleine Radien eingezeichnet) sowie einer Rechnung für einen ausgedehnten Stern mit dem stationären (numerisch gewonnenen) PPK-Wind (Pauldrach, 1990, unveröffentlicht). Die Übereinstimmung ist in beiden Fällen sehr gut.

3.6 Nohs Schockreflektion

Der Rest dieses Kapitels handelt von Strömungen, in welchen *Schocks* entstehen. Die sicherlich einfachste Strömung dieser Art, bereits von (oder vor?) Riemann gelöst, ist der Fall eines planaren *adiabatischen* Schocks, der durch das Hineinstoßen eines Stempels

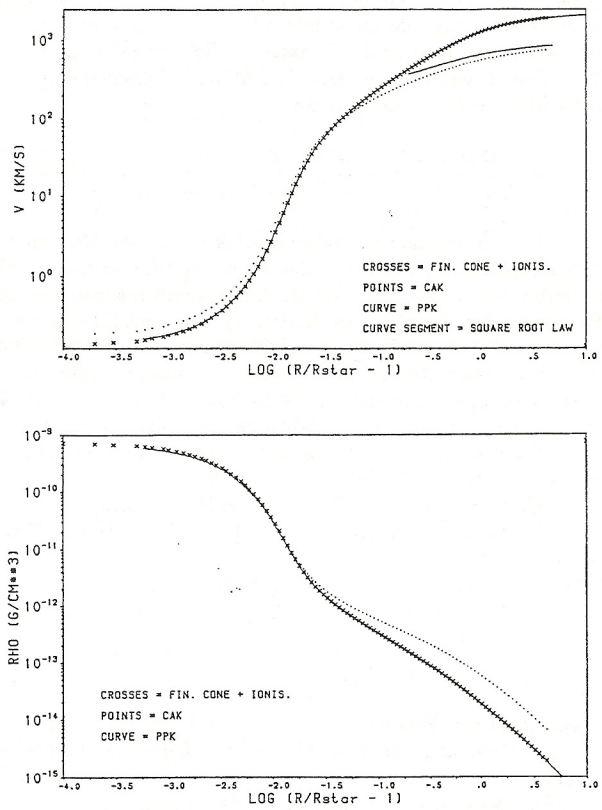


Abb. 3.9. Vergleich stationärer radiativer Winde (Linienkraft nach CAK) für einen Punktstern und einen ausgedehnten Stern.

(*piston*) mit konstanter supersonischer Geschwindigkeit in ein gasgefülltes Rohr entsteht; das (ungestörte) Gas sei homogen, habe also konstante Dichte und Temperatur. Weiterhin wird Konstanz aller Größen senkrecht zur Strömungsrichtung vorausgesetzt (→ eindimensionale Strömung). Ein hierzu identisches (nämlich galileitransformiertes), jedoch numerisch einfacher zu behandelndes Problem ist die supersonische Strömung eines Gases gegen eine ruhende Wand. Wir wollen dies kurz als „Nohs Schockreflektion" (Noh, 1987) bezeichnen, da sich Noh intensiv mit dieser Strömung als Testfall für die *Wandheizung* aufgrund künstlicher Viskosität befaßt (s. u.). Das *sphärische* Problem

lautet dann entsprechend: Ein homogenes Gas strömt sphärisch symmetrisch und supersonisch in den Koordinatenursprung $r = 0$. Wir betrachten im folgenden (planar und sphärisch) nur den Fall sehr starker Schocks, d. h. sehr großer Machzahl, was numerisch realisierbar ist durch $p_{\rm pre} = T_{\rm pre} = 0$.
Die Schockreflektion ist die einfachste Strömung mit einem (starken) Schock und daher ein idealer Testfall. Es ist erstaunlich, daß in der Literatur häufig das analytisch schwieriger zu lösende *Sedovproblem* (siehe unten) als typischer Testfall eines starken Schocks betrachtet wird.

Die analytische Lösung des *planaren* Problems findet man folgendermaßen. In den adiabatischen eindimensionalen planaren hydrodynamischen Gleichungen tritt in *jedem* Term ein Differential ∂_t oder ∂_x auf. Die Gleichungen haben also die konstante Lösung

$$\rho(x,t) = konst, \qquad v(x,t) = konst, \qquad p(x,t) = konst. \tag{3.19}$$

An der Wand muß die Strömungsgeschwindigkeit verschwinden, also verschwindet sie zwischen Wand und Schock. Ist $v_{\rm in}$ die konstante Geschwindigkeit des ungeschockten Materials relativ zur Wand, so muß sich der Schock mit solcher Geschwindigkeit bewegen, daß die Sprungrelation (siehe Anhang 7)

$$\frac{v_{\rm pre}}{v_{\rm post}} = \frac{\rho_{\rm post}}{\rho_{\rm pre}} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tag{3.20}$$

an einem unendlich starken Schock erfüllt ist (hier und in allem folgenden beziehen sich Geschwindigkeitsprefixe „pre" und „post" immer auf Geschwindigkeiten *relativ zur Schockfront*, also im Schocksystem). Die Strömung soll von *rechts kommend* gegen die Wand treffen; dann ist, mit Schockgeschwindigkeit v_s relativ zur Wand,

$$\begin{aligned} v_{\rm pre} &= 4\, v_{\rm post}, \\ |\, v_{\rm in}\,| + v_s &= 4\,(0 + v_s), \end{aligned} \tag{3.21}$$

also

$$v_s = \frac{1}{3}\,|\, v_{\rm in}\,|\,. \tag{3.22}$$

Verwendet man noch die Sprungbedingung für den Druck (s. u.), so ist das Problem vollständig gelöst. Man beachte nochmals, daß *alle* Größen überall konstant sind, außer am Schock.

Die Lösung des *sphärischen* Problems ist etwas subtiler. Die hydrodynamischen Gleichungen lauten nun

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + r^{-2}\partial_r(r^2 v\rho) &= 0, \\ \partial_t v + v\partial_r v + \rho^{-1}\partial_r p &= 0, \\ (\partial_t + v\partial_r)(p\rho^{-\gamma}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Wir betrachten zuerst den Innenbereich des Schocks zwischen Koordinatenursprung und Schock, und nehmen dort $v(r,t) = 0$ an. Damit folgt

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(r) \quad \text{(Kontinuitätsgleichung)}, \\ p &= p(t) \quad \text{(Eulergleichung)}, \\ p &= p(r) \quad \text{(Energiegleichung)}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

der Druck ist also räumlich und zeitlich konstant, jedoch kann die Dichte noch eine Funktion des Radius sein. –
Im *preshock* Bereich $r > r_s$ nehmen wir zum Zeitpunkt 0 Homogenität und konstante Einfallgeschwindigkeit an und *fordern*, daß die Geschwindigkeit für *alle* Zeiten konstant bleiben soll, räumlich wie zeitlich. Der Druck soll, um einen unendlich starken Schock zu erhalten, verschwinden. Dann sind Euler- und Energiegleichung trivial erfüllt. Die Kontinuitätsgleichung gibt

$$\partial_t(r^2\rho) + v_{\text{in}}\partial_r(r^2\rho) = 0, \tag{3.25}$$

also die lineare (sphärische) Advektionsgleichung (denn $\partial_t r \equiv 0$), mit Lösung

$$r^2\rho(r,t) = f(r - v_{\text{in}}t). \tag{3.26}$$

Die Funktion f ist durch die Anfangsbedingung festgelegt: Für $t = 0$ soll das Medium homogen sein, also

$$\rho(r, t=0) = \rho_0 \equiv r^{-2}f(r) \quad \rightarrow \quad f(r) = \rho_0 r^2. \tag{3.27}$$

Setzt man diesen Ausdruck für f oben ein, so ergibt sich

$$\rho(r,t) = \rho_0 \left(1 + |v_{\text{in}}|\frac{t}{r}\right)^2, \tag{3.28}$$

wobei noch einbezogen wurde, daß v_{in} negativ ist. Das Medium bleibt also im *preshock* Bereich *nicht* homogen!
Da alle auftretenden Geschwindigkeiten dieselben wie im planaren Fall sind, ist hier wie dort die Schockgeschwindigkeit $v_s = \frac{1}{3}|v_{\text{in}}|$. Einsetzen von $r_s = v_s t$ in die vorige Dichtegleichung gibt die *preshock* Dichte (unmittelbar am Ort des Schocks)

$$\rho(r_s, t)|_{\text{pre}} = 16\,\rho_0. \tag{3.29}$$

Erstaunlicherweise ist diese also konstant, und damit ist die Dichte im gesamten (!) *postshock* Bereich

$$\rho_{\text{post}} = 64\,\rho_0. \tag{3.30}$$

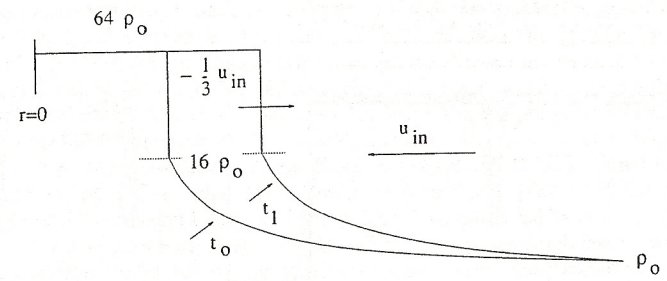


Abb. 3.10. Dichteverlauf und Geschwindigkeiten bei der sphärischen Schockreflektion zu zwei Zeitpunkten.

Dieser Dichteverlauf sowie die verschiedenen Geschwindigkeiten sind für zwei Zeitpunkte in Abbildung 10 gezeigt.

Abbildung 11 zeigt numerische Ergebnisse für Nohs *planare* Schockreflektion. Da die Kurven erstaunlich unbefriedigend aussehen, sind entsprechende Ergebnisse aus Noh (1987) ebenfalls abgebildet.
Die analytische Lösung ist als durchgezogene Linie gezeichnet. Die eigentliche Nohsche Schockreflektion, bei der ein Gas gegen eine ruhende Wand strömt, ist durch „vel=$(*,-1)$“ gekennzeichnet. Die zweite Komponente (-1) bedeutet, daß das Gas mit der Geschwindigkeit -1 von rechts kommend gegen die Wand strömt. „$*$“ bedeutet, daß es kein Gas links von der Wand gibt. vel=$(1,-1)$ ist eine Rechnung *ohne* Wand, stattdessen treffen zwei Gasstrahlen der Geschwindigkeiten ± 1 im Zentrum $x = 0$ aufeinander. vel=(2,0) ist ein galileitransformierter Nohscher Test, in welchem ein Gas von links kommend mit Geschwindigkeit 2 auf ein ruhendes Gas stößt. In diesem Fall bewegen sich die beiden Schocks nach rechts weg vom Koordinatenursprung. In der Zeichnung ist zum besseren Vergleich dieser Fall in seinem Ruhsystem ($v = 1$) abgebildet. (Der eigentliche Nohsche Fall „vel=$(*,-1)$“ ist, ebenfalls zum besseren Vergleich, unter Verwendung der Werte für $x > 0$ auch für $x < 0$ gezeichnet.)
Die zweite Spalte in der Legende zu Abbildung 11 (vis=$(4, 2/3)$ usw.) gibt die verwendeten Koeffizienten der quadratischen und linearen künstlichen Viskosität an. Die quadratische Viskosität dient hierbei (primär) zum Ausschmieren des Schocks, die lineare Viskosität dient zur Verringerung der *postshock* Oszillationen. Da wir dieselben Bezeichnungen und Gleichungen wie Noh (1987) verwenden, verzichten wir hier auf eine genauere Diskussion. Der Gitterpunktabstand ist $\Delta x = 0,01$, die Courantzahl $\sigma = 0,25$, und es wurde *konsistente* Advektion verwendet.
Der Fall „vel=$(*,-1)$, vis=$(4,2/3)$“ kann direkt mit der entsprechenden Rechnung von Noh verglichen werden, ebenso auch „vel=$(1,-1)$, vis=$(1,1/3)$“. „vel=$(2,0)$“ zeigt eine

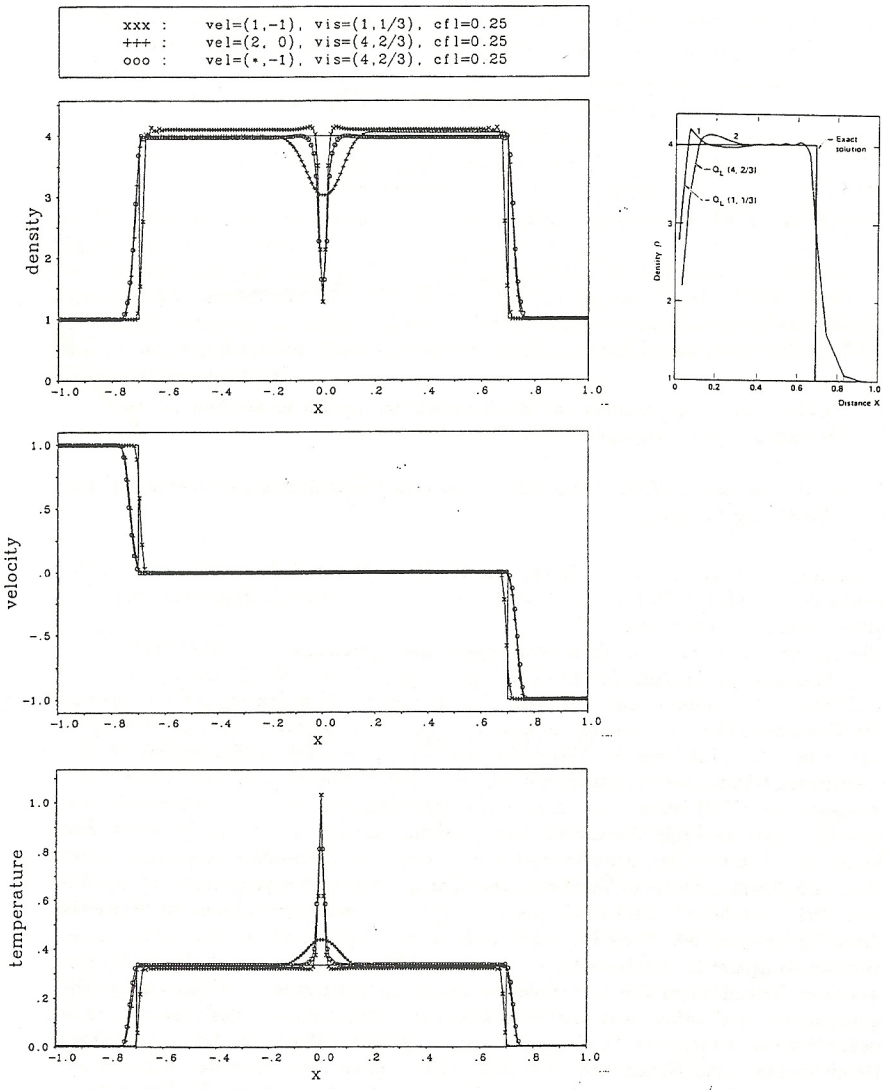


Abb. 3.11. Planare Schockreflektion. Erklärung der Parameter und Kurven im Text. Abbildung rechts oben aus Noh (1987).

Verletzung der Galileiinvarianz *numerischer Fehler* (womit kein physikalisches Dilemma vorliegt) aufgrund von numerischer Advektion: Wäre Galileiinvarianz gegeben, müßten die „+“ und „o“ Kurven in Abbildung 11 identisch sein (da gleiche Viskositäten), was nicht der Fall ist. In Kapitel 9 tritt aufgrund dieser nichtinvarianten *Fehler* ein Unterschied zwischen ruhenden und advektierten Strömungs*merkmalen* auf!
Der tiefe Einbruch in der Dichte bei $x = 0$ hat seine Ursache im entsprechenden abrupten Anstieg der Temperatur (bei konstantem Druck). Diese „künstliche Wandheizung“ (Noh, 1987) ist verursacht durch das Zusammenspiel von Schock, künstlicher Viskosität und Wand. Insbesondere kann gezeigt werden (Noh, 1987), daß die analytische Lösung der Differentialgleichung mit künstlicher Viskosität die Wandheizung ebenfalls zeigt. Sie ist also kein numerischer Effekt, der beispielsweise durch das verwendete Differenzenschema verursacht ist, sondern liegt in der *Verwendung* künstlicher Viskosität selbst.

Abbildung 12 zeigt entsprechende Ergebnisse für die *sphärische* Schockreflektion. Die Endzeit ist $t = 0,6$, die Courantzahl 0,3, 100 äquidistante Gitterpunkte werden im Intervall [0, 0, 4] verwendet; konsistente Advektion und von Neumann-Richtmyer Viskosität wurden verwendet. Rechnungen mit tensorieller Viskosität nach Schulz (1964) geben nur geringfügig verschiedene Resultate. In einem Fall wurde nur quadratische Viskosität verwendet, und die Ergebnisse sind entsprechend unbefriedigend. Noh (1987) hat zur Auflösung des Problems der künstlichen Wandheizung die Verwendung einer künstlichen Wärmeleitung (neben der künstlichen Viskosität) vorgeschlagen: Diese führt die Exzeßwärme von der Wand (hier: vom Zentrum $r = 0$) ab. Entsprechend wird auch wieder eine lineare künstliche Wärmeleitung eingeführt. Eine zweite Rechnung mit quadratischer und linearer künstlicher Viskosität und Wärmeleitung gibt nun tatsächlich sehr gute Ergebnisse – dafür gibt es aber auch 4 mehr oder weniger freie Parameter. In den Rechnungen vorliegender Arbeit wurde (außer für Tests) künstliche Wärmeleitung nicht verwendet, lineare Viskosität nur in wenigen Fällen; wir nehmen dafür Oszillationen an Schocks und künstliche Heizung an „Wänden“ (Stagnationspunkten der Strömung → Kontaktunstetigkeiten) in Kauf.

3.7 Das Sedovproblem

Dieses beschreibt eine starke, lokalisierte Explosion: Im sphärischen Sedovproblem wird in einem homogenen, ruhenden, drucklosen Gas zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung ein großer Energiebetrag freigesetzt, d. h. die Anfangsbedingung für die Energie lautet $e = 0$ außer bei $r = 0$. (Im planaren Sedovproblem ist entsprechend die Energie anfangs auf einer Ebene lokalisiert, beim zylindrischen auf einer Geraden.) Es wird die 1d sphärische, planare oder zylindrische Ausbreitung der entstehenden unendlich starken (da $p_{\mathrm{pre}} = 0$) Schockwelle sowie deren *postshock* Lösung gesucht.
Die sich ergebende analytische *Ähnlichkeits*lösung (siehe Landau & Lifschitz VI, 1991, Reile, 1993) soll hier nicht hergeleitet werden, sondern nur die Grundidee von Ähnlichkeitslösungen überhaupt kurz dargestellt werden (diese werden ausführlich behandelt in Zeldovich & Raizer (1967), Vol. II, Kap. XII):

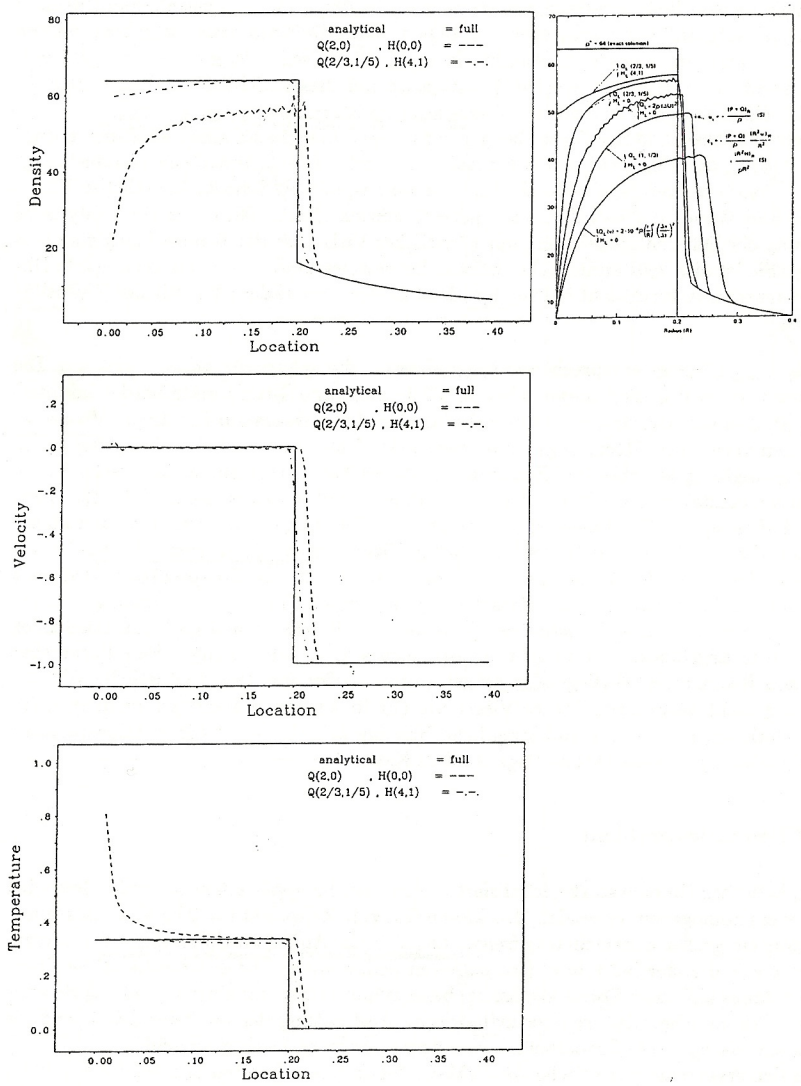


Abb. 3.12. Sphärische Schockreflektion. Abbildung rechts oben aus Noh (1987).

Hat eine *eindimensionale* Strömung keine (natürlichen) Skalen, so hängen Dichte und Geschwindigkeit (sowie Energie bei einem nichtisothermen Gas) von *Raum und Zeit* nur in einer *Kombination* ab,

$$\rho(x,t) \to \rho(f(x,t)) \qquad \text{usw.}, \tag{3.31}$$

für welche *gewöhnliche* anstelle der partiellen hydrodynamischen Differentialgleichungen gelten. Eine gegebene Strömung hat genau dann eine Ähnlichkeitslösung (d. h. die Strömung ist skalenfrei), wenn aus den Anfangsbedingungen für Dichte, Geschwindigkeit und Energie, den physikalischen Konstanten (Viskositätskoeffizient usw.) sowie aus x (bzw. r) und t nur *eine* einheitslose Größe gebildet werden kann.

Beim Sedovproblem sind die einzigen dimensionsbehafteten Konstanten die bei $r = 0$ (bzw. $x = 0$; dies sei im folgenden immer mitgedacht) freigesetzte Energie E und die homogene Anfangsdichte ρ_0; die Voraussetzung verschwindenden Drucks ist wesentlich, da sonst eine weitere dimensionsbehaftete Größe vorläge und damit *kein* Ähnlichkeitsproblem. Die einzige dimensionslose Größe, die aus Ort, Zeit, E und ρ_0 gebildet werden kann, ist

$$f \equiv r(\rho_0/Et^2)^{1/5}. \tag{3.32}$$

Die hydrodynamischen Größen werden angesetzt als

$$\rho(r,t) = \rho_0 R(f), \quad v(r,t) = \frac{r}{t}V(f), \quad a^2(r,t) = \frac{r^2}{t^2}A(f), \tag{3.33}$$

wobei anstelle des Druckes die Schallgeschwindigkeit als dritte unabhängige Funktion verwendet wird. — Der *Schock* nun ist eine Unstetigkeit in $v(r,t)$, und da r/t stetig ist, muß er eine Unstetigkeit in der Funktion $V(f)$ sein; diese Unstetigkeitsstelle in V sei mit f_s bezeichnet (dies ist eine *Konstante*). Damit ist die Schockposition

$$r_s = f_s(Et^2/\rho_0)^{1/5}, \tag{3.34}$$

und die Schockgeschwindigkeit $v_s = dr_s/dt$,

$$v_s = 2f_sE^{1/5}/5\rho_0^{1/5}t^{3/5}. \tag{3.35}$$

Die Konstante f_s muß aus der Lösung der hydrodynamischen Gleichungen gewonnen werden; doch bis auf diese Skalierung sind Schockposition und -geschwindigkeit bereits bekannt!

Abbildung 13 zeigt eine Rechnung zum *planaren* Sedovproblem, wobei wieder normierte Größen verwendet wurden, d. h. Atomgewicht μ und Boltzmannkonstante k sind =1 gesetzt. Der Adiabatenkoeffizient ist $\gamma = 5/3$, das räumliche Intervall $[0,1]$ wird mit

400 Gitterpunkten aufgelöst, Endzeit ist $t = 0,9$, und die zum Zeitpunkt 0 freigesetzte Gesamtenergie in der ersten Gitterzelle ist 0.5.

Es wurden zwei Rechnungen durchgeführt. In der ersten wird die *Gesamt*energiegleichung gelöst, mit einer Courantzahl 0,3, wobei *keine* künstliche Viskosität verwendet wird. (Eine hinreichend kleine Courantzahl ergibt ausreichende intrinsische numerische Viskosität des Differenzenschemas, siehe Abschnitt 2.2.) In der zweiten Rechnung wird die *mikroskopische* Energiegleichung gelöst. Die Courantzahl ist 0,5, und es wird quadratische künstliche Viskosität mit einem Koeffizienten $b = \sqrt{1,4}$ verwendet. Die Ergebnisse beider Rechnungen sind vergleichbar gut, siehe Abb. 13. (Die durchgezogene Kurve in der Abbildung ist die analytische Lösung. Es sei an dieser Stelle C. Reile für sein Programm zur Berechnung derselben gedankt.) Die Rechnung mit mikroskopischer Energiegleichung gibt aufgrund der Nichtkonservativität dieser Gleichung keine exakten Sprünge am Schock und damit eine geringfügig falsche Schockposition. Beide Rechnungen wurden mit Standardadvektion durchgeführt. Verwendet man stattdessen konsistente Advektion, bei ansonsten identischen Parametern, so liegt der Schock beinahe 10 % zu weit links! Auch Stone & Norman (1992a) finden Fälle, wo konsistente Advektion schlechtere Ergebnisse gibt als Standardkonvektion. Es ist daher *nicht* sinnvoll, sich ein für allemal auf konsistente Advektion festzulegen.

3.8 Die Riemannsche Schockröhre

Dieses klassische Problem eines schwachen Schocks, von Riemann mittels der von ihm entwickelten Charakteristikenmethode gelöst, ist insbesondere mit den von Sod (1978) vorgeschlagenen Zahlenwerten zu *dem* Standardtestfall numerischer Gasdynamik überhaupt geworden. Die Problemstellung ist: In einer geraden Röhre befindet sich links von einem Diaphragma Gas im homogenen Zustand (v_l, ρ_l, p_l), rechts vom Diaphragma Gas im homogenen Zustand (v_r, ρ_r, p_r). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Diaphragma entfernt, und es ist nach der eindimensionalen planaren adiabatischen oder isothermen Strömung des Gases zu späteren Zeiten gefragt.

Die *Ähnlichkeits*lösung setzt sich zusammen aus i) der konstanten Lösung $v(x,t)$, $\rho(x,t)$, $p(x,t) = konstant$ und ii) einer Verdünnungswelle (siehe Landau & Lifschitz VI, 1991, §109).

Die Strömung in der Riemannschen Schockröhre nach Sod (1978) hat im speziellen folgende Struktur:

Konstant – Verdünnungswelle – Kontaktunstetigkeit – konstant – Schock – konstant.

Dies gilt für eine adiabatische Strömung; im isothermen Fall entfällt die Kontaktunstetigkeit.

Abbildung 14 zeigt die analytische und numerische Lösung für die (einheitslose) adiabatische Riemannsche Schockröhre. Das Intervall $[0,1]$ wird in 100 Gitterpunkte zerlegt, ein konstanter Zeitschritt $\Delta t = 0,1 \cdot \Delta x$ gewählt; damit werden 228 Zeitschritte bis zum Zeitpunkt 0,228 gerechnet. Der Adiabatenexponent ist hier (gemäß Sod, 1978) $\gamma = 1,4$.

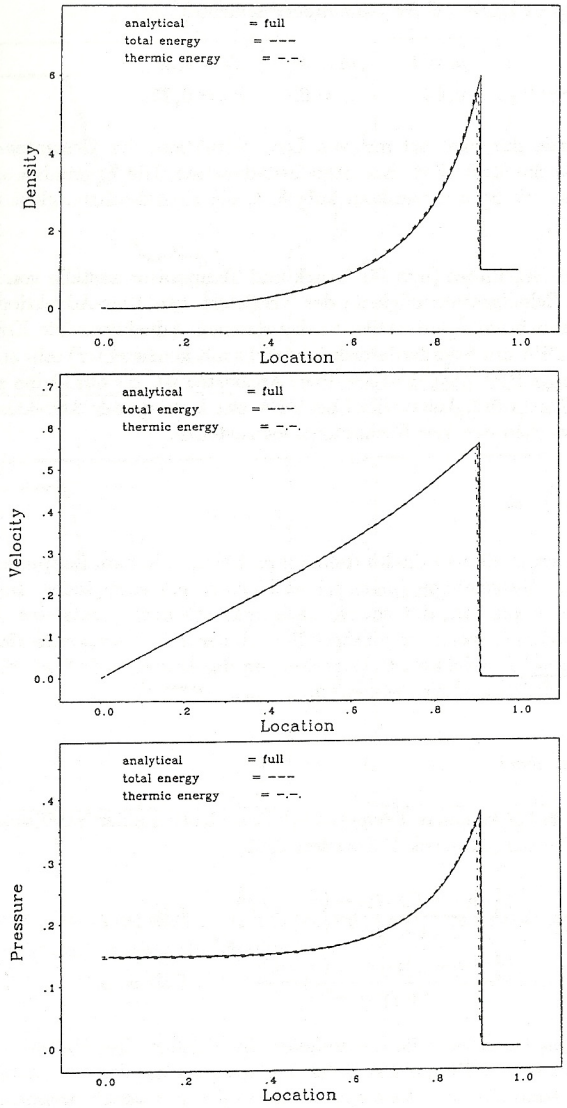


Abb. 3.13. Planares Sedovproblem, analytische und numerische Lösung.

Die Anfangsbedingung lautet (E die Gesamtenergiedichte)

$$\begin{aligned} \rho_l = 1, \qquad & v_l = 0, \qquad & E_l = 2,5, \\ \rho_r = 0,125, \qquad & v_r = 0, \qquad & E_r = 0,25. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Die Rechnung wurde durchgeführt mit van Leer Advektion, der Gesamtenergiegleichung, ohne künstliche Viskosität, mit Standardadvektion. Die Ergebnisse sind sehr gut: Der Schock ist mit 2 Gitterpunkten aufgelöst, die Kontaktunstetigkeit hingegen deutlich schlechter.

Abbildung 15 zeigt Ergebnisse (nun für Druck und Temperatur anstelle von Gesamtenergiedichte und Schallgeschwindigkeit) des Vergleichs van Leer-Advektionsschema vs. PPA-Schema und Standardadvektion vs. konsistenter Advektion. Die Kontaktunstetigkeit wird bei PPA mit Standardadvektion (nicht mit konsistenter) sehr scharf aufgelöst, dafür schwingt PPA aber deutlich über. Ansonsten ist, bis auf kleine *postshock* Oszillationen im Geschwindigkeitsverlauf bei PPA mit konsistenter Advektion, kaum ein Unterschied zwischen den vier Rechnungen festzustellen.

3.9 Der Doppelschock

Dies ist wiederum ein eindimensionales Riemannproblem, d. h. zum Zeitpunkt 0 grenzen zwei homogene Gaszustände (ρ_l, v_l, p_l) und (ρ_r, v_r, p_r) aneinander. Die beiden Zustände sind nun so gewählt, daß sowohl nach links wie nach rechts eine Stoßwelle läuft. Dies ist nur möglich, wenn der *preshock* Bereich der linken/rechten Stoßwelle (als *reverse/forward* Schock bezeichnet) links/rechts von der Unstetigkeit liegt, die beiden Schocks somit eine dichte „Schale" begrenzen.

Der planare Doppelschock

Die Bedingungen, daß es zu einem Doppelschock und nicht zu einer Verdünnungswelle + Schock kommt, lauten (Sturrock & Spreiter, 1965)

$$\begin{aligned} \frac{a_l}{v_l - v_r} &< \frac{\{\frac{1}{2}\gamma[(\gamma+1)p_r/p_l + (\gamma-1)]\}^{\frac{1}{2}}}{(p_r/p_l) - 1} \qquad \text{falls } p_r/p_l > 1, \\ \frac{a_r}{v_l - v_r} &< \frac{\{\frac{1}{2}\gamma[(\gamma+1)p_l/p_r + (\gamma-1)]\}^{\frac{1}{2}}}{(p_l/p_r) - 1} \qquad \text{falls } p_l/p_r > 1, \end{aligned} \tag{3.37}$$

wobei $v_l > v_r$ vorausgesetzt ist; a ist die adiabatische Schallgeschwindigkeit.
Die analytische Lösung des Doppelschocks ist einfacher als die des Riemannproblems in Abschnitt 8, sie kann nämlich allein aus Lösungen $\rho, v, p = konst$ zusammengesetzt werden. Die Struktur ist also
konst – reverse Schock – konst – Kontaktunstetigkeit – konst – forward Schock – konst.

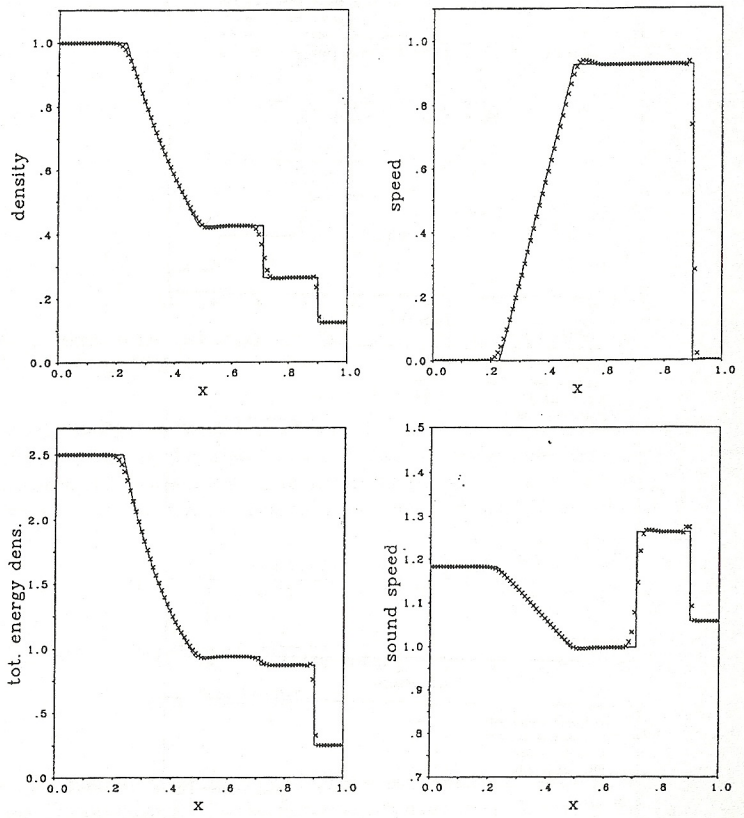


Abb. 3.14. Die Riemannsche Schockröhre mit Parametern nach Sod (1978). Durchgezogen: analytische Lösung.

Die Lösung ergibt sich i) aus den adiabatischen Sprungbedingungen an den beiden Schocks, zusammen mit ii) der Stetigkeit von Geschwindigkeit und Druck an der Kontaktunstetigkeit. Sie lautet für ein $\gamma = 5/3$ Gas mit zwei *starken* Schocks (Sturrock &

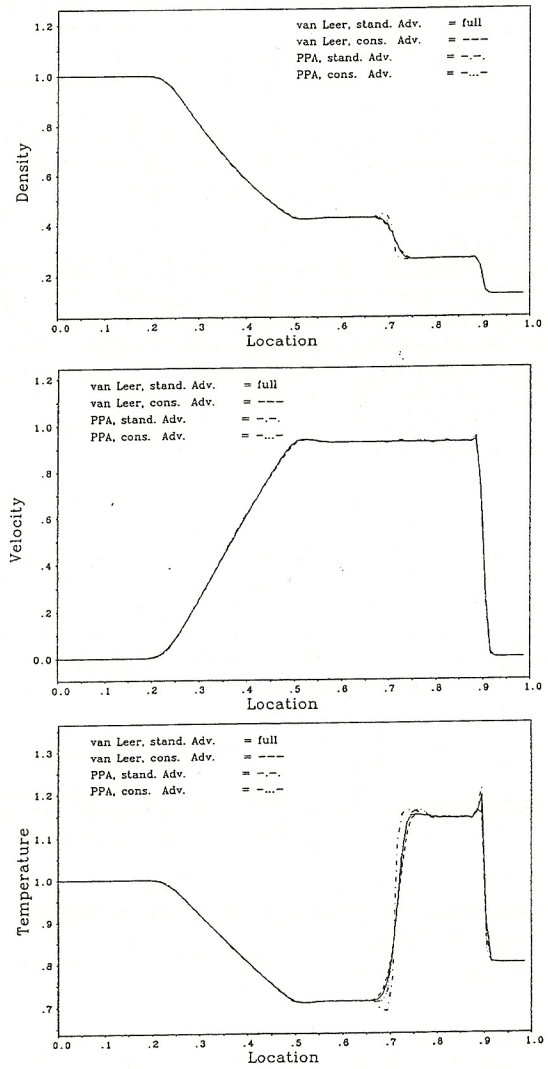


Abb. 3.15. Riemannsche Schockröhre nach Sod. Vergleich van Leer-Schema vs. PPA-Advektionsschema sowie Standardadvektion vs. konsistente Advektion.

Spreiter, 1965) (v' die Geschwindigkeit des geschockten Materials)

$$\begin{aligned} v_{\text{rev}} &= \frac{3-\lambda}{3(1+\lambda)} v_r + \frac{4\lambda}{3(1+\lambda)} v_l, \\ v_{\text{for}} &= \frac{4}{3(1+\lambda)} v_r + \frac{3\lambda-1}{3(1+\lambda)} v_l, \\ v' &= \frac{v_r + \lambda v_l}{1+\lambda}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

mit

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_r}}.$$

Beim *isothermen* Doppelschock nun führt die Näherung unendlich großer Machzahlen zu dem Problem, daß

$$v_{\text{rev}} = v' = v_{\text{for}}, \tag{3.39}$$

der starke isotherme Doppelschock hat also keine Ausdehnung, beide Schocks folgen unmittelbar aufeinander. Dies ist auch der Grund, warum die (starken) Doppelschocks in den variablen isothermen Windrechnungen (siehe Kapitel 6) sehr schmal sind. Eine Rechnung *ohne* Annahme starker Schocks führt dann auf (λ wie oben)

$$\begin{aligned} v_{\text{rev}} &= \frac{(1+2\lambda)v_l + v_r}{2+2\lambda} - \frac{(v_l - v_r)}{2+2\lambda}\sqrt{1 + \frac{4(1+\lambda)^2 a^2}{\lambda(v_l - v_r)}}, \\ v_{\text{for}} &= v_{\text{rev}} + \frac{1+\lambda}{\lambda}\frac{a^2}{v_l - v_{\text{rev}}}, \\ v' &= \frac{v_{\text{rev}} + \lambda v_{\text{for}}}{1+\lambda}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Auch der planare Doppelschock empfiehlt sich aufgrund seiner einfachen Lösung als ideales Testproblem für starke Schocks. (Numerischen Beispielen für Doppelschocks sind wir schon in Abschnitt 6 dieses Kapitels (Nohs Test) begegnet, nämlich die Fälle „vel=$(1,-1)$“ und „vel=$(2,0)$“ in Abbildung 11.) Abbildung 16 zeigt einen adiabatischen Doppelschock.
Die adiabatische Rechnung ist hier in cgs-Einheiten durchgeführt; dies ist für das Folgende ohne Bedeutung. Es ist $\rho_l = \rho_r$, so daß sich eine symmetrische Struktur ohne Kontaktunstetigkeit ergibt. Weiterhin ist $v_r = 0$, womit die Geschwindigkeiten in Einheiten von v_l sind

$$v_l = 1, \quad v_{\text{rev}} = \frac{1}{3}, \quad v' = \frac{1}{2}, \quad v_{\text{for}} = \frac{2}{3}, \quad v_r = 0. \tag{3.41}$$

Die Courantzahl ist 0,7 und es wurde künstliche Viskosität mit einem Koeffizienten $b = 1$ verwendet. Die Schocks haben dann eine typische Breite von 3 Gitterpunkten.

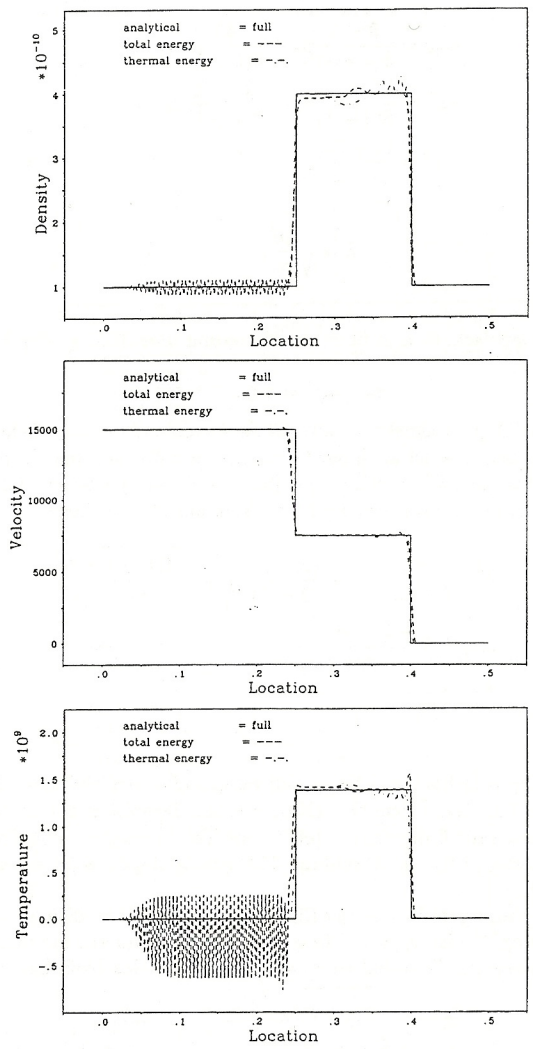


Abb. 3.16. Adiabatischer planarer Doppelschock.

Die besten (und diese sind in Abbildung 16 dargestellt) Resultate ergeben sich mit *Standard*advektion für die Rechnung mit *Gesamt*energiegleichung und mit *konsistenter* Advektion für die Rechnung mit *mikroskopischer* Energiegleichung. –
Bei Lösung der mikroskopischen Energiegleichung wird mit kleiner werdender künstlicher *Viskosität* der Schock schmaler, dafür sind dann Schocksprünge und -position aufgrund der – relativ zur künstlichen Viskosität – großen, nichtkonservativen intrinsischen Diffusivität nicht mehr exakt.
Wird hingegen die *Gesamt*energiegleichung gelöst, ist Schockschärfe bei gleichzeitig korrekten Sprungbedingungen möglich; dafür kann es an starken Schocks (die Machzahl in Abb. 16 ist jeweils $\sqrt{0,6} \cdot 10^4 \approx 7750$) zu stark negativen Temperaturen und starken Oszillationen im *preshock* Bereich kommen, wo der Anteil der thermischen Energie an der Gesamtenergie kleiner ist als typische (Gitter-)Interpolationsfehler, vgl. Abschnitt 2.2.

Der *isotherme* Doppelschock in Abbildung 17 wurde mit Standardadvektion und mit einem Viskositätskoeffizienten $b = 1$ berechnet. Die Machzahl ist hier nur 5, und in der Anfangsbedingung wurde wieder ein Dichteverhältnis $\lambda = 1$ verwendet.

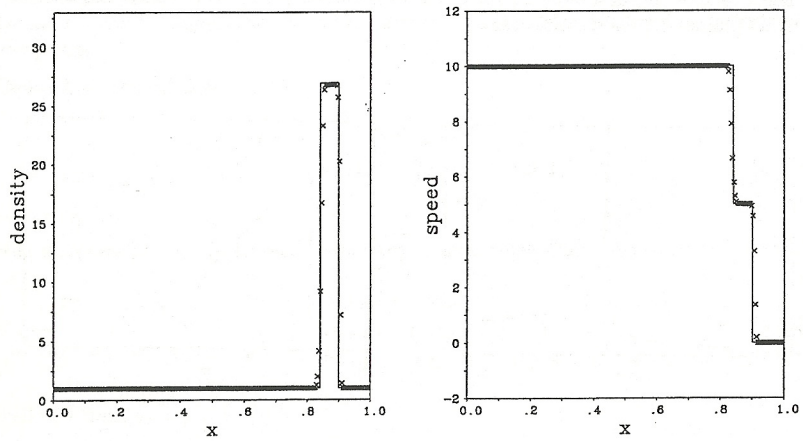


Abb. 3.17. Isothermer planarer Doppelschock.

Der sphärische Doppelschock

Das Ähnlichkeitsproblem des *sphärischen* Doppelschocks wurde von Simon & Axford (1966) mittels einer Methode nach Courant & Friedrichs (1948), Kapitel VI C, behandelt. (Ein allgemeinerer Fall wird von Chevalier (1982) untersucht.) Leider ist keine

analytische Lösung möglich, sondern für jeden Doppelschock mit gegebenen *preshock* Geschwindigkeiten an den beiden Schocks ist eine numerische Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung nötig. Abbildung 18 zeigt eine solche mit einem Runge-Kutta-Verfahren gewonnene Lösung für die Ähnlichkeitsgrößen σ („Dichte“) und θ („Temperatur“), die definiert sind durch (Simon & Axford, 1966)

$$\rho = \rho_0 \sigma(\eta)/r^2, \qquad p = \rho_0 \pi(\eta)/t^2, \qquad \theta = (r^2/t^2)\,\pi(\eta)/\sigma(\eta), \tag{3.42}$$

mit der Ähnlichkeitsvariablen

$$\eta = r/\alpha t. \tag{3.43}$$

Besonders interessant ist die unendliche Dichte an der Kontaktunstetigkeit. Sie ist unproblematisch, da die angesammelte Masse endlich ist. Der physikalische Grund für diese Singularität ist, daß i) Material die Kontaktunstetigkeit nicht passieren kann und ii) in der Umgebung der Kontaktunstetigkeit (beidseitig) ein negativer Geschwindigkeitsgradient besteht: Das Material muß sich daher in einer unendlich dünnen Schicht an der Kontaktunstetigkeit anlagern. Die *Temperatur* fällt monoton ab zwischen jedem der beiden Schocks und der Kontaktunstetigkeit, wobei an der letzteren wieder die *preshock* Temperatur ($T_{\rm pre} = 0$, da unendlich starke Schocks betrachtet werden) erreicht ist. Die Ursache hierfür ist die *adiabatische Kühlung* aufgrund sphärischer Expansion, die in Abschnitt 8.1 weiter diskutiert wird.

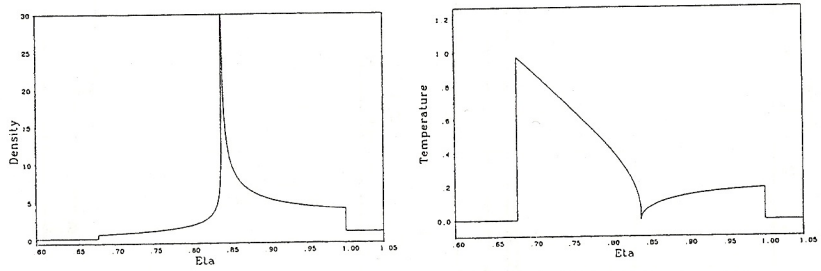


Abb. 3.18. Sphärischer adiabatischer Doppelschock nach Simon & Axford (1966).

Reverse und forward Schocks

Abschließend sollen einige allgemeine Aussagen zu *reverse* und *forward* Schocks (nochmals) zusammengestellt werden.

1. *Die Geschwindigkeit eines Schocks muß entweder größer als die größere der beiden Geschwindigkeiten am Sprung sein oder kleiner als die kleinere dieser beiden Geschwindigkeiten.*

Denn: Der Schock ist i) geometrisch so dünn, und der Durchfluß der Materie findet ii) in so kurzer Zeit statt, daß die planare stationäre Kontinuitätsgleichung verwendet werden kann,

$$\rho_l(v_l - v_s) = \rho_r(v_r - v_s), \tag{3.44}$$

wobei sich Indizes „l“ und „r“ wieder auf „links“ und „rechts“ vom Schock beziehen. Da die Dichte immer positiv ist, folgt, daß die beiden Ausdrücke in Klammern dasselbe Vorzeichen haben müssen. Aussage 1 ist in *jedem* Bezugssystem richtig, auch im Schocksystem $v_s = 0$. Die verschiedenen Vorzeichen des Massenflusses treten bei *reverse* und *forward* Schocks auf, der *reverse* Schock ist der langsame, der *forward* Schock der schnelle.

2. *Für forward* und *reverse Schock ist, unabhängig vom Bezugssystem, links vom Sprung die große Geschwindigkeit und rechts vom Sprung die kleine Geschwindigkeit.*
„Links“ und „rechts“ sind definiert durch die hier vorausgesetzte planare eindimensionale Geometrie. Die scheinbare *Auszeichnung* von „links“ und „rechts“ in der Aussage beruht auf der *Festlegung*, daß einer Bewegung nach *rechts* eine *positive* Geschwindigkeit entspricht.

Denn: Am *forward* Schock ist

$$\begin{aligned} v_l - v_r &= v_{\rm post} - v_{\rm pre} \\ &= -(a-1)v_{\rm post}, \quad (a > 1) \\ &= -(a-1)(v_l - v_s) > 0, \end{aligned} \tag{3.45a}$$

weil $v_s > \max(v_r, v_l)$; (a ist eine nicht weiter spezifizierte Zahl). Am *reverse* Schock ist

$$\begin{aligned} v_l - v_r &= v_{\rm pre} - v_{\rm post} \\ &= (a-1)v_{\rm post}, \quad (a > 1) \\ &= (a-1)(v_r - v_s) > 0, \end{aligned} \tag{3.45b}$$

weil $v_s < \min(v_r, v_l)$.

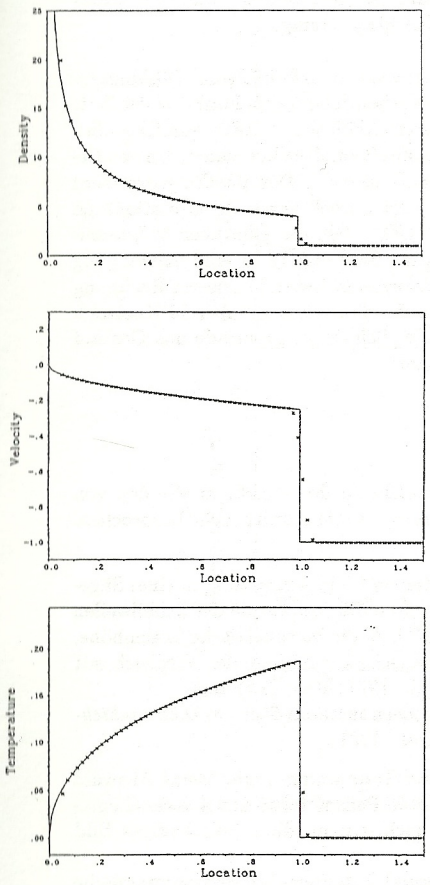
Eine Veranschaulichung der Entstehung eines *reverse-forward* Schockpaares gibt Owocki (1992) anhand einer Massenkarambolage von Fahrzeugen. Die bereits aufeinandergefahrenen Fahrzeuge bilden den *postshock* Bereich. Jedes weitere auffahrende Fahrzeug erfährt einen *reverse* Schock, denn seine Geschwindigkeit vor dem Schockstoß ist hoch, seine Geschwindigkeit danach ist niedrig. Schiebt sich die Ansammlung ineinandergefahrener Fahrzeuge weiter vorwärts und stößt auf diese Weise auf ein langsameres oder stehendes Fahrzeug, so erleidet dieses einen *forward* Schock; denn seine Geschwindigkeit vor dem Stoß ist niedrig, danach höher.

3.10 Strahlungskühlung nach Chevalier & Imamura

Die Strömung ist hier dieselbe wie bei der planaren Nohschen Schockreflektion: ein supersonischer Gasstrahl trifft auf eine Wand und ein Schock läuft in das Gas hinein. Doch soll das schockgeheizte Gas nun nicht *adiabatisch* strömen, sondern *strahlungskühlen*; die im Schock gewonnene thermische Energie regt höhere atomare Niveaus und Ionisationsgrade des Gases an, und diese Anregungsenergie kann abgestrahlt werden.
Eine genauere Beschreibung der Strahlungskühlung und der Hydrodynamik der Kühlungszone wird in Kapitel 8 gegeben. Hier sollen (vorab) nur einige numerische Resultate dargestellt werden.
Aufgrund der Strahlungskühlung läuft der Schock nicht mehr mit konstanter Geschwindigkeit in das Gas hinein, sondern kommt an einer bestimmten Stelle zur Ruhe. Die *Kühlungszone* zwischen Wand und Schock unterliegt dann unter Umständen (s. u.) einer *thermischen Instabilität*, die eine periodische Verkürzung und Verlängerung der Kühlungszone bewirkt, also eine Schwingung der Schockposition.
Die mikroskopische Energiegleichung mit *parametrisierter* Kühlungsfunktion lautet (wobei $e = \frac{p}{(\gamma-1)}$)

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + A\rho^2 T^\alpha. \tag{3.46}$$

Numerische Methoden zur Berechnung der Strahlungskühlung in dieser Gleichung werden in Anhang 5 beschrieben. Analytische Lösungen der stationären planaren Kühlungszone für verschiedene Kühlungsexponenten α werden in Chevalier & Imamura (1982) angegeben (siehe hierzu Anhang 1), wo auch die lineare Stabilitätsanalyse der oszillatorischen thermischen Instabilität durchgeführt ist.
Abbildung 19 zeigt analytische und numerische Lösung der *stationären* Kühlungszone für $\alpha = 1$ (einheitslose Größen $k = \mu = 1$). Die Kühlungskonstante A wurde so gewählt, daß die Schockposition $x = 1$ ist. (Ein technischer Punkt sei erwähnt: In der Literatur wird häufig, insbesondere für kleine α, ein unterer *cutoff* für die Temperatur eingeführt, unterhalb dessen die Kühlungsfunktion auf 0 gesetzt wird, um einen Kühlungs*runaway* zu verhindern, siehe Abschnitt 8.4. In den Rechnungen zu Abbildung 19 und 20 wurde kein *cutoff* verwendet, das Gas durfte bis $T = T_{\text{pre}} \approx 0$ kühlen.)
Dichte und Geschwindigkeit des einströmenden Gases sind 1 und -1. Die Endzeit der Rechnung ist $t = 400$, die Courantzahl 0,5, für die quadratische künstliche Viskosität wurde ein Koeffizient $b = \sqrt{1,2}$ verwendet. Die Temperatur des einströmenden Gases wurde auf einen solchen Wert gesetzt, daß die Machzahl des adiabatischen Schocks 10^{10} ist. Da der gesamte *radiative* Schock = adiabatischer Schock + Kühlungszone als *isothermer Sprung* angesehen werden kann (die Temperatur ist bei x_s und $x = 0$ gleich, nämlich T_{pre}), gilt $\rho(x = 0)/\rho_{\text{pre}} \approx \text{Ma}^2 = 10^{20}$ (es wurde auf einen Faktor γ verzichtet). Dieser extreme Dichtezuwachs ist numerisch nicht auflösbar (vergleiche hierzu auch Anhang 4), und in der Rechnung wurde daher der linke Rand bei $x > 0$ gelegt. Dies hat den weiteren Vorteil, daß als linke Randbedingung derselbe stationäre Massenfluß $\rho v = -1$ wie im inneren Rechenbereich verwendet werden kann; an einer



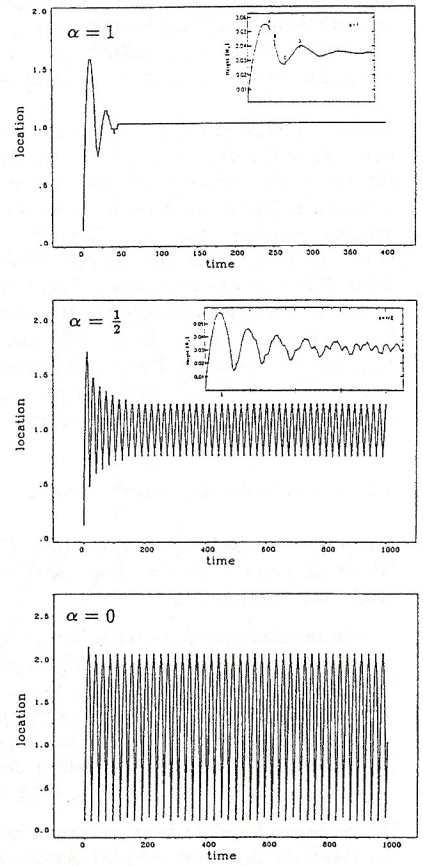


Abb. 3.19. (Links) Stationärer radiativer Schock für Kühlungsexponenten $\alpha = 1$. Durchgezogen: analytische Lösung, Sterne: numerisch.

Abb. 3.20. (Rechts) Oszillatorische thermische Instabilität für verschiedene Kühlungsexponenten. Eingeschobene Zeichnungen in der rechten oberen Ecke aus Imamura et al. (1984).

festen Wand müßte hingegen $\rho v = 0$ gesetzt werden, was nicht mit der Entwicklung einer stationären Lösung konsistent ist.
Für die in Abb. 19 dargestellte Rechnung wurde das van Leer Schema mit konsistenter Advektion verwendet sowie die mikroskopische Energiegleichung.

Abbildung 20 zeigt die Abhängigkeit der *oszillatorischen Instabilität* vom Kühlungsexponenten α. Gezeichnet ist die Position des adiabatischen Schocks als Funktion der Zeit. Die Schwingungsdauern und Dämpfungsraten dieser Oszillation wurden von Chevalier & Imamura (1982) durch (numerische) lineare Stabilitätsanalyse berechnet. Unsere Ergebnisse stimmen mit diesen Werten im %-Bereich überein. Der Kühlungsexponent $\alpha = 1$ ist stabil, und die Schockposition konvergiert schnell gegen ihren stationären Wert. Für $\alpha = 1/2$ beobachten Imamura et al. (1984) den von Chevalier & Imamura (1982) vorhergesagten Zerfall der ursprünglichen Schwingung in eine Schwingung höherer Frequenz und geringerer Periode. Diese *Obermoden* treten in unserer Rechnung aufgrund der speziellen Randbedingungen nicht auf, wir werden sie aber in Kapitel 9 finden. Der $\alpha = 0$ Fall zeigt, daß im Minimum der Schwingungsperiode das Gas auf eine einzige Gitterzelle zusammengepreßt sein kann!

3.11 Abschließende Bemerkungen

Einige grundlegende hydrodynamische Effekte, welche in den variablen Winden von OB-Sternen eine Rolle spielen könnten, wurden in diesem Abschnitt nicht besprochen. Solche sind beispielsweise

- Aufsteilen einer Schallwelle in einer exponentiellen Dichteschichtung zu einer Sägezahnstruktur aufeinanderfolgender Schocks (denn die Amplitude der Schallwellen wächst mit der Höhe z proportional $\exp(z/2H)$, H die barometrische Skalenhöhe, siehe Lamb, 1932). Abbildung 21 zeigt numerische Ergebnisse, der Vergleich mit anderen Rechnungen (vgl. Ulmschneider et al., 1977) steht noch aus.
- Strahlungskühlung (einschließlich der thermischen Instabilitäten) in Dichte*schichtungen* (siehe Malagoli et al., 1990, Reale et al., 1991).

Die in diesem Kapitel wiedergegebenen numerischen Tests sind nur eine kleine Auswahl aus vielen durchgeführten Testläufen mit veränderten Parametern, Advektionsschemata, künstlicher Viskosität, usw. Wir hoffen dennoch, ein möglich vollständiges Bild gegeben zu haben.
Insgesamt konnte gezeigt werden, daß das in Kapitel 2 dargestellte hydrodynamische Schema imstande ist, eine Vielzahl von Strömungen numerisch gut zu behandeln. Die in einer bestimmten Problemstellung bestmögliche Lösung muß oft durch eine *Wahl* aus verschiedenen Möglichkeiten des Verfahrens gewonnen werden (mikroskopische oder makroskopische Energiegleichung, Standardadvektion oder konsistente Advektion, Maß der verwendeten künstlichen Viskosität, benutztes *Operator Splitting*). Solche nicht *a priori* festlegbaren Freiheitsgrade des numerischen Schemas überraschen nicht angesichts der unendlich vielen Freiheitsgrade der untersuchten Flüssigkeit selbst.

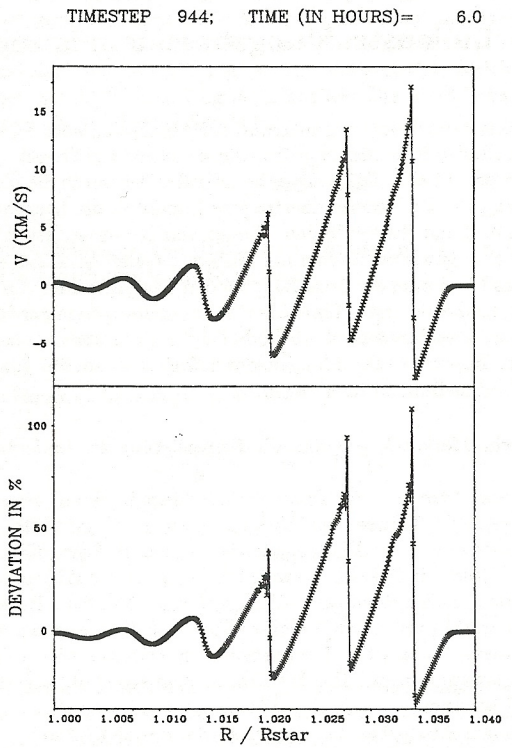


Abb. 3.21. Aufsteilen einer Schallwelle zu Schocks in einer exponentiellen Dichteschichtung.

4

Die Linienstrahlungsbeschleunigung

Hier soll die Strahlungsbeschleunigung aufgrund der Absorption oder Streuung stellarer Photonen in Spektrallinien formuliert werden, wie sie zuerst von Owocki, Castor & Rybicki (1988) und Owocki (1990, 1991) angegeben wurde. Der durch die photosphärische Kontinuumsstrahlung auf die Materie übertragene Impuls ist die Ursache des stellaren Windes. Da Wasserstoff und Helium in den Winden von O-Sternen vollständig ionisiert sind (Helium könnte ab gewissen Radien nur einfach ionisiert sein, siehe Pauldrach et al., 1993) und da das Maximum der Strahlung bei den Temperaturen von O-Sternen im Ultravioletten liegt, sind es in erster Linie die UV-Linienübergänge der Metalle, welche mit dem Strahlungsfeld wechselwirken. Es sind also die Metallionen (vor allem von Fe, Ni, C, N, O), die den Impuls des Strahlungsfeldes aufnehmen, um ihn dann durch Stöße auf das gesamte Windmedium zu übertragen.

Zwei charakteristische Merkmale gehen in die Formulierung der Linienbeschleunigung ein.
1. Die Absorption oder Streuung der Photonen geschieht in einem *bewegten* Medium. Da die Geschwindigkeit der Winde von OB-Überriesen in einem relativ kleinen Radiusbereich (typischerweise von der Photosphäre bis 5 oder 10 Sternradien) über einige hundert thermische Geschwindigkeiten anwachsen kann, ist die Absorption der Strahlung bei *einer* Frequenz durch eine Spektrallinie auf enge räumliche Bereiche begrenzt: Steigt die Windgeschwindigkeit *nur* um einige thermische Geschwindigkeiten, so gerät das Photon außer Resonanz mit den Linienabsorbern. (Hierbei wird reine thermische Linienverbreiterung angenommen.) Der Bereich, in dem Absorption stattfinden kann, wird „Sobolevzone“ genannt.
2. Die *gesamte* Linienstrahlungsbeschleunigung wird als analytisches Integral über eine statistische Linienverteilungsfunktion berechnet. Die Zahl der effektiv den Wind treibenden Linien liegt bei vielen tausend (vgl. Puls, 1993), die im Rahmen zeitabhängiger Rechnungen nicht einzeln behandelt werden können. Die Linienverteilungsfunktion ist die von Castor et al. (1975) angegebene, in der modifizierten Form von Owocki et al. (1988).

Die hydrodynamische *Instabilität* der Linienstrahlungsbeschleunigung wird in diesem Kapitel nicht behandelt, sondern erst im folgenden Kapitel 5.

4.1 Die allgemeine Strahlungsbeschleunigung

Im folgenden wird sphärische Symmetrie vorausgesetzt, so daß es nur eine Kraftkomponente in radialer Richtung gibt. (Für eine allgemeine Herleitung ohne Symmetrieannahme ist eine ähnliche Argumentation wie in Chandrasekhar (1950), S. 3-4, oder

Mihalas (1978), S. 6 zur Herleitung der Strahlungsenergiedichte nötig, nämlich mittels zweier infinitesimaler Volumina.) Die Ableitung hier folgt Mihalas (1978), S. 45.
Sei A die Fläche einer Kugelschale, $dV = Adr$ ein infinitesimales Volumen. Auf A falle ein Strahl unter dem Winkel $\cos^{-1}\mu$ gegenüber der auswärts gerichteten Normalen ein. Der Strahl legt durch dV den Weg dr/μ zurück. Die in dV absorbierte Energie im Frequenzintervall $d\nu$ aus diesem Strahl ist

$$dE_\mu = \chi I A \mu \frac{dr}{\mu} d\omega d\nu dt, \tag{4.1}$$

mit (ggf. winkelabhängiger) Opazität χ (der Einheit cm^{-1}). Der hierbei in dV absorbierte Impuls in r-Richtung ist $\mu dE_\mu/c$, also

$$dp_{r,\mu} = \chi \frac{I}{c} dV d\omega d\nu dt; \tag{4.2}$$

dies über alle Raumwinkel integriert gibt

$$\frac{1}{dV}\frac{dp_r}{dt} = \frac{4\pi}{c} d\nu \, \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \chi I_\nu \mu d\mu \tag{4.3}$$

Die Kraft auf die Materie in r-Richtung ist $F_r = dp_r/dt$, also ist die Beschleunigung (aufgrund von Absorption im Frequenzintervall $d\nu$)

$$g_r = \frac{F_r}{dm} = \frac{1}{dV}\frac{dp_r}{dt}\frac{dV}{dm} = \frac{4\pi}{c}\kappa d\nu \, \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \chi I_\nu \mu d\mu, \tag{4.4}$$

mit Massenabsorptionskoeffizient $\kappa = \chi/\rho$. Diese Gleichung für die Beschleunigung bleibt auch im realistischeren Falle der Linien*streuung* (s. u.) anstelle reiner Absorption gültig, wenn man annimmt, daß die Reemission mit Vor-/Rücksymmetrie erfolgt und somit keinen Impulsübertrag auf die Materie bewirkt.

4.2 Die Linienbeschleunigung in einem bewegten Medium

Es ist die über eine Spektrallinie *integrierte* Beschleunigung gesucht.

a) In allem folgenden wird angenommen, daß die Linie eine reine Doppler-Profilfunktion $\phi(x) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}$ hat. Der Fall eines Voigtprofils mit Absorption in den Lorentzflügeln wird in Owocki & Rybicki (1984) diskutiert. Die durch die Linienbeschleunigung verursachte hydrodynamische Instabilität hat in einem Dopplerflügel sehr viel größere Wachstumsraten als in einem Lorentzflügel, dies aufgrund der größeren Steigung des Dopplerflügels als Funktion der Frequenz. Daher ist ein reines Dopplerprofil für Untersuchungen der Strahlungsinstabilität von prinzipiellem Interesse. Weiterhin ist festzustellen, daß in OB-Sternen nahe der Photosphäre das Kontinuum noch so stark ist, daß

die Linienflügel im Kontinuum verschwinden. Nur weit außen im Wind könnten Linienflügel sich überhaupt ausbilden. Jedoch liegen in OB-Sternen die den Wind treibenden Resonanzlinien so dicht zusammen, daß die Flügel einer Linie bereits in Kernnähe der nächsten Linie zu liegen kommen und es nicht zur Ausbildung von Flügeln kommt. Insgesamt scheint die Annahme eines Dopplerprofils daher gerechtfertigt zu sein.
Es werden natürliche Frequenzeinheiten eingeführt:

$$\nu \to x = \frac{\nu - \nu_L}{\Delta\nu_D}, \tag{4.5}$$

mit Linienfrequenz ν_L und Dopplerbreite $\Delta\nu_D = \nu_L v_{\rm th}/c$. Damit ist

$$d\nu \equiv \frac{\nu_L v_{\rm th}}{c} dx. \tag{4.6}$$

Im folgenden wird zunächst angenommen, daß der Wind isotherm, $v_{\rm th}$ daher konstant ist. Die Strahlungsbeschleunigung in einem nichtisothermen Wind wird in Abschnitt 10 behandelt.

b) In der Linie ist für verschwindende Kontinuumsopazität (s. u.)

$$\kappa \equiv \kappa_L \phi(\tilde{x}), \qquad \tilde{x} = x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}. \tag{4.7}$$

Das Argument der Profilfunktion ist hierbei die Frequenz $\tilde{x}$ im *mitbewegten* System am Ort r im Geschwindigkeitsfeld $v(r)$. (Mit „x" wird im folgenden immer die Ruhfrequenz im Sternsystem bezeichnet.)

c) Die Intensität in der Linie schließlich wird als formale Lösung der Strahlungstransportgleichung angesetzt,

$$I(r,\mu,x) = I(r_*,\nu_L) D(\mu) l(x) e^{-|\tau_L(r,\mu,x) - \tau_L(r_0,\mu_0,x)|} + \tag{4.8}$$
$$\int_{\tau_L(r_0,\mu_0,x)}^{\tau_L(r,\mu,x)} d\tau'\, S_L(r',\nu_L) e^{-|\tau_L(r,\mu,x) - \tau_L(r',\mu',x)|},$$

wobei r' der Ort ist, an dem die optische Tiefe τ' ist. Die optische Tiefe entlang eines p-Strahls in der üblichen (p,z)-Geometrie (siehe Mihalas, 1978, S. 247) ist

$$\tau_L(r,\mu,x) = \tau_L(r_0,\mu_0,x) + \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\mu'} \rho(r')\kappa(r') \phi\left(x - \frac{\mu' v(r')}{v_{\rm th}}\right). \tag{4.9}$$

Wir treffen die Vereinbarung, daß am „Anfangspunkt" (im Sinne des Photonweges) des p-Strahls, bei $r_0 = \infty$ oder $r_0 = r_*$, die optische Tiefe einen *Minimalwert* τ_0 hat.

In diesem Ansatz für die Intensität wurden folgende Annahmen gemacht:

i) Schmale Linie: Die Kontinuumsintensität I_* ist über die Linie hinweg konstant.
ii) 2-Niveau Atom: Die Quellfunktion ist nur von der unteren Besetzungszahl und den Prozessen der betracheten Linie abhängig.
iii) Vollständige Umverteilung (*Complete Redistribution*): Die Linienquellfunktion ist unabhängig von x, also über die Linie hinweg konstant. Weiterhin wird die Linienstreuung als isotrop angenommen, so daß S auch unabhängig von μ ist.
iv) Nur Linienopazität: Das Kontinuum sei optisch dünn. Dies ist für OB-Sterne eine gute Approximation, nicht jedoch für WR-Sterne.
v) Photosphärische Einstrahlung: Die Kontinuumseinstrahlung $I(r_*,\nu)$ stammt aus der Photosphäre (im folgendem immer durch „$*$" gekennzeichnet).

Punkte iv) und v) werden als *core-halo*-Näherung bezeichnet. $D(\mu)$ beschreibt die endlich große Sternscheibe ($D = 0$ für $\mu < \mu_*$) und die Mitte-Rand-Verdunklung. $l(x)$ ist das photosphärische Linienprofil, wobei $v_* \ll v_{\rm th}$ angenommen wurde. Für eine ausführliche Diskussion der Gültigkeit obiger Näherungen i) bis v) sei auf Puls (1993) verwiesen.
Die obige formale Lösung der *stationären* Strahlungstransportgleichung (I ohne *explizite* Zeitabhängigkeit) setzt die *instantane* Kopplung des Strahlungsfeldes an die Materie voraus. Diese ist möglich für $v \ll c$, was in OB-Überriesen wegen $v_{\rm max} \approx 10^{-2}\, c$ noch gut erfüllt ist, und Stationarität ist somit eine gute Näherung. Andererseits kann es aber in der ausgedehnten Windstruktur zu *Laufzeiten* der Photonen von mehreren Stunden zwischen verschiedenen Resonanzorten kommen, und eine entsprechende Retardierung müßte eingeführt werden. Diese ist in momentanen Rechnungen noch nicht berücksichtigt.

Damit erhält man die integrierte Linienbeschleunigung

$$g_L(r) = \frac{4\pi}{c^2} \kappa_L \nu_L v_{\rm th} \left\{ \frac{I(r_*,\nu_L)}{2} \int_0^1 d\mu\, \mu\, D(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi\left(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\right) l(x) e^{-(\tau_L(r,\mu,x) - \tau_0)} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\mu\, \mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi\left(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\right) \int_{\tau_L(R,\mu_R,x)}^{\tau_L(r,\mu,x)} d\tau'\, S_L(r',\nu_L)\, e^{-|\tau_L(r,\mu,x) - \tau'|} \right\}. \tag{4.10}$$

In der μ-Integration des photosphärischen Anteils wurde verwendet, daß die Sternscheibe maximal eine Hemisphäre einnehmen kann.

4.3 Das photosphärische Profil

Um die Instabilität der Linienbeschleunigung numerisch besser handhabbar zu machen, wird die Intensität in Photosphärennähe, in welchem Bereich die Instabilität aufgrund des großen Gradienten im Geschwindigkeitsfeld besonders stark ist, durch ein photosphärisches Absorptionsprofil herabgesetzt (Owocki et al., 1988).

Dieses Profil soll in einer Schuster-Schwarzschild-Schicht (siehe Schuster, 1905) mit *reiner Absorption* (ohne thermische Reemission $\sim B$) gebildet werden. Nimmt man an, daß diese Schicht, in der die Linie entsteht, eine optische Tiefe im Kontinuum von (ungefähr) $\tau_c = 1$ hat und daß die Kontinuumsabsorptivität hauptsächlich von Elektronenstreuung stammt, $\kappa_c = \sigma_e$, so folgt mit $l(x) = e^{-\tau_L(x)}$, daß $l(x) = \exp(-\kappa_{L*}\phi(x)/\sigma_e)$ ist.

4.4 Linienüberlapp und Linienensemble

Unter Vernachlässigung der induzierten Emission ist die Linienopazität

$$\chi_L(r,\nu) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} \frac{1}{\Delta\nu_D} n_l(r)\phi(x), \tag{4.11}$$

wobei m_e und e Elektronenmasse und -ladung sind, f_{lu} ist die Oszillatorstärke des Übergangs $l \to u$, und n_l ist die Ionenzahldichte im unteren Zustand. Unter der Annahme konstanter Ionisationsverhältnisse im Wind bzgl. der Ionen, deren Resonanzlinien betrachtet werden, ist n_l proportional zur lokalen Dichte, daher

$$\chi_L(r,\nu) = \kappa_L \rho(r)\phi(x), \tag{4.12}$$

mit konstantem κ_L. (Eine Verallgemeinerung für nichtkonstante Ionisationsverhältnisse aufgrund der sehr hohen *postshock* Temperaturen in instabilen Winden wird in Abschnitt 10 gegeben.)
κ_L kann somit in der Berechnung der optischen Tiefe vor das Integral gezogen werden; jede Linie ist eindeutig charakterisiert durch das Parameterpaar (ν_L, κ_L). Die Gesamtbeschleunigung auf ein *Ensemble* von Linien läßt sich in einem Wind mit *monoton wachsendem* Geschwindigkeitsfeld $v(r)$ genau dann als einfache Summe über die Kräfte auf die einzelnen Linien schreiben (d. h. es gibt keine Kopplungsterme zwischen verschiedenen Linien), wenn keine zwei Orte r_1, r_2 im Wind innerhalb verschiedener Linien (ν_{L1}, κ_{L1}), (ν_{L2}, κ_{L2}) dieselbe Frequenz ν_0 absorbieren können. D. h. für alle ν_L und r soll gelten

$$0 = \frac{\nu_0 - \nu_{l1}}{\nu_{l1}} \frac{c}{v_{\mathrm{th},1}} - \frac{v(r_1)}{v_{\mathrm{th},1}} \neq \frac{\nu_0 - \nu_{l2}}{\nu_{l2}} \frac{c}{v_{\mathrm{th},2}} - \frac{v(r_2)}{v_{\mathrm{th},2}}. \tag{4.13}$$

Dies gibt als Forderung für nichtüberlappende Linien

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} > \frac{2v_{\max}}{c}, \tag{4.14}$$

wobei der Faktor 2 die Kopplung gegenüberliegender Hemisphären ausschließt. Mit diesem *windinduzierten* Linienüberlapp ist auch jeder *intrinsische*, d. h. Linienüberlapp in einem Ruhsystem ausgeschlossen, da hierzu nur gelten muß $\Delta\nu/\nu > v_{\mathrm{th}}/c$. Andererseits ist hiermit *nicht* ausgeschlossen die Kopplung verschiedener Orte in einem *nichtmonotonen* Geschwindigkeitsfeld. Diese wird weiter unten behandelt.

Für typische *stationäre* O-Sternwinde findet Puls (1987), daß die Beschleunigung mit Linienüberlapp nicht zu verschieden ist von derjenigen, bei der jede Linie volle Einstrahlung erhält.
In Owocki & Rybicki (1985) wird die Strahlungsinstabilität im Falle von 2 überlappenden Linien untersucht. Es ergibt sich, daß die Wachstumsrate bzgl. der roten Linie des Paares wegen Abschattung der Sternstrahlung durch die blaue Linie abgeschwächt sein kann. Der Wind insgesamt bleibt jedoch höchst instabil, daher sollte die Einschränkung auf nichtüberlappende Linien keinen großen Eingriff in die physikalische Situation darstellen.

Die Gesamtbeschleunigung wird angesetzt als

$$g_{\mathrm{tot}}(r) = \int_0^\infty d\kappa \int_0^\infty d\nu\, \hat{N}(\nu,\kappa)\, g_{\nu,\kappa}(r), \tag{4.15}$$

wobei $\hat{N}$ eine *statistische* Linienverteilungsfunktion ist. Aus der Forderung nichtüberlappender Linien und der komplementären Forderung, daß es zwischen den Linien keine Lücken geben soll, folgt

$$\hat{N}(\nu,\kappa) = \frac{N(\kappa)}{\nu}. \tag{4.16}$$

Da die Frequenzvariable x in (10) eine Integrationsvariable ist, taucht ν in der Beschleunigung in einer Linie explizit nur als Vorfaktor auf, und kürzt sich gegen dies ν^{-1} von der Linienverteilungsfunktion. Die Frequenzintegration reduziert sich somit auf

$$\begin{aligned} I_* &\equiv \int_0^\infty d\nu I(r_*,\nu), \\ S_L(r) &\equiv \int_0^\infty d\nu S_L(r,\nu). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Die CAKsche Verteilungsfunktion ist, mit $0 < \alpha < 1$,

$$N(\kappa) = \frac{1}{\kappa_0} \left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{2-\alpha} e^{-\kappa/\kappa_m}. \tag{4.18}$$

Die Unterdrückung der sehr starken Linien mittels des Faktors $\exp(-\kappa_m/\kappa)$ („m“ für „max“) wurde von Owocki et al. (1988) eingeführt und wird im nächsten Kapitel ausführlicher diskutiert. Die originale CAKsche Linienverteilungsfunktion ergibt sich im Grenzfall $\kappa_m \to \infty$. Für $\kappa_m \geq \kappa_0$ wird die CAKsche Verteilung nur geringfügig abgeändert, da die Zahl der Linien jenseits von $\kappa_0 = O(1)$ ist, wie man durch Integration von $N(\kappa)$ sieht.

4.5 Unterschied zur Sobolevnäherung

Das Auftreten der hydrodynamischen Instabilität der Strahlungsbeschleunigung in einer Linie mit Dopplerprofil ist an das Vorhandensein von Störungen mit einer *kürzeren* Längenskala als der Sobolevlänge geknüpft (Owocki & Rybicki, 1984; vgl. Kapitel 5). Es soll nun gezeigt werden, wie sich die bisherige Formulierung der Strahlungsbeschleunigung von derjenigen in Sobolevnäherung unterscheidet.
Mit der Voraussetzung der Sobolevnäherung, daß Absorptions- und Streuprozesse (bei einer bestimmten Ruhfrequenz) in einem Geschwindigkeitsfeld mit großen Gradienten auf räumlich so schmale Resonanzzonen begrenzt sind, daß über diese hinweg die sogenannten 'Makro'variablen (siehe Rybicki & Hummer, 1978) als konstant angenommen werden können, findet man für die Intensität

$$I(r,\mu,x) = S\left\{1-\exp[-\tau(r,\mu)\Phi(x)]\right\} + I_*\exp[-\tau(r,\mu)\Phi(x)], \tag{4.19}$$

mit

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx'\,\phi(x') \tag{4.20}$$

und der *gesamten* Sobolevschen optischen Tiefe $\tau(r,\mu)$ der Resonanzzone. ($\tau(r,\mu)$ braucht hier nicht näher spezifiziert zu werden).
Damit kann die Integration über die Profilfunktion in (10) durchgeführt werden

$$\bar{I}(r,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi(x)\,I(r,\mu,x) = S\left[1-\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\right] + I_*\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}. \tag{4.21}$$

Die Vernachlässigung aller Variationen auf „schnellen" Längenskalen (in der Terminologie von Rybicki & Hummer, 1978; also auf Längen kürzer als die Sobolevlänge) bewirkt in diesem Ausdruck das Auftreten *allein* der *gesamten* optischen Tiefe über die Resonanzzone hinweg.
In der Sobolevnäherung ist eine *a priori* Symmetrie bezüglich der blauen und roten (oder inneren/äußeren) Seite der Resonanzzone gegeben. Andererseits ist für die Formulierung der Strahlungsbeschleunigung, welche die *Instabilität* beinhaltet, wesentlich, daß auch Änderungen auf schnellen/kurzen Skalen betrachtet werden, und der Ansatz $\tau(x) = \tau\Phi(x)$ für die optische Tiefe ist nicht zulässig.
Aufgrund dieser Symmetrie der blauen und roten Seite verschwindet in niedrigster Ordnung (ρ, v', S konstant über die Sobolevzone) der Beitrag des *diffusen* Strahlungsfeldes zur Beschleunigung (Sobolev 1957, Castor 1970). Die Beschleunigung aufgrund gestreuter Strahlung wurde daher von diesen Autoren unter Mitnahme der *Gradienten* der Quellfunktion berechnet, siehe hierzu auch Puls & Hummer (1987).
Demgegenüber stammt im Beitrag des *direkten* Terms zur Beschleunigung der Unterschied zur Sobolevnäherung nur in der Berechnung der optischen Tiefen, also in der Mitnahme von Gradienten (und Ableitungen höherer Ordnung) in ρ, κ und dv/dr. Hieran knüpft die Grundidee der *Smooth Source Function* Methode (SSF im folgenden) von

Owocki (1990, 1991): Die Quellfunktion wird wie in niedrigster Ordung Sobolevnäherung als über die Resonanzzone konstant angenommen, es werden *keine* Gradienten der Quellfunktion betrachtet. Der Beitrag des diffusen Strahlungsfeldes zur Gesamtbeschleunigung verschwindet dann trotzdem *nicht, falls* der Zuwachs in optischer Tiefe über die Resonanzzone nicht symmetrisch bzgl. der Stelle $\tau/2$ verläuft.
(Die Strahlungsbeschleunigung in Sobolevnäherung und in der SSF-Formulierung bis zur Entwicklung nach ρ' und v'' wird weiter in Abschnitt 5.7 betrachet.)

Die tatsächliche *Quellfunktion* kann nur durch Lösung des Linienstrahlungstransports gewonnen werden. Bei den hier durchzuführenden zeitabhängigen Windrechnungen mit größenordnungsmäßig 10^4 Zeitschritten ist dies mit keiner verfügbaren Rechenzeit möglich. Es wird daher eine Approximation für S benötigt.
Da S nicht von $x = (\nu-\nu_0/\nu_0)(c/v_{\rm th})$ abhängt, sollte man die Quellfunktion aus dem Grenzfall $x \to \infty$, d. h. $v_{\rm th} \to 0$, also Sobolevnäherung, verwenden können. Es ist dann (siehe z. B. Castor, 1970, Owocki & Rybicki, 1985) für eine reine Streulinie mit $S = \bar{J} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\phi(x)J(x)$

i) für eine optisch dünne Linie

$$S = I_*W, \quad W = \frac{1-\mu_*}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r_*}{r}\right)^2}\right), \tag{4.22}$$

ii) für eine optisch dicke Linie

$$S = I_*W\left[\frac{1+\sigma(1+\mu_*+\mu_*^2)/3}{1+\sigma/3}\right], \tag{4.23}$$

mit $\sigma = d\ln v/d\ln r - 1$.

Damit ist eine approximative Behandlung des Strahlungstransports *innerhalb* einer bestimmten Resonanzzone definiert: Nach Vorgabe der Quellfunktion über die Zone hinweg wird die Strahlungsbeschleunigung aus der Frequenz- und Winkelintegration über die optischen Tiefen berechnet. Es verbleibt jedoch, die in einem nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld (wie es sich in allen numerischen Rechnungen unter Einbeziehung der Instabilität der Strahlungsbeschleunigung entwickelt) möglichen *nichtlokalen* Kopplungen von Resonanzzonen an verschiedenen, eventuell weit auseinanderliegenden Orten zu formulieren. Dies wird im übernächsten Abschnitt geschehen. Zuvor soll noch die Winkelintegration bzgl. der diffusen Beschleunigung vereinfacht werden.

4.6 Eine Symmetrie im Linienstrahlungstransport

Im diffusen Fluß aus Gleichung (10) werden die Photonen mit $\mu < 0$, die also von außen zum Stern hin (zurück-)laufen, betrachtet. Es ist dann, mit den Substitutionen $\mu \to -\mu$

und $x \to -x$,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} d\mu\,\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi\left(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\right) \int_{\tau(R,\mu_R,x)}^{\tau(r,\mu,x)} d\tau'\,S(r',\nu_L)\,e^{-[\tau(r,\mu,x)-\tau']}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} d\mu\,\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi\left(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\right) \int_{\tau(R,-\mu_R,-x)}^{\tau(r,-\mu,-x)} d\tau''\,S(r'',\nu_L)\,e^{-[\tau(r,-\mu,-x)-\tau'']}, \tag{4.24}$$

wobei die Symmetrie $\phi(x) = \phi(-x)$ der Profilfunktion verwendet wurde. Betragsstriche treten nicht auf, da von der Konvention Gebrauch gemacht wurde, daß die optische Tiefe am Beginn jedes Photonpfades minimal sein soll.

Obiger Ausdruck kann weiter vereinfacht werden unter Verwendung einer Symmetrierelation der optischen Tiefen. Es sei wie oben μ negativ und $r' > r$, so daß die folgenden Differenzen von optischen Tiefen positiv sind. Es ist, wieder unter Verwendung von $\phi(x) = \phi(-x)$,

$$\begin{aligned}\tau(r,\mu,x) - \tau(r',\mu',x) &= \int_{r'}^{r} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{\mu}}\,\kappa(\tilde{r})\rho(\tilde{r})\phi\left(x - \frac{\tilde{\mu}v(\tilde{r})}{v_{\rm th}}\right)\\ &= \int_{r}^{r'} \frac{d\tilde{r}}{-\tilde{\mu}}\,\kappa(\tilde{r})\rho(\tilde{r})\phi\left(-x - \frac{-\tilde{\mu}v(\tilde{r})}{v_{\rm th}}\right)\\ &= \tau(r',-\mu',-x) - \tau(r,-\mu,-x).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Diese Beziehung besagt, daß der Zuwachs an optischer Tiefe entlang einem auswärts gerichteten Strahl für blauverschobene (gegenüber dem Linienzentrum) Photonen gleich groß ist wie der Zuwachs entlang einem einwärts gerichteten Strahl für entsprechend rotverschobene Photonen.

Mit der Substitution im diffusen Fluß

$$\tau(r,-\mu,-x) - \tau(r'',-\mu'',-x) = \tau(r''',\mu''',x) - \tau(r,\mu,x) \tag{4.26}$$

oder kurz

$$\tau_- - \tau_-'' = \tau_+''' - \tau_+,$$

ist $d\tau_-'' = -d\tau_+'''$, und die obere Integrationsgrenze wird geschrieben als

$$\tau_+''' = \tau_+ + \tau_- - \tau_{-,R} \equiv \tau_{+,\max} \equiv \tau_m. \tag{4.27}$$

Damit ist der *gesamte* diffuse Fluß (Photonen aus $\mu < 0$ *und* $\mu > 0$) schließlich

$$\bar{\Pi}_{\rm diff}(r) = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} d\mu\,\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi\left(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\right) \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau(r,\mu,x)} d\tau'\,S(r',\nu_L)\,e^{-[\tau(r,\mu,x)-\tau']} - \int_{\tau(r,\mu,x)}^{\tau_m} d\tau'\,S(r',\nu_L)\,e^{-[\tau'-\tau(r,\mu,x)]} \right\}, \tag{4.28}$$

wobei τ_0 und τ_m die minimale und maximale optische Tiefe am Anfangs- und Endpunkt des durch (r,μ) definierten p-Strahls sind.

4.7 Sobolevnäherung in nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldern

Gemäß der verallgemeinerten Sobolevapproximation von Rybicki & Hummer (1978) kann das obige τ-*Integral* in eine *Summe* über Resonanzorte umgewandelt werden. Die optische Tiefe τ ist hierbei bezüglich des Ortes r auf der *langsamen* Skala (d. h. $\Delta r \gg L_s$, mit Sobolevlänge L_s) eine *Stufen*funktion. Dazu muß angenommen werden, daß es im nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld $v(r)$ *keine* ausgeprägten Plateaus gibt. (Diese Voraussetzung ist innerhalb der in zeitabhängigen Windrechnungen entstehenden dichten *Schalen* oder *Blasen* im allgemeinen nicht erfüllt, und die Gültigkeit dieser Näherung muß daher überprüft werden.

Für die Quellfunktion an jedem der Resonanzorte verwenden wir lediglich die *Grenzfälle* der optisch dünnen Quellfunktion S_t oder der optisch dicken Quellfunktion S_T aus der Sobolevnäherung, siehe Glg. (22) und (23),

$$S = \begin{cases} S_t & \text{für } \Delta\tau < 1 \\ S_T & \text{für } \Delta\tau > 1. \end{cases} \tag{4.29}$$

Der damit bedingte Fehler in der Nähe von $\Delta\tau = 1$ scheint vernachlässigbar gegenüber einem anderen, ernsteren Fehler in der Verwendung dieser Ausdrücke: In der Herleitung von S_t und S_T mittels rein lokaler Sobolevnäherung wird ein *monoton ansteigendes* Geschwindigkeitsfeld vorausgesetzt. Das richtige Vorgehen zur Bestimmung der Quellfunktion in einem nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld (siehe Rybicki &Hummer, 1978) würde eine iterative Lösung notwendig machen, die mit den verfügbaren Rechnerkapazitäten bei der großen Anzahl von benötigten hydrodynamischen Zeitschritten momentan noch nicht realisierbar ist.

Sei nun N_l die *Zahl* der Orte $r' < r$, die mit r in Resonanz sind, und N_r die entsprechende Zahl von Resonanzorten $r' > r$. Der Index „0" soll im folgenden Größen am Ort r bezeichnen (wobei jedoch zur Klarheit die optische Tiefe am Ort r selbst weiterhin mit τ bezeichnet wird). τ_i^l soll die optische Tiefe an der sternwärtigen Seite der i-ten

Resonanzzone bedeuten, τ_i^r entsprechend an der beobachterwärtigen Seite. Dann ist für eine Linie der diffuse Fluß bei r

$$\bar{H}_{\rm diff}(r) = \frac{1}{2}\int_0^1 d\mu\,\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi\Big(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\Big) \tag{4.30}$$

$$\Big\{S_0\Big[e^{-(\tau_0^r-\tau)} - e^{-(\tau-\tau_0^l)}\Big] + \sum_{i=-1}^{-N_l} S_i\Big[1-e^{-\Delta\tau_i}\Big]e^{-(\tau-\tau_{i+1}^l)} - \sum_{i=1}^{N_r} S_i\Big[1-e^{-\Delta\tau_i}\Big]e^{-(\tau_i^l-\tau)}\Big\},$$

mit $\Delta\tau_i = \tau_i^r - \tau_i^l > 0$; überhaupt sind alle Differenzen optischer Tiefen im obigen Ausdruck positiv.

Um nun die gesamte Linienbeschleunigung aufgrund des diffusen Strahlungsfeldes zu berechnen, muß über die Verteilungsfunktion $N(\nu,\kappa)$, Glg. (16) und (18), integriert werden. Dann ist

$$g_{\rm diff,tot}(r) = \frac{4\pi}{c^2} v_{\rm th} S \int_0^\infty d\kappa \left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{1-\alpha} e^{-\kappa/\kappa_m}\,\bar{H}_{{\rm diff},\kappa}(r). \tag{4.31}$$

Wegen der Aufspaltung der Quellfunktion in S_t und S_T muß auch das κ-Integral aufgespalten werden, und zwar an der Stelle

$$1 = \Delta\tau_i \equiv \kappa\Delta\eta_i \qquad \text{also bei} \qquad \kappa = \frac{1}{\Delta\eta_i}. \tag{4.32}$$

Die hierbei eingeführten Größen η hängen nur noch von den hydrodynamischen Feldern $v(r)$ und $\rho(r)$ (und evt. $T(r)$, siehe weiter unten) sowie der Profilfunktion ϕ ab, aber nicht mehr von der Linienstärke κ.
Die dann auftretenden Integrale der Form

$$\int_a^\infty d\kappa\,\kappa^{\alpha-1}e^{-\kappa f} \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^a \cdots,$$

mit $a \equiv 1/\Delta\eta_i$ und der von κ unabhängigen, monoton wachsenden Funktion f lassen sich durch die Substitution $\kappa f = z$ in die unvollständige Eulersche Gammafunktion überführen, nämlich für die Integrale von a bis ∞ (beachte $f > 0$),

$$= f^{-\alpha}\int_{fa}^\infty dz\, z^{1-\alpha}\,e^{-z} = f^{-\alpha}\Gamma(\alpha, fa), \tag{4.33}$$

und für die Integrale von 0 bis a,

$$= f^{-\alpha}\big[\Gamma(\alpha) - \Gamma(\alpha, fa)\big], \tag{4.34}$$

wobei $\Gamma(\alpha)$ die vollständige Gammafunktion ist (entsprechend dem Integral von 0 bis ∞). Dies gibt für die gesamte Linienbeschleunigung aufgrund des diffusen Strahlungsfeldes

$$g_{\rm diff,tot}(r) = \frac{2\pi}{c^2} v_{\rm th}\kappa_0^{1-\alpha} \int_0^1 d\mu\,\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi\Big(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\Big) \tag{4.35}$$

$$\Big\{\Big[S_0^t\Gamma(\alpha) + (S_0^T - S_0^t)\Gamma(\alpha, \Delta\eta_0^{-1}(\kappa_m^{-1} + \eta_1^l - \eta))\Big](\kappa_m^{-1} + \eta_1^l - \eta)^{-\alpha}$$

$$-\Big[S_0^t\Gamma(\alpha) + (S_0^T - S_0^t)\Gamma(\alpha, \Delta\eta_0^{-1}(\kappa_m^{-1} + \eta - \eta_0^l))\Big](\kappa_m^{-1} + \eta - \eta_0^l)^{-\alpha}$$

$$+\sum_{i=-1}^{-N_l}\Big[S_i^t\Gamma(\alpha) + (S_i^T - S_i^t)\Gamma(\alpha, \Delta\eta_i^{-1}(\kappa_m^{-1} + \eta - \eta_{i+1}^l))\Big](\kappa_m^{-1} + \eta - \eta_{i+1}^l)^{-\alpha}$$

$$-\sum_{i=-1}^{-N_l}\Big[S_i^t\Gamma(\alpha) + (S_i^T - S_i^t)\Gamma(\alpha, \Delta\eta_i^{-1}(\kappa_m^{-1} + \Delta\eta_i + \eta - \eta_{i+1}^l))\Big](\kappa_m^{-1} + \Delta\eta_i + \eta - \eta_{i+1}^l)^{-\alpha}$$

$$-\sum_{i=1}^{N_r}\Big[S_i^t\Gamma(\alpha) + (S_i^T - S_i^t)\Gamma(\alpha, \Delta\eta_i^{-1}(\kappa_m^{-1} + \eta_i^l - \eta))\Big](\kappa_m^{-1} + \eta_i^l - \eta)^{-\alpha}$$

$$+\sum_{i=1}^{N_r}\Big[S_i^t\Gamma(\alpha) + (S_i^T - S_i^t)\Gamma(\alpha, \Delta\eta_i^{-1}(\kappa_m^{-1} + \Delta\eta_i + \eta_i^l - \eta))\Big](\kappa_m^{-1} + \Delta\eta_i + \eta_i^l - \eta)^{-\alpha}\Big\}.$$

Dieser Ausdruck, obwohl länglich, ist leicht zu berechnen. Dennoch ist in den numerischen Modellen diese Kopplung von Resonanzorten noch nicht berücksichtigt, denn es sind hierzu zwei zeitintensive Operationen nötig: i) die Bestimmung aller gekoppelter Resonanzorte für alle Gitterpunkte und ii) eine (mehrfache) Berechnung der unvollständigen Gammafunktion.
Des weiteren wird (bisher) in den numerischen Rechnungen das Integral über κ *nicht* aufgespalten, so daß nur die *vollständige* Gammafunktion auftritt, es wird also *entweder* nur mit S_t *oder* nur mit S_T gerechnet. Konkret wird in der Integration über die optischen Tiefen die Quellfunktion komplett vor das Integral gezogen, und es ist für *eine* Linie

$$\bar{H}_{\rm diff}(r) = \frac{1}{2}\int_0^1 d\mu\,\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi\Big(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\Big)\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau_r} d\tau'\,S(r',\nu_L)\,e^{-[\tau(r,\mu,x)-\tau']} \tag{4.36}$$

$$-\int_{\tau_r}^{\tau_m} d\tau'\,S(r',\nu_L)\,e^{-[\tau'-\tau(r,\mu,x)]}\Big\}$$

$$= \frac{S(r,\nu_L)}{2}\int_0^1 d\mu\,\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi\Big(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\Big)\Big[e^{-[\tau_m-\tau(r,\mu,x)]} - e^{-[\tau(r,\mu,x)-\tau_0]}\Big].$$

Wir verzichten hier auf Wiedergabe der gesamten Strahlungsbeschleunigung, da diese weiter unten noch einmal angegeben wird.

4.8 Winkelintegration, Mitte-Rand-Verdunklung

Leider kann mit der verfügbaren Rechenzeit die Winkelintegration nur mit einer Stützstelle durchgeführt werden. (Natürlich muß dieser Strahl dann den Stern treffen.) Bis auf wenige Prozent stimmt diese Näherung mit der exakten Winkelintegration überein (Owocki, 1991), unterscheidet sich jedoch deutlich von der direkten Kraft eines Punktsterns. Wegen der 1-Punkt-Winkelintegration kann auch auf die Mitte-Rand-Verdunklung verzichtet werden, und es wird $D = 1$ gesetzt.

Der größere Bereich der Winkelintegration in (10) für den Streuterm gegenüber dem direkten Term wird mittels der Skalierung

$$\frac{\int_0^1 d\mu\mu}{\int_{\mu_*}^1 d\mu\mu} = \left(\frac{r}{r_*}\right)^2 \tag{4.37}$$

behandelt. Für die optisch dünne Quellfunktion ist dann

$$\lim_{r\to r_* \text{ bzw. } \infty} \frac{S_L(r)}{I_*}\left(\frac{r}{r_*}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ bzw. } \frac{1}{4} \ . \tag{4.38}$$

In der Photosphäre ist der frequenzintegrierte Fluß, ohne Mitte-Rand-Verdunklung, $H_* = \frac{1}{2} I_* \int_{\mu_*=0}^1 d\mu\,\mu = \frac{1}{4} I_*$. Die Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$ ist analog zum Stefan-Boltzmannschen Gesetz für den Gesamtfluß definiert, $F_* = 4\pi H_* = \sigma T_{\rm eff}^4$, also $I_* = \sigma T_{\rm eff}^4/\pi$.

Die Winkelintegration (nur über die Sternscheibe) kann noch weiter vereinfacht werden durch die Substitution $\mu \to y = (p/r_*)^2$ (Owocki, 1990), mit dem Impaktparameter p. Man erhält

$$\int_{\mu_*}^1 d\mu\,\mu\, f(\mu) = \int_0^1 dy\, f(\mu_y). \tag{4.39}$$

Dies gibt endlich für die Strahlungsbeschleunigung

$$g_{\rm tot}(r) \approx \frac{\sigma T_{\rm eff}^4}{c}\Gamma(\alpha)\left(\frac{\kappa_0 v_{\rm th}}{c}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{v_{\rm th}}{c}\right)^{\alpha}\left(\frac{r_*}{r}\right)^2 \int_0^1 dy \Bigg\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi\left(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\right) \eta_+^{-\alpha}(r,\mu,x)$$
$$+ \frac{S_L(r)}{I_*}\left(\frac{r}{r_*}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi\left(x - \frac{\mu v(r)}{v_{\rm th}}\right)\left[\eta_-^{-\alpha}(r,\mu,x) - \eta_+^{-\alpha}(r,\mu,x)\right]\Bigg\}.$$

$$\tag{4.40}$$

Hierin wurde der *cutoff* κ_m^{-1} und das photosphärische Profil in die $\eta_\pm$ gesteckt,

$$\begin{aligned} \eta_+(r,\mu,x) &\equiv \eta(r,\mu,x) - \eta_0 + \kappa_m^{-1} + \sigma_e^{-1}\phi(x), \\ \eta_-(r,\mu,x) &\equiv \eta_m - \eta(r,\mu,x) + \kappa_m^{-1} \end{aligned} \ . \tag{4.41}$$

Die etwas umständliche Schreibweise des Vorfaktors in (40) rührt daher, daß $\kappa_0 v_{\rm th}$ *unabhängig* von $v_{\rm th}$ ist, siehe CAK und Owocki et al. (1988).
Es verbleibt noch, eine Randbedingung für einwärts propagierende Photonen am äußeren Rand des Rechenbereiches anzugeben.

4.9 Randbedingung an η_-

Am äußeren Rand $r_{\rm max} < \infty$ des Rechenbereiches muß das einwärts gerichtete, diffuse Strahlungsfeld spezifiziert werden. Da die Quellfunktion als bekannt angenommen wird, muß somit eine Randbedingung für η_- angegeben werden: Würde man η_- am Rand z. B. auf den Wert 0 setzen, würde es zu einer starken Asymmetrie der η_+ und η_- Terme in der Beschleunigung aufgrund des diffusen Strahlungsfeldes kommen: Innerhalb ungefähr einer Sobolevlänge L_S vom rechten Rand (dabei ist zu beachten, daß der numerische Gitterabstand *kleiner* als die Sobolevlänge ist) kann (der lokale Zuwachs der) η_- nicht berechnet werden, dies aufgrund des unbekannten Einflusses von Material außerhalb des Randes. Jedoch ist für Orte $r < r_{\rm max} - L_S$ Material außerhalb des Randes nicht mehr in Resonanz mit inliegendem Material, d. h. η_- *kann* berechnet werden. Diese Betrachtung ist nur gültig in einem monotonen Geschwindigkeitsfeld, in dem die η überall konstant sind, außer in genau *einer* Resonanzzone. Eine Einbeziehung der nichtmonotonen Natur von $v(r)$ in die Randbedingung würde jedoch die Verwendung einer Vielzahl *unbekannter* Eigenschaften des Strömungsbildes nötig machen, z. B. die Anzahl von Resonanzorten außerhalb des Randes, den dortigen Geschwindigkeitssprüngen an Schocks usw. Daher scheint dieses Vorgehen mindestens so fraglich wie die hier getroffene rein *lokale* Festlegung der Randbedingung.
Eine mögliche Festlegung von η_- wäre, daß die Beschleunigung aufgrund des diffusen Strahlungsfeldes am Rand verschwinden soll. Dies wäre auch die physikalisch *richtige* Randbedingung, falls die Strömung am Rand hinreichend glatt ist (genauer: über Längenskalen $\geq L_S$ hinweg). Der diffuse Anteil zur Beschleunigung verschwindet in der Sobolevnäherung aufgrund von (kein κ_m^{-1} und $\sigma_e^{-1}\phi(x)$)

$$\begin{aligned} \eta_+(r,\mu,x) &= \eta_{\rm tot}(r,\mu)\Phi(x), \\ \eta_-(r,\mu,x) &= \eta_{\rm tot}(r,\mu)[1-\Phi(x)], \end{aligned} \tag{4.42}$$

mit $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx'\phi(x')$ und der gesamten Dicke $\eta_{\rm tot}$ der Resonanzzone. Entsprechend wird angesetzt (die Funktion Θ wird weiter unten erklärt),

$$\eta_-(r_{\rm max},\mu,x) = \left[\eta_{\rm tot}(r_{\rm max},\mu) - \eta_+(r_{\rm max},\mu,x)\right]\,\Theta(r_{\rm max},\mu,x). \tag{4.43}$$

Da der rechte Rand der Zone außerhalb des Rechenbereichs liegt, ist $\eta_{\rm tot}$ nicht bekannt. Man kann jedoch als gute Approximation verwenden

$$\eta_{\rm tot}(r_{\rm max}) \approx \eta_+(r_{\rm max}, \mu, x = \frac{\mu v}{v_{\rm th}} - n), \tag{4.44}$$

mit z. B. $n = +3$ in einem monoton *wachsenden* Geschwindigkeitsfeld, denn bezüglich dieser Frequenz x ist bei $r_{\rm max}$ bereits das Ende der Resonanzzone erreicht.
Die Funktion Θ in (43) stellt sicher, daß nur die η_- zu Frequenzen x, bei denen das Material am Rand absorbieren/streuen kann, auf den Wert $\eta_{\rm tot} - \eta_+$ gesetzt werden. Ansonsten würde die diffuse Beschleunigung nicht nur am Rand festgelegt, sondern im *ganzen* Wind willkürlich beeinflußt werden! Beispielsweise kann man ansetzen,

$$\Theta(r_{\rm max}, \mu, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \phi(x - \frac{\mu v(r_{\rm max})}{v_{\rm th}}) > \epsilon \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4.45}$$

wobei ϵ ein vorzugebender Wert für die Profilfunktion ist, unterhalb dessen man das Material bei $(r_{\rm max}, \mu, x)$ nicht mehr als absorbierend ansieht, z. B. $\epsilon = \phi(3)$.

Eine andere Randbedingung wurde von Owocki (1990) angegeben, nämlich

$$\eta_-(r_{\rm max}, \mu, x) = r_{\rm max}\ \rho(r_{\rm max})\ \phi(r_{\rm max}, \mu, x). \tag{4.46}$$

Dies erhält man in einem *stationären* Wind durch Integration von $r_{\rm max}$ bis ∞ unter der Annahme, daß die Geschwindigkeit für alle Orte $r \geq r_{\rm max}$ *konstant* ist. Wir wollen das Verhältnis

$$a = g_{\rm tot,Rand}/g_{\rm tot,innen} \tag{4.47}$$

abschätzen, wobei $g_{\rm tot,Rand}$ die Gesamtbeschleunigung bei $r_{\rm max}$ unter Verwendung der Randbedingung (46) ist und $g_{\rm tot,innen}$ die Beschleunigung, wenn $r_{\rm max}$ ein *innerer* Punkt wäre. Hierzu sei angenommen, daß $r_{\rm max}$ so weit außen liegt, daß $\mu \approx 1$ gesetzt werden kann (in der Winkelintegration werden nur Strahlen betrachtet, die den Stern treffen). Damit ist das Verhältnis der optisch dünnen diffusen zur direkten Beschleunigung unter Verwendung der *optisch dünnen Quellfunktion* gerade 1/4, siehe den vorherigen Abschnitt. Weiterhin nehmen wir an, daß der *echte* diffuse Anteil zur Strahlungsbeschleunigung bei $r_{\rm max}$ ungefähr 0 ist, was für hinreichend glatte Strömungsbereiche erfüllt ist. Da nun η_+ im steilen Geschwindigkeitsfeld mit nur vereinzelten Resonanzzonen berechnet wurde, η_- jedoch unter der Annahme eines verschwindenden Geschwindigkeitsgradienten, so daß (bzgl. der Resonanzfrequenz X bei $r_{\rm max}$) *alles* Material bei $r > r_{\rm max}$ absorbieren kann, wird für Frequenzen $x \approx X$ (und nur auf diese kommt es aufgrund der Gewichtung mit der Profilfunktion an) gelten, daß $\eta_- \gg \eta_+$, und damit

$$a \approx \frac{3}{4}. \tag{4.48}$$

Verlaufen daher die hydrodynamischen Größen in Nähe des Randes hinreichend glatt, so wird bei Verwendung der Owockischen Randbedingung innerhalb einer Sobolevlänge am Rand die Gesamtstrahlungsbeschleunigung um $\approx 25\%$ abfallen.

4.10 Nichtisotherme Winde

Durch die hydrodynamische Instabilität der Linienstrahlungsbeschleunigung sollte es zu einem starken Anwachsen von Störungen in den Winden von OB-Sternen kommen, die schließlich z. B. zu starken Schocks führen können. Aus Analysen von Röntgenbeobachtungen von OB-Sternen (siehe Hillier et al., 1993) ist bekannt, daß Temperaturen bis zu einigen 10^6 K in deren Winden auftreten können (bzgl. der (Un-)Möglichkeit einer Korona in Photosphärennähe siehe Abschnitt 7.5), es also zu Temperaturerhöhungen um einen Faktor 100 gegenüber der Effektivtemperatur des Sterns (die zugleich auch die typische Temperatur eines *stationären* Windes ist) kommt. Damit ist sicherlich die bisher getroffene Voraussetzung konstanter Anregungs- und Ionisationsverhältnisse im Wind verletzt. Die unmittelbare Auswirkung solcher Hochtemperaturbereiche ist die Ionisation der windtreibenden Metalle zu höheren Ionisationsstufen. Die Zahl der Linien in der Umgebung des Flußmaximums des Sterns ist, oberhalb einer bestimmten cutoff-Temperatur, eine stark abfallende Funktion der Temperatur: Je höher der Ionisationsgrad eines Elementes, desto weniger wird die Kernladung abgeschirmt, und desto größer werden die Anregungsenergien. In den heißen *postshock* Bereichen können die Elemente C, N und O sogar *vollständig* ionsiert sein und geben somit keinen Beitrag zur Kraft.
Insgesamt wird die Kraft auf heißes Material nur noch (sehr) klein sein. Es handelt sich hierbei jedoch nicht nur um einen lokalen Effekt, sondern indem heißes Material für die Sternstrahlung transparent geworden ist, wird die photosphärische Einstrahlung auf weiter außen liegendes kaltes Material, und damit die Strahlungsbeschleunigung dort, anwachsen.

Für die Formulierung der temperaturabhängigen Strahlungsbeschleunigung ist die Frequenzverschiebung in Dopplereinheiten x bzgl. der *lokalen* thermischen Geschwindigkeit am Ort r *keine* geeignete Frequenzvariable. Nur im *isothermen* Wind ist in der Berechnung der optischen Tiefe, entlang eines p-Strahls, mit der Frequenz ν auch x konstant. Im nichtisothermen Wind ist

$$x = \frac{\nu - \nu_L}{\nu_L}\frac{c}{v_{\rm th}} = \frac{\nu - \nu_L}{\nu_L}\frac{c}{\hat{v}_{\rm th}}\frac{\hat{v}_{\rm th}}{v_{\rm th}} = \hat{x}\,\frac{\hat{v}_{\rm th}}{v_{\rm th}}, \tag{4.49}$$

mit der Frequenzverschiebung $\hat{x}$ im *isothermen* Wind (speziell: bei $T_{\rm eff}$). Im folgenden beziehen sich alle Größen mit einem „Dach" auf den isothermen Wind. $\hat{x}$ *ist* eine geeignete Frequenzvariable. (Anstelle von $\hat{x}$ kann (und wird im folgenden teilweise) auch die Frequenz ν verwendet werden, denn ν ist die wirklich fundamentale Größe. ν hat jedoch den Nachteil, in der Profilfunktion in der *expliziten* Kombination $\nu - \nu_L$ aufzutreten, womit die Integration über die Frequenzen ν_L aller Linien nicht mehr wie in Glg. (17) trivial ausführbar ist. In x dagegen tritt *keine explizite* Referenz zur Linienfrequenz mehr auf.)

Die Verallgemeinerung der Strahlungsbeschleunigung geschieht in mehreren Schritten.

a) Die normierte Profilfunktion φ mit der Frequenz ν als Argument ist definiert durch

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi(x) = \int_{0}^{\infty} d\nu\, \varphi(\nu - \nu_L). \tag{4.50}$$

Mit $x = (\nu - \nu_L)/\Delta\nu_D$ ergibt sich

$$\phi(x_\nu) \equiv \Delta\nu_D\, \varphi(\nu - \nu_L). \tag{4.51}$$

$\Delta\nu_D^{-1}$ in der Linienopazität stammt also allein von der Verwendung der Frequenzeinheit x und verschwindet, wenn man den Übergang $x \to \nu, \phi \to \varphi$ macht. Der physikalische Grund hierfür ist, daß man nach Integration von $\chi_L(r,\nu)$ über alle *Frequenzen* ν gerade den gesamten Streukoeffizient erhalten muß,

$$\chi_{\rm tot}(r) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} n_l(r). \tag{4.52}$$

Im isothermen Wind wurde die Besetzungszahldichte im unteren Zustand angesetzt als

$$n_l(r) = A\,\rho(r), \tag{4.53}$$

mit einer Konstanten A. Im nichtisothermen Wind soll die Temperaturabhängigkeit der Ionisations- und Anregungsverhältnisse (dies setzt *stationäres* statistisches Gleichgewicht voraus, ansonsten besteht eine Abhängigkeit von der gesamten „durchlaufenen Gashistorie", siehe Abschnitt 8.3) durch eine Funktion F beschrieben werden,

$$n_l(r) = A\,F(T(r))\,\rho(r), \tag{4.54}$$

wobei $\hat{F} = F(T_{\rm eff}) = 1$ ist. Mit $\hat{x}$ als Frequenzeinheit ist die Linienopazität

$$\begin{aligned}\chi_L(r,\hat{x}) &= \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu}\, A\, F(T(r))\,\rho(r)\,\frac{\phi(\hat{x})}{\hat{\Delta}\nu_D} \\ &= \hat{\kappa}\, F(T(r))\,\rho(r)\,\phi(\hat{x}),\end{aligned} \tag{4.55}$$

wobei das *konstante* $\hat{\kappa}$ (wir verzichten auf den Index „L") identisch mit κ aus Glg. (12) ist.

b) Material am Ort r kann Strahlung der Frequenz ν in der Linie ν_L absorbieren, wenn

$$\nu - \left(1 + \frac{\mu v(r)}{c}\right)\nu_L = 0 \tag{4.56}$$

ist. Bzgl. der Frequenzeinheit $\hat{x}$ lautet diese Resonanzbedingung

$$\hat{x} - \frac{\mu v(r)}{\hat{v}_{\rm th}} = 0. \tag{4.57}$$

c) Die Beschleunigung in einer Linie aufgrund von Absorption von Strahlung aus dem Frequenzintervall $d\nu$ ist

$$g \sim \frac{\chi}{\rho} H_\nu d\nu = \hat{\kappa}\, F(T(r))\,\phi\left(\hat{x} - \frac{\mu v}{\hat{v}_{\rm th}}\right) H_{\hat{x}}\, \hat{\Delta}\nu_D\, d\hat{x}. \tag{4.58}$$

Der Vorfaktor der Beschleunigung ist also unabhängig von $\hat{v}_{\rm th}$, weil $\hat{\kappa} \sim \hat{\Delta}\nu_D^{-1} \sim \hat{v}_{\rm th}^{-1}$.

d) Die optische Tiefe als Funktion von $\hat{x}$ ist

$$\tau(r,\mu,\hat{x}) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\mu'} \chi(r',\hat{x}) = \hat{\kappa} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\mu'} F(T(r'))\rho(r')\phi\left(\hat{x} - \frac{\mu' v(r')}{\hat{v}_{\rm th}}\right). \tag{4.59}$$

e) In der Integration über die Linienverteilung muß schließlich ersetzt werden

$$\int d\kappa N(\kappa) \to \int d\hat{\kappa} N(\hat{\kappa}). \tag{4.60}$$

Damit ist die temperaturabhängige Strahlungsbeschleunigung

$$\begin{aligned} g_{\rm tot}(r) &= \int_0^\infty d\hat{\kappa}\, \frac{1}{\kappa_0} \left(\frac{\kappa_0}{\hat{\kappa}}\right)^{2-\alpha} g_{\hat{\kappa}}(r), \\ g_{\hat{\kappa}}(r) &= \frac{4\pi}{c^2} \hat{v}_{\rm th} \hat{\kappa} F(T(r)) \left(\bar{H}_{\hat{\kappa}}^{\rm dir}(r) + \bar{H}_{\hat{\kappa}}^{\rm diff}(r)\right), \\ \bar{H}_{\hat{\kappa}}^{\rm dir}(r) &= \frac{I_*}{2} \int_0^1 d\mu \mu D(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x}\, l(\hat{x})\, \phi\left(\hat{x} - \frac{\mu v(r)}{\hat{v}_{\rm th}}\right) e^{-[\tau_{\hat{\kappa}}(r,\mu,\hat{x}) - \tau_0]}, \\ \tau_{\hat{\kappa}}(r,\mu,\hat{x}) &= \hat{\kappa} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\mu'} F(T(r'))\rho(r')\phi\left(\hat{x} - \frac{\mu' v(r')}{\hat{v}_{\rm th}}\right). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Hier wurde auf den diffusen Fluß verzichtet, da er völlig entsprechend zum direkten Fluß behandelt wird. Die Integration über alle Frequenzen ν ist bereits durchgeführt, wieder unter der Annahme, daß die Linienverteilungsfunktion mit ν^{-1} geht. Die beiden am Anfang dieses Abschnitts genannten Effekte finden sich in dieser Strahlungsbeschleunigung wieder:

i) Die direkte Verminderung derselben aufgrund der wenigen windtreibenden Linien bei hohen Temperaturen steckt im Vorfaktor $F(T)$.
ii) Der nichtlokale Effekt aufgrund der Transparenz heißen Materials steckt in $F(T)$ in der Berechnung der optischen Tiefe.

Bemerkenswert ist, daß die Beschleunigung *nur* über die Funktion F von der Temperatur abhängt, jedoch *nicht* über $\hat{v}_{\rm th}$ und insbesondere auch nicht über das variable

$v_{\rm th}(r)$: Die *Verbreiterung* des Profils bei hohen Temperaturen geht nirgends ein. Der Grund hierfür ist, daß die Strahlungsbeschleunigung auch ohne irgendeine Referenz zu $v_{\rm th}$ formuliert werden kann, nämlich unter Verwendung von ν anstelle von x.

Die Funktion F selbst wird aus der von MacGregor et al. (1979) berechneten optisch *dünnen* Strahlungsbeschleunigung gewonnen. Die numerischen Ergebnisse von MacGregor et al. wurden von MacFarlane und Cassinelli (1989) für τ Sco (O9-Hauptreihenstern) durch den Ausdruck,

$$F(T) = \begin{cases} 1 & \text{für } T \le T_{\rm cut} \\ \exp(-T/T_0)\,/\,(3T/T_0) & \text{für } T > T_{\rm cut}\ , \end{cases} \tag{4.62}$$

approximiert, mit

$$\begin{aligned} T_{\rm cut} &= 7.4 \cdot 10^4 {\rm K}, \\ T_0 &= 2.8 \cdot 10^5 {\rm K}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Die numerischen Werte von MacGregor et al. (1979) für ζ Pup (O4-Überriese) können mit demselben analytischen Ausdruck approximiert werden, wobei dann

$$\begin{aligned} T_{\rm cut} &= 1.0 \cdot 10^5 {\rm K}, \\ T_0 &= 3.9 \cdot 10^5 {\rm K}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

ist.

4.11 Numerische Behandlung der Strahlungsbeschleunigung

Wir schließen mit einigen Bemerkungen zur numerischen Berechnung der Strahlungsbeschleunigung. Da diese Berechnung die zeitintensivste des ganzen Programms ist, kommt es auf eine optimale Formulierung an.
Zentral ist die Berechnung der $\eta = \tau/\kappa$. Gemäß der Symmetrierelation (25) brauchen die η_- für sterneinwärts laufende Photonen nicht neu berechnet zu werden, sondern ergeben sich direkt aus den η_+. Es wird daher, von $r_{\rm min}$ nach $r_{\rm max}$ gehend, der jeweilige Zuwachs $\Delta\eta_+$ über die Strecke dr/μ berechnet; bei $r_{\rm max}$ angekommen, können die Randbedingungen für η_- gesetzt werden (hierzu muß $\eta_+(r_{\rm max})$ bekannt sein); von $r_{\rm max}$ nach $r_{\rm min}$ zurückgehend wird $\Delta\eta_- = \Delta\eta_+$ verwendet.
Wichtig ist, daß der jeweilige Zuwachs $\Delta\eta_+$ nur für Frequenzen berechnet wird, bei denen Material am gerade betrachteten Radiuspunkt Strahlung absorbieren kann. Genauer wird $\Delta\eta_+$ nur in einem Frequenzbereich von $\approx \pm 3\Delta\nu_D$ um die *Resonanz*frequenz $x = \mu v(r)/v_{\rm th}$, also die Frequenz $\tilde{x} = 0$ im mitbewegten System, berechnet. (Diese Frequenzschleife sollte optimal vektorisiert sein.) Die Abbildung auf die Frequenzen im Ruhsystem (des Sterns) geschieht dadurch, daß zu einem *langen* Vektor der gesamten optischen Tiefen η mit allen Ruhsystem-Frequenzen der jeweilige Zuwachs $\Delta\eta$ addiert wird. Die Strahlungsbeschleunigung wird dann mittels dieses Vektors η berechnet. Andererseits wird der kurze Vektor $\Delta\eta$ (mitbewegtes System) als *Matrix* gespeichert, nämlich an jedem Radiuspunkt, da die $\Delta\eta_+$ bei der rückwärtigen Berechnung der η_- wieder verwendet werden.

5
Die Instabilität der Linienbeschleunigung

In diesem Kapitel soll die *lineare* Analyse der hydrodynamischen Instabilität der im vorigen Kapitel 4 dargestellten Strahlungsbeschleunigung behandelt werden. Diese Instabilität, erstmals beschrieben von Lucy & Solomon (1970), verstärkt primär Geschwindigkeitsstörungen δv im Wind.
Nach (Vor-)Arbeiten von MacGregor, Hartman & Cassinelli (1979), Carlberg (1980) und Abbott (1980) wurde diese lineare Stabilitätsanalyse, weitgehend analytisch, in einer Serie von Artikeln von Owocki & Rybicki (1984, 1985, 1986, 1991) sowie Rybicki, Owocki & Castor (1990) durchgeführt. Dieses Kapitel faßt insbesondere Aspekte der letzteren Arbeiten zusammen.
Die Formulierung der Linienbeschleunigung aus dem vorigen Kapitel 4 wird nur für die technischen Punkte des vorliegenden Kapitels benötigt. Die Erklärung der Instabilität und der meisten Ergebnisse bzgl. Wachstumsraten usw. setzt die Kenntnis von Kapitel 4 nicht voraus.

5.1 Mechanismus der Instabilität

Ioneninstabilität nach Milne (1926)

Erhält ein Ion in einer *statischen* Sternatmosphäre zusätzlich zu seiner thermischen Geschwindigkeit $v_{\rm th}$ eine Geschwindigkeitskomponente δv, die vom Stern weg gerichtet ist, so kann es aufgrund des Dopplereffekts blaueres Sternlicht absorbieren. War die thermische Bewegung dieses Ions selbst schon vom Stern weggerichtet, das Ion also im blauen Flügel der Linie, so erhält es nun *größere* stellare Einstrahlung und erfährt aufgrund des absorbierten Strahlungsflusses eine nach außen gerichtete *zusätzliche* Beschleunigung δg, die wiederum δv anwachsen läßt, siehe Abbildung 1. Auf diese Weise kann das Ion entlang dem blauen Flügel der Linie hinaufwandern und kinetische Energie gewinnen. Der *rote* Linienflügel zeigt *keine* solche Instabilität.
Dieser Beschleunigungsprozeß kann nur für *einzelne* Ionen eintreten: Erfährt eine große Zahl von Ionen mit statistisch verteilten = thermischen Geschwindigkeiten dieselbe zufällige Geschwindigkeitsstörung δv, so führt dies zu einer Verschiebung der ganzen Spektrallinie, und δg ist vernachlässigbar.
Außerdem sind beim Milneeffekt Teilchen*stöße* nicht berücksichtigt, welche die zusätzlich gewonnene Energie eines Teilchens schnell auf viele Teilchen umverteilen.

Windinstabilität nach Lucy und Solomon (1970)

Der entscheidende Unterschied der Windinstabilität zur Milneschen liegt im stark anwachsenden *Geschwindigkeitsfeld* des Windes – dieses wird insbesondere als *monoton*

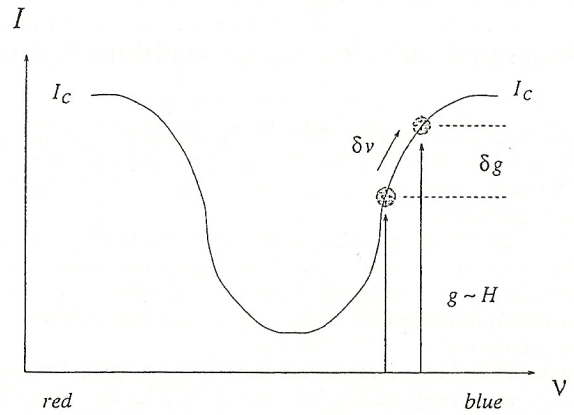


Abb. 5.1. Der Milneprozeß. Erklärung im Text.

wachsend angenommen. Es wird weiterhin reine *Absorption* der stellaren Photonen in der Spektrallinie angenommen (bezüglich reiner Streuung siehe unten).
Erhält ein *Teil* der Materie (es werden nicht mehr nur einzelne Ionen betrachtet) an einem Ort eine zusätzliche, stern*auswärts* gerichtete Geschwindigkeitskomponente, so sieht diese Materie aufgrund des Dopplereffekts einen größeren Photonenfluß vom Stern. Denn diese Materie kann blaueres Licht absorbieren als die gesamte langsamere Materie im Volumen bis r: Das Materieelement hat den Absorptions*schatten* des unterliegenden Materials verlassen und wird weiter sternauswärts beschleunigt. (Hierbei ist vorausgesetzt, daß der photosphärische Fluß über Frequenzen der Größenordnung $\nu_0 \delta v/c$ hinweg nicht sehr stark abfällt.) – Erhält stattdessen das Element eine stern*einwärts* gerichtete Geschwindigkeitskomponente, so kann es aufgrund des Dopplereffekts nur rötere Sternphotonen absorbieren, die jedoch schon von der weiter innen liegenden Materie absorbiert wurden, und die Strahlungsbeschleunigung des Elements sinkt, es wird weiter abgebremst.
Wie der Milneeffekt nur für einzelne Ionen auftritt, so die Windinstabilität nur für i) optisch dicke Linien $\tau_0 \gg 1$ mit Störungen, die ii) eine (viel) geringere optische Dicke haben: Ist die Linie selbst optisch dünn, dann gibt es keinen Absorptionsschatten und damit keine Instabilität. Erhält fast die gesamte Materie bei einer Geschwindigkeit v, die Photonen einer bestimmten Ruhefrequenz absorbieren kann (entsprechend einem „horizontalen Schnitt" im Geschwindigkeitsverlauf der Abb. 2), eine Geschwindigkeitskomponente δv, so gibt es kein Verlassen des Absorptionsschattens, sondern die Materie erfährt statt einer Kraft $\sim H_\nu$ dann lediglich die nahezu gleiche Kraft $\sim H_{\nu(1+\delta v/c)}$.
Abbildung 2 zeigt das Geschwindigkeitsfeld $v(r)$ mit dem thermischen Band $v(r) \pm v_{\rm th}$. Die Strahlungsbeschleunigung wächst beim Verlassen des Absorptionsschattens; gleich-

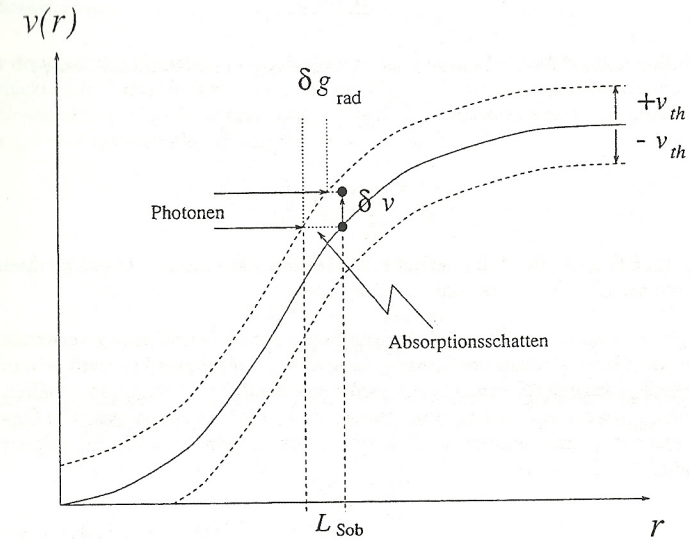


Abb. 5.2. Die Instabilität der Linienbeschleunigung im Geschwindigkeitsfeld eines Sternwinds. Erklärung im Text.

zeitig schattet das „aufgestiegene" Material weiter außen liegende Materie ab. Beide Effekte wurden zuerst unabhängig voneinander untersucht, der erstere von MacGregor et al. (1979) und Carlberg (1980), der zweite von Abbott (1980).

Ältere Resultate für die Wachstumsrate

MacGregor et al. (1979) und Carlberg (1980) nehmen an, daß die Störung optisch dünn ist, so daß die optische Tiefe τ_0 in der Linie durch sie nicht verändert wird. Die Wachstumsrate der Instabilität ist dann

$$\frac{\delta g}{\delta v} = A\,\omega_0 \tag{5.1}$$

mit

$$\omega_0 = \frac{g_{\rm thin}}{v_{\rm th}}, \tag{5.2}$$

und der Linienbeschleunigung auf eine optisch dünne Linie $\tau_0 \ll 1$,

$$g_{\rm thin} = \frac{H_\nu \Delta\nu_D \kappa_0}{c}, \tag{5.3}$$

siehe Abschnitt 4.1. Die *Konstante* A ist (für eine gegebene Profilfunktion ϕ)

$$A = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi'(x) e^{-\tau_0 \Phi(x)}, \tag{5.4}$$

mit

$$\Phi(x) = \int_x^{\infty} dx'\, \phi(x'). \tag{5.5}$$

Carlberg (1980) gibt für A numerische Werte, Owocki & Rybicki (1984) finden für $\tau_0 \gg 1$ eine analytische Abschätzung, siehe unten.

Abbott (1980) nimmt an, daß auch für die Störung Sobolevnäherung verwendet werden kann. Da hierzu Größen der Störung über eine Sobolevlänge konstant sein müssen, muß die Wellenlänge der Störung (viel) größer sein als diese. In der Sobolevnäherung ist die Strahlungsbeschleunigung in einer optisch dicke Linie proportional zum Geschwindigkeitsgradienten, und entsprechend findet Abbott für eine optisch dicke Störung der Wellenzahl k

$$\frac{\delta g}{\delta v} = ik\frac{\omega_0}{\chi_0}, \tag{5.6}$$

mit χ_0 die Linienopazität.
Da hier Beschleunigung und Geschwindigkeit 90^0 außer Phase sind (Faktor i), liegt im Abbottschen Fall (im Gegensatz zum Carlbergschen) kein instabiles Anwachsen vor, sondern eine Abänderung der Dispersionsrelation für Schallwellen im Wind (siehe Owocki & Rybicki, 1984); für diese Wellen ist die Bezeichnung „strahlungsakustische" Wellen üblich geworden.

5.2 Das „Bridging Law"

Eine lineare Stabilitätsanalyse der Strahlungsbeschleunigung, die die widersprüchlichen Ergebnisse von MacGregor et al. (1979) und Carlberg (1980) einerseits und Abbott (1980) andererseits als verschiede *Grenz*fälle *eines* instabilen Wachstumsgesetzes ergibt, wird von Owocki & Rybicki (1984) durchgeführt. Die Voraussetzungen hierbei sind (stichpunkthaft):
Punktstern (kein *finite cone* Effekt, keine Mitte-Rand-Verdunklung), planare 1-D Strömung, *reine Linienabsorption*, also keine Streuung, keine Kontinuumsabsorption, Sobolevnäherung *nur* für die zugrundeliegende stationäre Strömung, WKB Näherung (Gradienten in der Hauptströmung sind klein), isolierte Linie, also keine Linienüberlapp.
Die am meisten kritische Voraussetzung ist hierbei die einer reinen Absorptionslinie; der Fall einer reinen Streulinie wird in Owocki & Rybicki (1985) (s. u.) behandelt, wo auch die meisten anderen oben genannten Voraussetzungen aufgegeben werden.

Profilunabhängig

Unter der *weiteren* Voraussetzung, daß die Linie optisch dick ist, $\tau_0 \gg 1$, finden Owocki & Rybicki (1984) das *Bridging Law* für die Reaktion δg der Linienbeschleunigung auf eine Geschwindigkeitsstörung δv, das *unabhängig* vom gegebenen Linienprofil ist. Es lautet für eine sinusoidale Störung $\delta v(z) \sim \exp(ikz)$,

$$\frac{\delta g}{\delta v} \approx \omega_b \frac{ik}{\chi_b + ik}, \tag{5.7}$$

mit der *bridging length* λ_b und der Wachstumsrate ω_b,

$$\begin{aligned} \lambda_b^{-1} &= \chi_b = \chi_0 \phi(x_b), \\ \omega_b &= \omega_0 \phi(x_b). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Hierhin ist χ_0 die Linienopazität, ω_0 wurde oben definiert (Carlbergscher Fall).
Die *blaue* Frequenz x_b, an der ein stellares Photon zuerst in der Linie absorbiert wird, ist definiert durch

$$\Phi(x_b) = \frac{1}{\tau_0}, \tag{5.9}$$

wobei Φ ebenfalls oben definiert wurde.
(Das *Bridging Law* wird unabhängig vom Linien*profil*, indem man zu dimensionslosen Größen $(\delta g/\delta v)/\omega_b$ und $k\lambda_b$ übergeht.)
Für die Grenzfälle $k \to 0$ und $k \to \infty$ erhält man hieraus den Abbottschen und Carlbergschen Ausdruck für die Wachstumsrate.

Die beiden dem *Bridging Law* zugrundeliegenden physikalischen Effekte werden explizit, indem man zur Fouriertransformierten übergeht. Es ist dann (Owocki & Rybicki, 1984)

$$\delta g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, N(z - z')\, \delta v(z'), \tag{5.10}$$

mit dem Integralkern

$$N(z) = \omega_b \delta(z) - \omega_b \chi_b \Theta(z) \exp(-\chi_b z), \tag{5.11}$$

$\Theta(z)$ ist die Heavysidesche Sprungfunktion (= 1 für $z > 0$, sonst 0). Der erste Term in N beschreibt die direkte Instabilität aufgrund des Auftauchens des Materials aus dem Absorptionsschatten unterliegender Materie wegen der durch die Geschwindigkeitsstörung bedingten Dopplerverschiebung, und ω_b ist die Carlbergsche (dort numerisch bestimmte) Anwachsrate A. Der zweite *shadowing* Term beschreibt die *Abschattung* (für $\delta v > 0$; jedoch „Aufhellung" für $\delta v < 0$) weiter außen liegenden Materials (jedoch immer noch im blauen Linienflügel) durch die Störung bei z.

Die Größe, welche zwischen dem instabilen (Carlberg) und stabilen (Abbott) Grenzfall vermittelt, ist die *bridging length* λ_b, entsprechend der mittleren freien Weglänge eines im blauen Linienflügel absorbierten Photons. Im Wellenlängenbereich $\lambda \approx \lambda_b$ treten die interessantesten Effekte der Instabilität der Linienbeschleunigung auf (z. B. Ausbreitungsverhalten von Wellen, siehe unten).

Dopplerprofil

Für eine optisch dicke Linie mit einem Dopplerprofil $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ erhält man konkret für Wachstumsrate und *bridging length*

$$\begin{aligned} \omega_b &= 2x_b \frac{g_0}{v_{\rm th}}, \\ \lambda_b &= \frac{L}{2x_b}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

mit der blauen Absorptionsfrequenz

$$x_b \approx \sqrt{\ln \frac{\tau_0}{2\sqrt{\pi} x_b}} = O(1), \tag{5.13}$$

(die Abhängigkeit der rechten Seite von x_b ist schwach), worin die folgenden Größen des *ungestörten* = stationären Windes eingehen: die Sobolevsche optische Tiefe

$$\tau_0 = \chi_0 L, \tag{5.14}$$

mit Sobolevlänge

$$L = \frac{v_{\rm th}}{v_0'}, \tag{5.15}$$

und die Linienbeschleunigung

$$g_0 = g_{\rm thin} \frac{1 - e^{-\tau_0}}{\tau_0} \to \begin{cases} g_{\rm thin} & \text{für } \tau_0 \ll 1, \\ g_{\rm thin}/\tau_0 & \text{für } \tau_0 \gg 1. \end{cases} \tag{5.16}$$

Insbesondere gilt für $x_b = 1$ (was für $\tau_0 \approx 10$ sehr gut erfüllt ist)

$$\lambda_b = \frac{L}{2}. \tag{5.17}$$

Ist die Linie stark gesättigt, dann findet die Absorption der Photonen im *Lorentz*flügel statt. Da dieser einem Potenzgesetz folgt, ist der Gradient im Flügel kleiner als beim Dopplerprofil, entsprechend ist die Wachstumsrate kleiner, die *bridging length* größer.

CAK Linienensemble

Für ein CAKsches Ensemble (siehe Abschnitt 4.4) von optisch dünnen und dicken Linien mit Doppler-Profilfunktion erhalten Owocki & Rybicki (1984) für Wachstumsrate Ω und *bridging length* Λ

$$\begin{aligned} \Omega &= P \frac{\alpha G_0}{v_{\rm th}}, \\ \Lambda &= P^{-1} L, \end{aligned} \tag{5.18}$$

mit

$$P = \sqrt{\frac{2\, d^{\alpha - \frac{1}{2}}}{1 - \alpha}}, \tag{5.19}$$

und die Konstante d wird numerisch zu $d = 1,6$ bestimmt. Die CAK-Beschleunigung des stationären Windes ist (siehe Abschnitt 3.5)

$$G_0 = \frac{\sigma F}{c} k t^{-\alpha}. \tag{5.20}$$

Für $\alpha = 1/2$ ist dann wieder

$$\Lambda = \frac{L}{2}, \tag{5.21}$$

die *bridging length* ist also durch die optisch dicken Linien allein bestimmt (vgl. oben). Für den empirisch realistischen Wert $\alpha = 0,7$ ist $\Lambda = \frac{L}{2,7}$.

Für einen CAKschen Punktstern mit $\alpha = 1/2$ und unter Vernachlässigung der Druckkräfte finden Owocki & Rybicki (1984) weiter

$$\Omega = \frac{2\, v_0}{L}, \tag{5.22}$$

die Anwachszeit Ω^{-1} der Instabilität ist also gerade die Zeit, die ein Windteilchen zum Durchqueren einer halben Sobolevlänge braucht, und ist somit um bis zu einem Faktor 100 kürzer als die typische Strömungszeit R_*/v_0. Die Instabilität ist daher extrem stark und wird über dynamische Längenskalen (R_*) hinweg sicher in den *nichtlinearen* Bereich hinein anwachsen.

5.3 Einfluß der Streuung: der „Line Drag“ Effekt

Nahe am Stern kann bei reiner Streuung (anstelle der bisherigen reinen Absorption) die Instabilität der Linienbeschleunigung vollständig aufgehoben werden (Lucy, 1984)! Dies ist für ein Rechteckprofil in Abbildung 3 veranschaulicht. Erfährt ein Teilchen eine auswärtige Geschwindigkeitsstörung, so kompensiert der Zuwachs des *ein*wärtigen diffusen Flusses (aufgrund der Dopplerverschiebung des Teilchens) gerade den Zuwachs des stellaren *aus*wärtigen Flusses.
Dies ist ein Effekt des *Haupt*streufeldes auf eine *kleine* Störung und ist im folgenden zu unterscheiden von Einflüssen des *gestörten* Streufeldes (aufgrund der Störung).

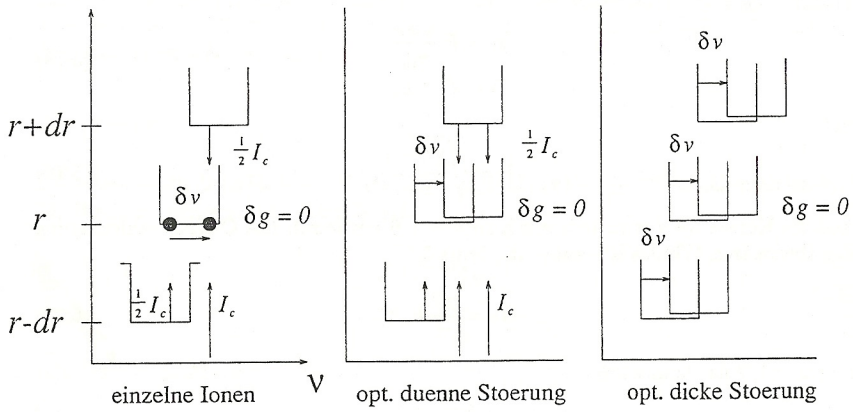


Abb. 5.3. Lucys *Line Drag* Effekt für ein Rechteckprofil.

Die Voraussetzungen bei der Herleitung dieses *Line Drag* Effekts sind: 1. Man ist so nahe der Sternoberfläche, daß der Stern noch einen vollen Halbraum einnimmt; 2. die photosphärische Intensität ist nicht winkelabhängig (keine Mitte-Rand-Verdunklung); 3. die photosphärische Intensität I_* ist über die Linie hinweg konstant. Hiermit ist (*complete redistribution* angenommen)

$$S = \bar{J} = \frac{I_*}{2} \int_{-1}^{1} d\mu D(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) \equiv W_* I_* = \frac{I_*}{2}, \tag{5.23}$$

mit denselben Bezeichnungen wie in Kapitel 4. $S/I_* = 1/2$ ist gerade die marginale Stabilitätsgrenze, wie man auch anhand von Abbildung 3 erkennt.
Da in der SSF-Strahlungsbeschleunigung (siehe (4.40)) aufgrund der approximativen Behandlung des Winkelintegrals das Verhältnis von diffusem zu direktem Fluß sich mit $(S/I_*)(r/R_*)^2$ skaliert, ist für *diese* Strahlungsbeschleunigung die Stabilitätsgrenze an *beliebigen* Orten im Wind durch

$$\frac{S}{I_*} \frac{r^2}{R_*^2} = \frac{1}{2} \tag{5.24}$$

definiert (Owocki, 1992, Puls, Owocki & Fullerton, 1993). Wir kommen hierauf in Kapitel 6 bei den numerischen Windmodellen zurück.
Es gibt zwei weitere wesentliche Voraussetzungen, damit es zu einer exakten Aufhebung der Instabilität kommt. 1. Da die betrachtete Linie optisch dick ist, ist das diffuse

Strahlungsfeld durch lokale Bedingungen bestimmt. Damit an einem Ort der auswärtige diffuse Fluß (von weiter innen liegendem Material) und der einwärtige diffuse Fluß (von außen liegendem Material) *gleich* sind, muß der diffuse Fluß über den Wechselwirkungsbereich der Linie = Sobolevlänge hinweg konstant sein – was durch die Voraussetzung der Gültigkeit der *Sobolevnäherung* für die Hauptströmung gewährleistet ist. 2. Weiterhin muß dann die *Störung* optisch *dünn* sein, um dieses Strahlungsfeld nicht zu beeinflussen.
Die konträr erscheinenden Forderungen nach i) Sternnähe und ii) Gültigkeit der Sobolevnäherung können im steilen Geschwindigkeitsfeld von OB-Überriesen gleichzeitig gut erfüllt sein.
Eine allgemeine lineare Analyse der Instabilität bei reiner Streuung im sphärisch symmetrischen Fall wurde von Owocki & Rybicki (1985) durchgeführt, insbesondere unter Verzicht der Annahme optisch dünner Störungen, d. h. auch das *gestörte* Streufeld wird berechnet. Für optisch dünne, kurzwellige Störungen ergibt sich marginale Stabilität an der Sternoberfläche, jedoch hat die Wachstumsrate bei einem Sternradius über der Oberfläche bereits wieder den halben Carlbergschen Wert erreicht und konvergiert für große Sternradien gegen 80 % dieses Wertes: Die Streuung kann den Wind nur in Photosphärennähe stabilisieren.

Line Drag Effekt in der SSF

Wir wollen zeigen (Owocki, 1990, 1992), daß sich der *Line Drag* Effekt auch aus der *Smooth Source Function* Formulierung der Linienstrahlungsbeschleunigung (siehe Kapitel 4) ergibt.
Gleichung (4.36) für den diffusen Fluß in SSF-Näherung ist im monotonen Wind und unter den in Kapitel 4 getroffenen Voraussetzungen *exakt* bis auf die Vernachlässigung von Gradienten der Quellfunktion. In der Entwicklung der Linienkaft (4.10) (absorptiver + diffusiver Anteil) nach den Gradienten von ρ und dv/dr findet man den *Line Drag* als Effekt 0. Ordnung, also unter Mitnahme nur von ρ und dv/dr selbst.
Der äußere Rand $r_{\max}$ wird ins Unendliche gelegt, und als Randbedingungen werden verwendet

$$\begin{aligned} \tau_+(x, \mu, r_{\min}) &= 0, \\ \tau_-(x, \mu, r_{\max}) &= 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Es ist nach (4.25)

$$\tau_+(x, \mu, r) + \tau_-(x, \mu, r) = \tau_+(x, \mu, r_{\max}) \equiv \tau_\mu, \tag{5.26}$$

also

$$\tau_-(x, \mu, r) = \tau_\mu - \tau_+(x, \mu, r). \tag{5.27}$$

Sehr nahe am Stern ist $\mu_* = 0$ und $S = I_*/2$. Wir nehmen eine optisch dünne Störung an, so daß die Änderung in der optischen Tiefe aufgrund dieser Störung $\delta\tau_\pm = 0$ ist. Dann ist die Änderung des Gesamtflusses (direkter Term + Streuterm) aufgrund der

Störung

$$\frac{\delta H_{\rm tot}}{\delta v} = \frac{I_*}{4}\int_0^1 d\mu\,\mu\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\delta}{\delta v}\phi(x-\mu v(r)/v_{\rm th})\left(e^{-\tau_+(x,\mu,r)}+e^{-\tau_-(x,\mu,r)}\right)$$
$$= -\frac{I_*}{4v_{\rm th}}\int_0^1 d\mu\,\mu^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi'(x-\mu v(r)/v_{\rm th})\left(e^{-\tau_+(x,\mu,r)}+e^{\tau_+(x,\mu,r)-\tau_\mu}\right). \tag{5.28}$$

Unter Verwendung der Sobolevnäherung ist

$$\tau_+(\tilde{x},\mu,r) = \frac{\tau_0}{1+\sigma\mu^2}\int_{\tilde{x}}^{\infty}\phi(x')dx' = \tau_\mu\,\Phi(\tilde{x}), \tag{5.29}$$

mit $\tilde{x} = x - \mu v/v_{\rm th}$ die Frequenz im mitbewegten System, und $\tau_0 = \kappa\rho r v_{\rm th}/v$, siehe z.B. Castor (1970) und (1974). Es ist $\Phi(x) = 1-\Phi(-x)$, und damit

$$\frac{\delta H_{\rm tot}}{\delta v} = \cdots\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}\,\phi'(\tilde{x})\left(e^{-\tau_\mu\Phi(\tilde{x})}+e^{-\tau_\mu\Phi(-\tilde{x})}\right) = 0, \tag{5.30}$$

da $\phi'(x)$ antisymmetrisch ist, der Ausdruck in Klammern jedoch symmetrisch. ■

Abbildung 4 zeigt δv und die damit verbundene Beschleunigungsänderung δg für reine Absorption und für die SSF Formulierung des diffusen Strahlungsfeldes in einem stationären CAK/PPK-Wind.

5.4 Dispersionsrelationen

Verwendet man die $\delta g/\delta v$-Beziehungen (*Bridging Law* sowie entsprechende Erweiterungen auf den Streufall aus Owocki & Rybicki, 1985) aus der linearen Stabilitätsanalyse in den linearisierten hydrodynamischen Gleichungen, so findet man Dispersionsrelationen für strahlungsakustische Wellen im Wind. Der Imaginärteil beschreibt die Anwachsraten, der Realteil das Ausbreitungsverhalten dieser Wellen.
Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit einigen Stichworten zu Ergebnissen aus Owocki & Rybicki (1984, 1985) begnügen.

Ein- und auswärtige Wachstumsraten

Für reine Photon*absorption* ergeben sich *größere* Anwachsraten für einwärtslaufende sinusoidale Wellen (also negative *Phasen*geschwindigkeiten) als für auswärts laufende (Owocki & Rybicki, 1984). Dies erklärt, warum im voll entwickelten Wind die *reverse* Schocks viel stärker sind als die *forward* Schocks, siehe nächstes Kapitel.

Gruppengeschwindigkeit und Phasenumkehr

Es kommt zu einigen subtilen Effekten im Ausbreitungsverhalten für Wellen mit Wellenlänge im Bereich der *bridging length*:

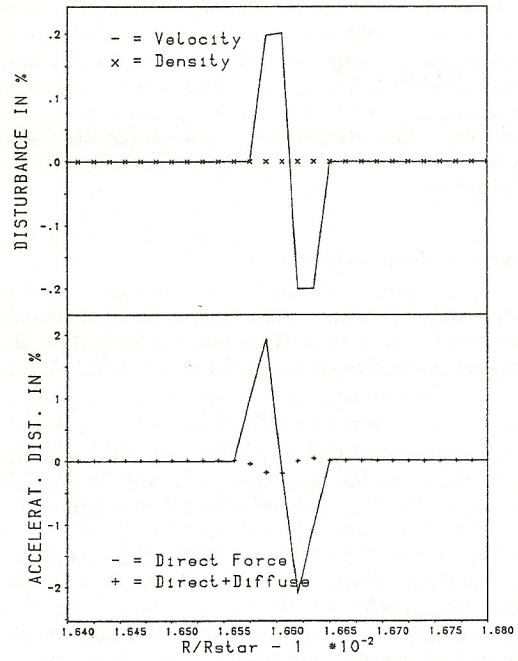


Abb. 5.4. Instabilität bei reiner Linienabsorption; marginale Stabilität bei reiner Streuung aufgrund des *Line Drag* Effekts.

1. Bei reiner Linien*absorption* kann es bezüglich einlaufender sinusoidaler Wellen, d. h. negativer *Phasen*geschwindigkeiten, zu einem Vorzeichenwechsel der *Gruppen*geschwindigkeit kommen, so daß diese positiv = auswärtig werden kann.
2. Bei reiner Streuung kann es zu einem Vorzeichenwechsel der Phasengeschwindigkeit (als Funktion der Wellenlänge) kommen, dies für ein- *und* auswärtige Wellen. Sinusoidale Wellen, die bei reiner Absorption einwärts laufen, laufen bei Streuung eventuell auswärts.

Puls (1993, mündl. Mitteilung) wies darauf hin, daß damit die entwickelte Windstruktur (mit *reverse* und *forward* Schocks) empfindlich von der Streuung im strukturierten Wind abhängen könnte – die jedoch im Rahmen der SSF nur approximativ behandelt wird. Die Hauptschwierigkeit ist hierbei, daß die komplizierten Ausbreitungseffekte der Wellen im Wind hauptsächlich durch das *gestörte* diffuse Strahlungsfeld verursacht werden, das wahrscheinlich nur durch einen vollständigen Strahlungstransport (!) zu

gewinnen ist (die Wachstumsraten dagegen sind nahezu allein durch das diffuse Strahlungsfeld des zugrundeliegenden *stationären* Winds bestimmt).

5.5 Signalausbreitung im Sternwind

In einem außergewöhnlichen Artikel untersuchen Owocki & Rybicki (1986) die Ausbreitung von *Signalen* oder *Informationen* im instabilen Wind. Es wird nur der reine Absorptionslinienfall betrachtet.

Greensfunktion vs. langwellige Dispersionsrelation

Aus der Greensfunktion $G(z,t)$ zu (10) (d. i. die Fouriertransformierte bzgl. k und ω der inversen Dispersionsrelation $D^{-1}(k,\omega)$ des *Bridging Law* (7)) finden Owocki & Rybicki (1986) die *maximale* einwärtige *Signal*geschwindigkeit in einem reinen Absorptionswind zu

$$v_{\mathrm{sig,in,max}} = a, \tag{5.31}$$

mit Schallgeschwindigkeit a! (Hierzu muß die Greensfunktion selbst nicht bekannt sein; die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals s kann aus $G * s = 0$ gewonnen werden: An die entsprechenden Orte ist, zu einer gegebenen Zeit, noch kein Signal gelangt.)

In einem instabilen Medium müssen Gruppen- und Signalgeschwindigkeit *nicht* übereinstimmen (siehe Bers, 1983). Im Wind tritt in diesem Zusammenhang folgendes Paradoxon auf (Owocki & Rybicki, 1986):
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einwärtiger *langwelliger* Störungen $\lambda \gg L$, für die Sobolevnäherung anwendbar ist, ist (Abbott, 1980)

$$v_{\mathrm{group,in}} = -\frac{v}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{v^2}{4}}, \tag{5.32}$$

was (viel) größer als die Schallgeschwindigkeit ist. Erzeugt man nun ein Signal, bestehend nur aus langen Wellenzügen $\lambda \gg L$, so ist dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_{\mathrm{group,in}}$, im Widerspruch zur maximalen Signalgeschwindigkeit a.

Auflösung des Paradoxons

Dieses Paradoxon wird aufgelöst durch die Feststellung (Owocki & Rybicki, 1986), daß in einem *völlig glatten* und damit *analytischen* Signal (welches im obigen Beispiel gerade verwendet wird) Information *nicht lokalisiert* ist: Aus der Kenntnis eines solchen Signals in einer (beliebig kleinen) *Umgebung* kann das Signal an *jedem* Ort durch Taylorreihenentwicklung (re-)konstruiert werden.
Die Autoren zeigen dies anhand der (numerisch berechneten) Ausbreitung eines breiten Gaußschen Paketes, die tatsächlich mit der Abbottschen Überschallgeschwindigkeit

stattfindet, im Widerspruch zu $v_{\mathrm{sig,in,max}} = a$. Wird jedoch nur ein kleines Segment des Flügels des Gaußschen Pakets als Startbedingung verwendet (ansonsten alles auf 0 gesetzt), so wird bei der Ausbreitung das *vollständige* Paket rekonstruiert! Es findet also keine tatsächliche *Ausbreitung* desselben statt, sondern eine *analytische Fortsetzung* („mit Gruppengeschwindigkeit"). Die tatsächliche Informationsübertragung kann nur mittels der Greensfunktion gefunden werden, die die Ausbreitung eines anfänglichen δ-Funktion-Signals beschreibt, welches *alle* Wellenlängen, auch die *kürzesten* (instabilen!), mit gleicher Stärke enthält.

Absolute und Advektive Instabilität

(Diese Unterscheidung wurde von Twiss (1951) anhand von Plasmainstabilitäten eingeführt, einen allgemeinen Formalismus entwickelte Sturrock (1958), siehe Bers (1983) und Landau & Lifschitz X (1986) §62.)
Führt man in ein instabiles Medium eine infinitesimale Störung ein, und wächst dann die Störungsamplitude an einem festen Ort im Lauf der Zeit über alle Maßen an (im Sinne unbegrenzten (exponentiellen) Wachstums der *linearen* Stabilitätsanalyse), so spricht man von *absoluter* Instabilität. Bleibt die Störung an einem Ort begrenzt oder stirbt sie aus, so spricht man von *advektiver* (oder konvektiver oder Drift-) Instabilität. Bezüglich dieser Unterscheidung muß das *Bezugssystem* angegeben werden, in dem ein „fester" Ort betrachtet wird: durch entsprechende Transformationen ist meist eine Überführung einer absoluten in eine advektive Instabilität (und umgekehrt) möglich.
Im *Sternwind* sind das *stellare* Ruhsystem sowie das mit der stationären Windgeschwindigkeit *mitbewegte* System von Interesse. Da die maximale einwärtige Signalgeschwindigkeit in einem Absorptionswind a ist, ist die Instabilität der Strahlungsbeschleunigung im *super*sonischen Wind *advektiv* im stellaren System, und wie Owocki & Rybicki (1986) weiter zeigen, *absolut* im mitbewegten System. *Nicht* bekannt ist die Natur der Instabilität im subsonischen Windbereich!

Während die reine Absorptionskraft *ein*seitig ist (siehe (11)), nämlich eine Störung am Ort r nur Orte $r' > r$ beeinflussen kann, führt die *Streuung*, durch die nun auch Bereiche $r' < r$ beeinflußt werden, eine neue *Qualität* (sie ist kein Effekt „höherer Ordnung") in diese Betrachtungen zum Ausbreitungsverhalten von Signalen in Winden ein; aufgrund der Kompliziertheit des *Bridging Law* mit Streuung existieren hierfür noch keine Aussagen.

5.6 Einfluß weiterer Effekte auf die Instabilität

Linienüberlapp

Im *monoton wachsenden* Geschwindigkeitsfeld des Windes entfernen sich alle Punkte voneinander. Deshalb werden, von jedem Ort aus betrachtet, Photonen durch Streuprozesse *rot*verschoben. Die blaue von zwei überlappenden Linien ist also von der roten

unbeeinflußt und zeigt die volle instabile Anwachsrate. Für die rote Linie leiten Owocki & Rybicki (1985) eine verminderte Wachstumsrate her, nicht jedoch die von Lucy (1984) vermutete Dämpfung. Die Windinstabilität kann somit durch Linienüberlapp verringert, nicht jedoch aufgehoben werden.

Dreidimensionale Stabilitätsanalyse

Dies betrifft die Frage nach der sphärischen *Symmetrie* der zeitabhängigen, instabilen Winde, wie sie in allen bisherigen numerischen Rechnungen vorausgesetzt wird (siehe nächstes Kapitel). Rybicki, Owocki & Castor (1990) finden für eine Streulinie aufgrund des *Line Drag* Effekts *Dämpfung* von horizontalen Störungen. In erster Ordnung ist daher die Betrachtung *nur* radialer Störungen (und damit die Annahme sphärischer Symmetrie) gerechtfertigt.

Optisch dickes Kontinuum

Dieses tritt in Wolf-Rayet-Sternen auf; Owocki & Rybicki (1991) finden die Möglichkeit einer *Dämpfung* der Instabilität in einer Streulinie aufgrund des *Line Drag* Effekts.

5.7 Strahlungsviskosität

Wir wenden uns nun der Entwicklung der Linienstrahlungsbeschleunigung (4.10) mit dem diffusen Fluß (4.36) in SSF-Näherung bis zu Termen in $d\rho/dr$ und d^2v/dr^2 zu.
Die stationären Windmodelle von PPK, die mit der *comoving frame* Methode für Streulinien berechnet werden, stimmen sehr gut überein mit Ergebnissen der modifizierten CAK-Theorie, also mit einer Linienbeschleunigung in Sobolevnäherung. Andererseits zeigen die zeitabhängigen Rechnungen von Owocki, Castor & Rybicki (1988) mit Strahlungsbeschleunigung aufgrund reiner Photon*absorption* eine extrem schlechte (bzw. gar keine) Konvergenz an die CAKsche bzw. PPKsche hydrodynamische Lösung: Selbst mit einem CAK/PPK Modell als Anfangsbedingung und *ohne* explizite Störung des Windes konvergiert die zeitabhängige Rechnung entweder gegen eine andere Lösung als die CAK/PPKsche oder konvergiert gegen gar keine stationäre Lösung, sondern zeigt selbstangeregte, zeitlich periodische Variabilität (siehe nächstes Kapitel).
Dies ist insofern erstaunlich, als die Strahlungsbeschleunigung aufgrund reiner Photonenabsorption für $v_{\rm th} \to 0$ in die Sobolevsche Beschleunigung übergeht, siehe Owocki, Castor & Rybicki (1988).
Wir zeigen daher nun:
Die Sobolevnäherung ist für reine Streulinien gerade um Terme in ρ' und v'' besser als für reine Absorptionslinien (Owocki, 1991, mündl. Mitteilung),
also

$$g_{\rm Sob}(\rho, v', S) = g_{\rm abs}(\rho, L\rho', v', Lv'') + g_{\rm diff}(\rho, L\rho', v', Lv'', S) + O(L^3), \qquad (5.33)$$

mit $L \sim v_{\rm th}$. Die hierin vernachlässigten Terme sind von der Ordnung L^3, da schon in niedrigster Ordnung $g_{\rm abs}(\rho, v')$ Terme in L enthält.

Für $v_{\rm th} \to 0$ geht $g_{\rm abs} \to g_{\rm Sob}$ und $g_{\rm diff} \to 0$. In (33) muß also gelten (wir verwenden im folgenden, im Rahmen der zu besprechenden Approximationen, Gleichheitszeichen)

$$\begin{aligned} g_{\rm abs} &= g_{\rm Sob} + v_{\rm th} A, \\ g_{\rm diff} &= -v_{\rm th} A, \end{aligned} \qquad (5.34)$$

mit einer zunächst unbekannten Funktion A (nicht zu verwechseln mit dem Carlbergschen A aus (1).

Zuerst soll die optische Tiefe berechnet werden,

$$\tau_+(x, \mu, r) = \int_{r_{\rm min}}^{r} \frac{dr'}{\mu'} \kappa(r')\rho(r')\phi(x - \mu' v(r')/v_{\rm th}). \qquad (5.35)$$

Nach Variablensubstitution auf die Frequenz $\tilde{x} = x - \mu v(r)/v_{\rm th}$ im mitbewegten System ist

$$\tau_+(\tilde{x}, \mu, r) = v_{\rm th} \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+(\mu(r)v(r)-\mu(r_{\rm min})v(r_{\rm min}))/v_{\rm th}} \frac{\kappa(r')\rho(r')}{\mu'^2 \frac{dv}{dr}(r') + (1-\mu'^2)\frac{v(r')}{r'}} \phi(\tilde{x}')\, d\tilde{x}', \qquad (5.36)$$

wobei $r' = r'(\tilde{x}')$ ist. Trifft der Strahl, entlang dem τ_+ integriert wird, den Stern nicht, dann ist die obere Integrationsgrenze in (36) $+\infty$: denn es ist hierfür $r_{\rm min} = -\infty$, $\mu_{\rm min} = -1$, und $v(r_{\rm min})/v_{\rm th} \gg 1$. Für ϕ wird (weiter unten) ein Dopplerprofil $\sim \exp(-x^2)$ angenommen, so daß ϕ nur für x aus dem kleinen Bereich $-3 \lesssim x \lesssim 3$ nicht vernachlässigbar klein ist. Andererseits soll im folgenden die Integrationsgrenze in (36) auch für *core*-Strahlen (mit $r_{\rm min} = R_*$) durch ∞ ersetzt werden, da es ansonsten in (34) zu $g_{\rm abs}$ *und* $g_{\rm diff}$ einen zusätzlichen Term $+v_{\rm th}B$ gäbe.
Um den Gültigkeitsbereich dieser Ersetzung abzuschätzen, wird der extreme Fall $\mu = 1$ betrachtet. Sei dann $\tilde{x} \approx 0$, und wir fordern $(v(r) - v(R_*))/v_{\rm th} \approx v(r)/v_{\rm th} \gtrsim 3$, wobei verwendet wurde, daß die photosphärische Geschwindigkeit klein gegen $v_{\rm th}$ ist. Schließlich kann in guter Näherung angenommen werden, daß bis zum Schallpunkt das Geschwindigkeitsfeld durch $v(r) = v_* \exp(z/H)$ gegeben ist, mit $z = r - R_*$ und barometrischer Skalenhöhe H. Für das Verhältnis von Schallgeschwindigkeit zu thermischer Geschwindigkeit wird $a/v_{\rm th} \approx 3$ als typischer Wert für die hauptsächlich den Wind treibenden Ionen C, N, O verwendet. Mit all diesen Voraussetzungen führt eine einfache Rechnung auf $z \gtrsim H + z(v_{\rm th}) \approx z(a)$: Für Orte außerhalb des sonischen Punktes kann man in (36) tatsächlich die obere Integrationsgrenze durch „∞“ ersetzen.

Der Bruch im Integranden von (36) ist von der Form fg/h. Taylorreihenentwicklung um den Resonanzort r_R gibt also bis zur 1. Ordnung in $r' - r_R$

$$\frac{f(r')\,g(r')}{h(r')} = \frac{f_R\, g_R}{h_R}\left[1 + \left(\frac{f'_R}{f_R} + \frac{g'_R}{g_R} - \frac{h'_R}{h_R}\right)(r' - r_R)\right]. \qquad (5.37)$$

Es ist, wieder bis zur 1. Ordnung,

$$\begin{aligned}\tilde{x}' &= x - \frac{\mu(r')v(r')}{v_{\rm th}} = x - \frac{\mu_R v_R + \frac{d}{dr}(\mu v)|_R\,(r'-r_R)}{v_{\rm th}} \\ &= \tilde{x}_R - \frac{\frac{d}{dr}(\mu v)|_R}{v_{\rm th}}(r'-r_R).\end{aligned} \tag{5.38}$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wurde hierbei nach radialen Gradienten $\frac{d}{dr}$ entwickelt und nicht nach Gradienten $\frac{d}{dr/\mu}$ entlang dem Strahl, auf dem τ_+ integriert wird.
Die Definition des Resonanzortes ist $\tilde{x}_R = 0$, und somit

$$r' - r_R = -\frac{v_{\rm th}}{\frac{d}{dr}(\mu v)|_R}\,\tilde{x}'. \tag{5.39}$$

Alle Größen mit einem Index „R" können vor das Integral in (36) gezogen werden, also

$$\tau_+(\tilde{x},\mu,r) = \tag{5.40}$$
$$\tau_\mu\left[\Phi(\tilde{x}) - \frac{v_{\rm th}}{\frac{d}{dr}(\mu v)|_R}\left(\frac{\kappa_R'}{\kappa_R} + \frac{\rho_R'}{\rho_R} - \frac{\frac{d}{dr'}[\mu'^2 v'(r') + (1-\mu'^2)\frac{v(r')}{r'}]|_R}{\mu_R^2 v_R' + (1-\mu_R^2)\frac{v_R}{r_R}}\right)\int_{\tilde{x}}^{\infty}\tilde{x}'\phi(\tilde{x}')d\tilde{x}'\right],$$

mit

$$\tau_\mu = \frac{\kappa_R\rho_R v_{\rm th}}{\mu_R^2 v_R' + (1-\mu_R^2)\frac{v_R}{r_R}}, \tag{5.41}$$

wobei

$$r_R = r + v_{\rm th}\tilde{x}/(\mu v)_R' \tag{5.42}$$

ist. Für ein *Doppler*profil $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ ist $\phi'(x) = -2x\phi(x)$, und damit

$$\tau_+(\tilde{x},\mu,r) = \tag{5.43}$$
$$\tau_\mu\left[\Phi(\tilde{x}) - \frac{1}{2}\frac{v_{\rm th}}{\frac{d}{dr}(\mu v)|_R}\left(\frac{\kappa_R'}{\kappa_R} + \frac{\rho_R'}{\rho_R} - \frac{\frac{d}{dr'}[\mu'^2 v'(r') + (1-\mu'^2)\frac{v(r')}{r'}]|_R}{\mu_R^2 v_R' + (1-\mu_R^2)\frac{v_R}{r_R}}\right)\phi(\tilde{x})\right].$$

Mit den Randbedingungen

$$\tau_+(\tilde{x},\mu(r_{\rm min}),r_{\rm min}) = \tau_-(\tilde{x},1,\infty) = 0 \tag{5.44}$$

ist

$$\tau_-(\tilde{x},\mu,r) = \tau_+(\tilde{x},1,\infty) - \tau_+(\tilde{x},\mu,r). \tag{5.45}$$

Wir interessieren uns nur für Linien, deren Resonanzort im Endlichen (und außerdem nicht bei R_*) liegt. Wegen (42) ist dann $\tilde{x} \ll 0$, und mit (43) ist

$$\tau_+(\tilde{x},1,\infty) = \tau_\mu. \tag{5.46}$$

Dieses Ergebnis gilt für alle Ordnungen in $v_{\rm th}$, da mit höheren Ordnungen in $v_{\rm th}$ zu (43) immer höhere Ableitungen $\phi^{(n)}$ hinzukommen, und $\phi^{(n)}(-\infty) = 0$ für $n \geq 0$.

Im sternnahen Bereich $\mu_* \approx 0$ ist die Gesamtbeschleunigung, unter Verwendung von $S \approx I_*/2$,

$$g_{\rm tot}(r) = g_{\rm thin}(r)\int_0^1 d\mu\,\mu\int_{-\infty}^{\infty}d\tilde{x}\,\phi(\tilde{x})(e^{-\tau_+} + e^{-\tau_-}). \tag{5.47}$$

Da Terme in ρ' und v'' klein sein sollen, können die Exponentialterme bezüglich dieser entwickelt werden, und damit

$$\begin{aligned}g_{\rm tot}(r) = g_{\rm thin}(r)\int_0^1 d\mu\mu\int_{-\infty}^{\infty}d\tilde{x}\phi(\tilde{x})\Bigg[&e^{-\tau_\mu\Phi(\tilde{x})}\left\{1 - \frac{\tau_\mu}{2}\frac{v_{\rm th}}{(\mu v)_R'}\left(\frac{\kappa_R'}{\kappa_R} + \ldots - \ldots\right)\phi(\tilde{x})\right\} \\ &+ e^{-\tau_\mu(1-\Phi(\tilde{x}))}\left\{1 + \frac{\tau_\mu}{2}\frac{v_{\rm th}}{(\mu v)_R'}\left(\frac{\kappa_R'}{\kappa_R} + \ldots - \ldots\right)\phi(\tilde{x})\right\}\Bigg],\end{aligned} \tag{5.48}$$

mit den durch Punkten angedeuteten Termen entsprechend (43). Wird in der zweiten Zeile $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ verwendet, folgt schließlich

$$g_{\rm tot}(r) = 2g_{\rm thin}(r)\int_0^1 d\mu\,\mu\int_{-\infty}^{\infty}d\tilde{x}\,\phi(\tilde{x})\,e^{-\tau_\mu\Phi(\tilde{x})}, \tag{5.49}$$

welches gerade die gewöhnliche Formel für die Beschleunigung in der Sobolevnäherung ist.

Abbildung 5 zeigt $g_{\rm Sob}$, $g_{\rm abs}$ und $g_{\rm diff}$ (mit der optisch dünnen Quellfunktion). Tatsächlich stimmt ungefähr ab dem sonischen Punkt $g_{\rm abs} + g_{\rm diff}$ bedeutend besser mit $g_{\rm Sob}$ überein als $g_{\rm abs}$ allein: Die SSF-Beschleunigung ist um eine Ordnung in der Entwicklung nach ρ und v' genauer als diejenige aufgrund reiner Photonenabsorption.

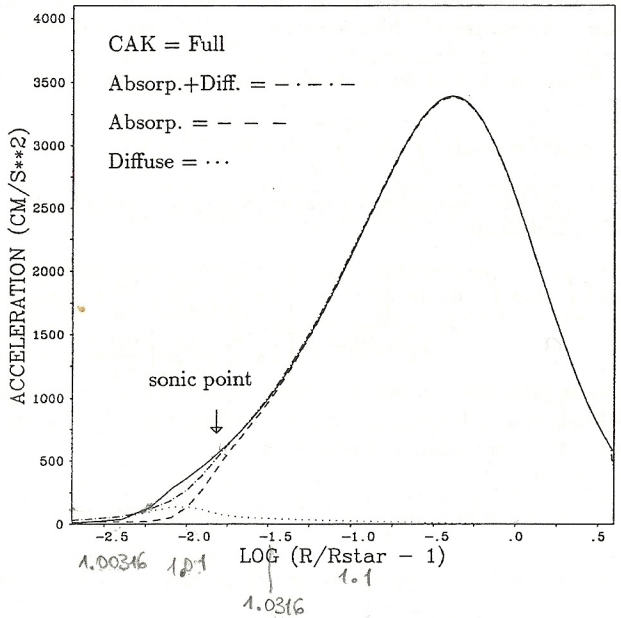


Abb. 5.5. Vergleich der verschiedenen Strahlungsbeschleunigungen in einem stationären Wind. „Diffuse" bezeichnet den diffusen Anteil der SSF-Beschleunigung mit der optisch dünnen Quellfunktion. Der Abfall von „Absorp. + Diff." am rechten Rand ist durch die verwendeten Randbedingungen verursacht, vgl. Abschnitt 4.9.

6

Instabile isotherme Windmodelle

In diesem Kapitel werden die numerischen Ergebnisse für zeitabhängige isotherme Winde mit der Linienstrahlungsbeschleunigung gemäß Kapitel 4, die also der Instabilität aus Kapitel 5 unterliegen, dargestellt. Diese Winde, die nurmehr aus einer Abfolge sehr schmaler und dichter Schalen und einem nahezu vollständigen Vakuum dazwischen bestehen (Dichtekontraste von 4 Dekaden treten auf), wurden erstmals von Owocki, Castor & Rybicki (1988) mittels numerischer Simulationen untersucht. Die hier vorgestellte Studie überprüft diese (und neuere) Resultate und erweitert sie in verschiedene Richtungen: Ein reiches Spektrum von (mehr als) 10 harmonischen Obermoden der in den Wind einlaufenden Schallwellen wird nachgewiesen (§§5 und 7), Stöße der Schalen untereinander – die einen großen Einfluß auf den Energietransfer im Wind haben, siehe Kapitel 9 – werden eingehend behandelt (§6), es wird gezeigt, daß im Wind *keinerlei* Anzeichen von deterministischem Chaos zu finden sind (§7) und schließlich wird die Abhängigkeit der entstehenden Windstruktur von der verwendeten Quellfunktion diskutiert (§8). Im Gegensatz zu neuen Rechnungen von Owocki (1992) zeigen unsere Windmodelle keine *intrinsische*, selbstanregende Variabilität, sondern bedürfen zur Strukturbildung einer explizit vorgegebenen Störung (§9).

In §1 werden die Modellparameter und das numerische Vorgehen zusammengefaßt, in §§2 bis 4 die grundlegende Schalenstruktur der Winde diskutiert. §10 schließlich gibt einen Ausblick auf künftig zu unternehmende isotherme Windrechnungen.

6.1 Berechnung der Modelle

Räumliches Gitter; Photosphärische Schallwellen

Es gibt, neben der Berechnung der Strahlungsbeschleunigung als Frequenz- und Winkelintegral (und ggf. Linienverteilungsintegral) an jedem Ort (siehe Kapitel 4), eine zweite große numerische Anforderung an die zeitabhängigen Windrechnungen, nämlich die Auflösung des räumlichen Gitters. Die Instabilität der Strahlungsbeschleunigung wirkt (bei einer Linie mit Dopplerprofil) nur auf Längenskalen kleiner als die Sobolevlänge L. Die Sobolevlänge kann für das β-Geschwindigkeitsfeld eines stationären Windes (siehe Anhang 2, Glg. (11)) einfach abgeschätzt werden. Für $\beta = 1$ ist nahe am Stern (nicht viel weiter als 2 Sternradien),

$$\frac{L}{R_*} = \frac{v_{\rm th}}{v' R_*} = \frac{v_{\rm th}}{v_\infty} \left(\frac{r}{R_*}\right)^2 = O(10^{-2}). \qquad (6.1)$$

Um instabiles Wachstum in der numerischen Beschreibung zu erfassen, werden einige Gitterpunkte pro Sobolevlänge benötigt, und für ein äquidistantes Gitter bis hinaus zu

5 oder 10 Sternradien braucht man dann insgesamt einige tausend Punkte. Zu einer entsprechenden Zahl gelangt man auch aus einem anderen Grund. Die isotherme barometrische Höhenskala in der Photosphäre ist (mit isothermer Schallgeschwindigkeit a)

$$\frac{H_*}{R_*} = \frac{a^2}{g\,R_*} = \frac{a^2 R_*}{GM(1-\Gamma)} \approx 2 \cdot 10^{-3}, \tag{6.2}$$

für typische O-Stern Parameter $a = 20\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $R_* = 20\,R_\odot$, $M = 50\,M_\odot$, $\Gamma = 0,5$. Pro Skalenhöhe (Dichteabfall um Faktor e) sollten aus numerischen Gründen einige Gitterpunkte liegen, was wieder auf einige tausend Gitterpunkte bis 5 oder 10 Sternradien führt.
Als Ausweg läge die Verwendung eines sehr feinen Gitters in Photosphärennähe nahe, welches mit wachsendem Abstand vom Stern rasch gröber wird (maximal mit $\Delta r \sim r^2$, entsprechend der Sobolevlänge). Doch können nichtäquidistante Gitter zu einer künstlichen *Stabilisierung* des Windes führen (S. P. Owocki, 1991, mündl. Mitteilung): Die (Schall-)Wellen, als die anregende Störung für die Instabilität (s. u.), werden ab bestimmten Radien eine kleinere Wellenlänge haben als der Gitterabstand und können sich auf dem Gitter nicht mehr ausbreiten; sie sterben aus und instabiles Wachstum wird nicht mehr angeregt.

Als „infinitesimal kleine" *kontrollierbare* Störungen des Windes, die als „Angriffspunkt" für die Instabilität der Strahlungsbeschleunigung dienen und (zunächst) exponentiell anwachsen, werden in der Photosphäre erzeugte *Schallwellen* verwendet. Dies ist in Entsprechung zum Grundprinzip der linearen Stabilitätsanalyse, instabile Störungen nach ihrer Wellenlänge zu zerlegen, da im linearen Regime jede Fouriermode für sich anwächst, ohne Kopplung an andere Moden.
Die Dispersionsrelation für Schallwellen in einer *planaren isothermen* barometrischen Dichteschichtung $\rho(z) = \rho_* \exp(-z/H)$ ($\rightarrow$ Photosphäre und subsonischer Windbereich) lautet (siehe Lamb, 1932)

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/4\pi H)^2}}, \\ \lambda_0 &= aT, \end{aligned} \tag{6.3}$$

wobei a die isotherme Schallgeschwindigkeit ist und T die Periode der Schallwellen. $\lambda_0 = aT$ ist die Dispersionsrelation gewöhnlicher Schallwellen (*ohne* Schwerefeld). Aufgrund des großen Faktors 4π in (3) ist selbst für Schallwellen mit der großen Wellenlänge $\lambda/H = 5,24$ noch $\lambda = 1,1\,\lambda_0$, d. h. es ist nahezu noch die *lineare* Dispersionsrelation $\lambda = aT$ erfüllt.

Die *Amplitude* der Schallwellen in der Photosphäre (definiert durch $\tau_c = 1$) wird meistens im %-Bereich gewählt. Da die relative Amplitude $\delta\rho/\rho_0$ dieser Wellen mit steigender Höhe in einer barometrischen Schichtung mit $\exp(z/2H)$ wächst, kann es schon im subsonischen Windbereich zu einem *Sättigungs*wachstum der Schallwellen kommen: In Anhang 8 wird der Abstand Photosphäre – sonischer Punkt in einem typischen O-Stern

zu etwa 5 barometrischen Skalenhöhen abgeschätzt, die relative Amplitude der Wellen wächst über diese Distanz um einen Faktor $\exp(2,5) \approx 10$. Außer für photosphärische Schallwellen mit sehr kleinen Amplituden (deutlich unter 10 %, also im %-Bereich und darunter) muß man daher schon bis zum sonischen Punkt mit nichtlinearem Wachstum der Schallwellen rechnen, so daß sich diese also zu Schocks aufgesteilt und eine Sättigungsamplitude erreicht haben (eine Testrechnung dazu wurde in Abschnitt 3.11 gezeigt). Diese Schocks haben nichts zu tun mit den aufgrund nichtlinearen Wachstums der Instabilität der Strahlungsbeschleunigung entstehenden Schocks im Strömungsfeld des Sternwinds.

Ein alternative Möglichkeit zur Windanregung anstelle von Schallwellen wären *nichtradiale Pulsationen.* Einige neuere Beobachtungsergebnisse scheinen aber anzudeuten (siehe nächstes Kapitel), daß die Windstruktur von O-Sternen eher *windintrinsisch* als durch photosphärische Effekte (wie nichtradiale Pulsationen) verursacht ist; doch ist dieser Punkt noch weitgehend offen, und Rechnungen mit nichtradialen Pulsationen sollen in Bälde durchgeführt werden.

Ein Modell für ζ Pup

Im Rahmen vorliegender Arbeit sollen die instabilen Winde von OB-Überriesen betrachtet werden, und als typischer Vertreter dieser Gruppe wird ζ Puppis (O4f I) gewählt, der auch der Standardstern für photosphärische Analysen und stationäre Winduntersuchungen bei O-Überriesen ist. Für ζ Pup existiert eine große Anzahl hervorragender Beobachtungen – so ist dies z. B. der erste O-Stern, für den ROSAT-Röntgenspektren analysiert wurden, siehe Hillier et al. (1993).
Die folgende Tabelle 1 gibt eine Zusammenstellung der verwendeten Stern- und Windparameter.
Tabelle 2 stellt einige numerische Parameter zusammen. Hierin bezeichnet die Frequenzauflösung (= 3) die Zahl der (diskretisierten) Frequenzpunkte pro Dopplerbreite der Linie. Von der jeweiligen Resonanzfrequenz an einem Ort aus werden ± 5 Dopplerbreiten zum blauen und roten Flügel der Linie zur Berechnung des Zuwachses in optischen Tiefen und des Frequenzintegrals über die Linie genommen. Ist die Resonanzfrequenz an einem Ort eindeutig, so entspricht dies insgesamt 30 Frequenzpunkten. Liegt der Ort aber innerhalb einer Schockfront, so kommt es über den Gitterabstand Δr hinweg zu einem *Intervall* von Geschwindigkeiten, das gegenüber der thermischen Geschwindigkeit (kühlen Materials) nicht klein ist: Ein Geschwindigkeitssprung von 400 km/s (typisch für die folgenden Schocks) wird durch etwa 3 Gitterpunkte aufgelöst, und jedem Gitterpunkt entspricht ein Geschwindigkeitsintervall ≈ 100 km/s; mit $v_{\mathrm{th}} \approx 7$ km/s und obiger Frequenzauflösung braucht man dann 80 Frequenzpunkte.

Verlauf der Rechnung

Tabelle 1: Stellare und Windparameter

Größe	Symbol	Wert
Stellar und Photosphärisch		
Masse	M	$42\,M_\odot$
Gravitationsbeschleunigung†	$\log g$	3,5
Effektivtemperatur†	$T_{\rm eff}$	42.000 K
Radius†	R_*	$19\,R_\odot$
Leuchtkraft	L	$1{,}0 \cdot 10^6 L_\odot$
Heliumhäufigkeit†	$Y = N_{\rm He}/N_{\rm H}$	0,16
Ionisationsgrad	$I_{\rm H}$; $I_{\rm He}$	1; 2
mittleres Molekulargewicht	μ	$0{,}66\,\mu_{\rm H}$
Elektronenstreukoeffizient	σ_e	$0{,}32\,{\rm cm^2\,g^{-1}}$
Eddington-Gamma	Γ	0,59
Skalenhöhe (isoth.)	H	$3{,}1 \cdot 10^{-3}\,R_*$
Wind		
CAK Exponent*	α	0,726
Linienkraftkonstante	$\kappa_0\, v_{\rm th}/c$	$1800\,{\rm cm^2\,g^{-1}}$
Opazitäts-cutoff	$\kappa_{\rm max}/\kappa_0$	10^{-3}
Massenverlustrate	$\dot{M}$	$3 \cdot 10^{-6}\,M_\odot{\rm yr^{-1}}$
Entweichgeschwindigkeit	$v_{\rm esc}$	$580\,{\rm km\,s^{-1}}$
Endgeschwindigkeit	v_∞	$2000\,{\rm km\,s^{-1}}$
Schallgeschwindigkeit (isoth.)	$a_{\rm iso}$	$23\,{\rm km\,s^{-1}}$
Thermische Geschwindigkeit	$v_{\rm th}$	$0{,}3\,a_{\rm iso}$
Schallwellen: Periode	T	5000 s
——Amplitude	A	1 %
——Wellenlänge	λ	$8{,}7 \cdot 10^{-3}\,R_*$

† Fundamentaler Parameter nach Kudritzki et al. (1983)

* Pauldrach (priv. comm.)

Das *Start*modell für eine zeitabhängige Windrechnung ist ein stationärer CAK/PPK-Wind: *Ohne* die Instabilität der Linienbeschleunigung (4.40) würde sich der Wind nur geringfügig von diesem Anfangszustand weg, hin zu einem leicht verschiedenen stationären Wind, entwickeln.
Die Berechnung des CAK/PPK-Windes geschieht mit *exakter* Integration über die end-

Tabelle 2: Numerische Parameter

Größe	Symbol	Wert
Gitterpunkte	ig	3000
Rechenbereich	$r_{\rm min}, r_{\rm max}$	$1 \ldots 5\,R_*$
Gitterweite	Δr	$\Delta r/r = 5{,}4 \cdot 10^{-4}$
Endzeit	$t_{\rm end}$	$24^{\rm h}$
Courantzahl	σ	0,5
Zeitschritt	Δt	$\gtrsim 6\,{\rm s}$
numerische Viskosität	ν	1,2
Winkelintegrationspunkte		1
Frequenzauflösung	$\Delta\nu_D/d\nu$	3
Dopplerbreiten vom Zentrum		± 5

liche Sternscheibe, nicht nur mit einem oder einigen wenigen Integrationspunkten.
Als Startmodell für den CAK/PPK-Wind wiederum wird ein (analytisch formulierbarer) stationärer Wind nach Hamann (1985) verwendet, mit exponentieller Dichteschichtung nahe am Stern, woran ein β-Geschwindigkeitsfeld anschließt. Beide Bereiche werden stetig und differenzierbar zusammengeschlossen.
(Am inneren Rand des CAK/PPK-Modells werden keine Schallwellen erzeugt, sondern die Randbedingung einer isothermen, stationären barometrischen Strömung verwendet, siehe Kapitel 2.)
Das räumliche Gitter des CAK/PPK-Windes muß identisch sein mit dem Gitter des instabilen Windes. Interpolation eines auf einem groben Gitter berechneten CAK/PPK-Modells auf das feine Gitter des instabilen Modells gibt extremes (numerisches) Rauschen: Die Interpolationsfehler wachsen als *Störungen* des Startmodells aufgrund der Instabilität der Strahlungsbeschleunigung stark an.
Der CAK/PPK-Wind kann sich dann über eine physikalische Echtzeit von einigen Wochen entwickeln; nach dieser Zeit hat sich ein stationärer Wind mit räumlich wie zeitlich konstanter Massenverlustrate bis auf Rechnergenauigkeit von 12 oder 13 Stellen entwickelt. (Es reichen auch weniger konvergierte stationäre Winde als Startmodelle aus, typischerweise sollte Konstanz der ersten 3 oder 4 Stellen der Massenverlustrate genügen.) Ein entsprechendes Modell wurde in Abschnitt 3.5 gezeigt.

Zum Zeitpunkt 0 der (nun anschließenden) *instabilen* Windrechnung wird die Sobolevbeschleunigung durch (4.40) ersetzt und mit der Erzeugung photosphärischer Schallwellen begonnen. Diese sind über den gesamten Verlauf der Rechnung zeitlich kohärent. (Rechnungen mit Phasensprüngen und Frequenzverschiebungen der Wellen wurden bislang aus Gründen verfügbarer Rechenzeit nicht durchgeführt.)
Die Entwicklung des Windes wird über einen Zeitraum von typischerweise 24 Stunden verfolgt. Über die ersten Stunden hinweg durchläuft der Wind einen transienten Bereich

mit einer Vielzahl von Schwingungen/Wellen. Nach dieser Phase zeigt sich dann ein sehr streng periodisches Ansprechen auf die anregenden Schallwellen. (Dies wird weiter unten genauer betrachtet.)

6.2 Schalen und Zwischenschalenmedium

Die folgenden Windmodelle verwenden die *optisch dünne* Quellfunktion (4.22), entsprechend einer rein geometrischen Verdünnung des photosphärischen Strahlungsfeldes. Erst am Ende dieses Kapitels werden auch Winde mit der stationären oder aktuellen optisch dicken Quellfunktion behandelt. Abbildung 1 zeigt eine Momentaufnahme des Windes zum Zeitpunkt $t = 24^{\mathrm{h}}$. Gestrichelt eingezeichnet ist der stationäre CAK/PPK-Wind.

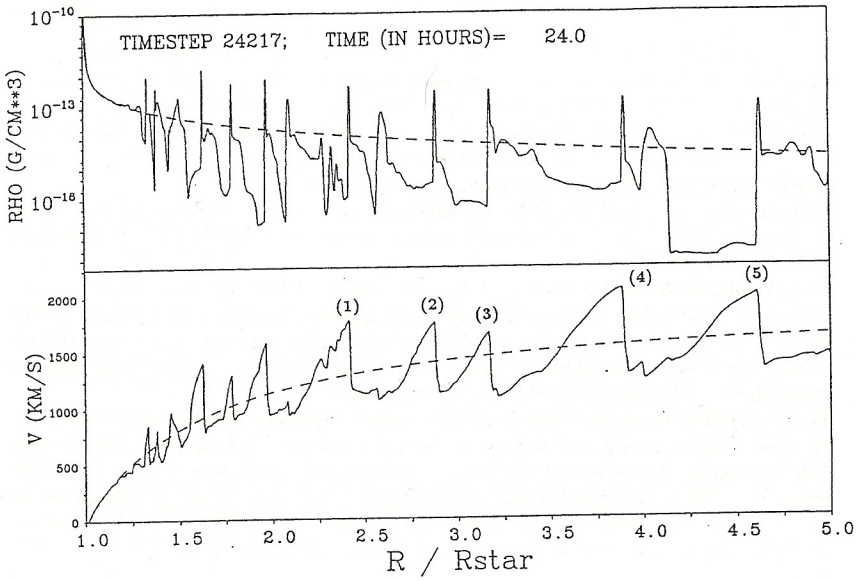


Abb. 6.1. Momentaufnahme des instabilen Windes nach 24 Stunden.

Man sieht ab etwa $1,2\,R_*$ das Entstehen der Windstruktur, wobei dieser Ort stark abhängig ist von der verwendeten Quellfunktion und von der Amplitude der eingestrahlten Schallwellen. Es folgt ein schmaler Bereich bis etwa $1,6\,R_*$, in dem die Windstruktur sich ausbildet, die Schockamplituden anwachsen. Für größere Radien ist die Windstruktur voll ausgebildet, die Dichte- und Geschwindigkeitssprünge an den Schocks ändern sich nicht mehr *wesentlich*.

Der zeitabhängige Wind besteht nurmehr aus *dichten Schalen* mit extrem verdünntem Medium dazwischen: An den stärksten Schocks entsteht ein Dichtesprung von einem Faktor 10^3 bis 10^4! Der *reverse* Schock ist die innere, sternwärtige Begrenzung der Schale, der *forward* Schock die äußere. Im Geschwindigkeitsfeld sind die *zwei* Sprünge von *reverse* und *forward* Schock aufgrund der geringen Ausdehnung der Schale numerisch zu *einem* Sprung verschmolzen. Bei den äußersten beiden Schalen ist knapp unter der CAK-Geschwindigkeit noch ein leichtes Abknicken im Geschwindigkeitssprung sichtbar, welches den Übergang von einem Schock zum anderen anzeigt. Man kann Argumente anführen, daß der dichte Schalenkern sich näherungsweise mit der *stationären* CAK-Geschwindigkeit bewegt (s. u.). Das Verhältnis der Sprunghöhen ist dann an den meisten Schocks

$$\frac{v_{\mathrm{j,rev}}}{v_{\mathrm{j,for}}} \approx 2 \ldots 3. \tag{6.4a}$$

Gemäß Gleichung (3.40) für den (starken) isothermen planaren Doppelschock entspricht dies einem *preshock* Dichteverhältnis

$$\frac{\rho_{\mathrm{pre,rev}}}{\rho_{\mathrm{pre,for}}} \approx \frac{1}{9} \ldots \frac{1}{4}, \tag{6.4b}$$

welches an den meisten Schalen tatsächlich auftritt.
Daß die Schalen räumlich sehr schmal sind, liegt i) an der Isothermie des Windes und ii) an der großen Machzahl der Schocks, siehe Abschnitt 3.9.

Vergleich mit Rechnungen von Owocki

Abbildung 2 zeigt zum Vergleich eine Windrechnung von Owocki (1992), ebenfalls mit der optisch dünnen Quellfunktion, für einen „typischen" O-Überriesen mit Parametern

$$M = 50\,M_\odot, \qquad T_{\mathrm{eff}} = 37.000\,\mathrm{K}, \qquad R = 20\,R_\odot,$$
$$\alpha = 0,7, \qquad \dot{M} = 2,4 \cdot 10^{-6}\,M_\odot\,\mathrm{yr}^{-1}, \qquad v_\infty = 2000\ \mathrm{km/s}.$$

Die photosphärischen Schallwellen haben hier eine Amplitude von 25 % und eine Periode von 10.000 s; die Abhängigkeit der Windstruktur von Periode und Amplitude der Schallwellen soll in Abschnitt 8 diskutiert werden. Hier begnügen wir uns mit der Feststellung, daß die Windstrukturen aus Abb. 1 und 2 in den wesentlichen Punkten übereinstimmen.

Bahn eines Teilchens im Wind

Ein Materieteilchen kann in diesem Wind aufeinanderfolgender Schalen nur genau *einmal* einen Schock passieren. Danach ist es in einer Schale, aus der es nicht mehr herausgelangen kann, da diese von zwei entgegengesetzt gerichteten Schocks berandet ist. Dies

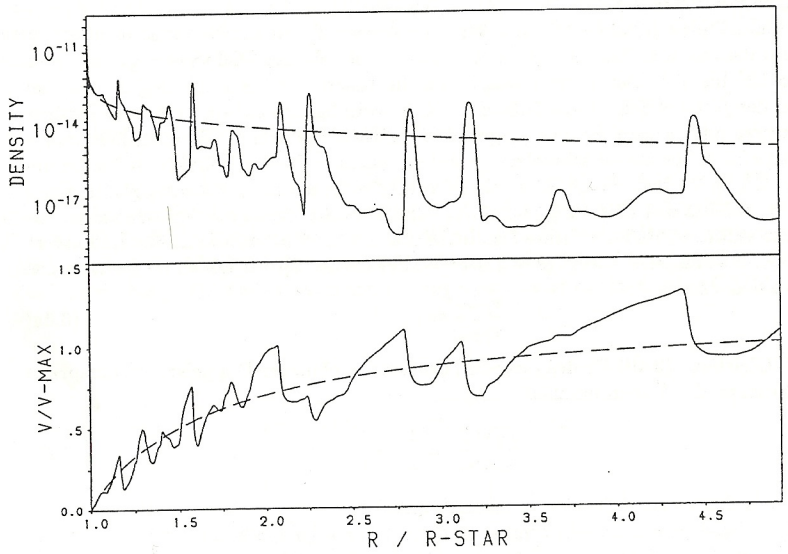


Abb. 6.2. Instabiler isothermer Wind, aus Owocki (1992).

ist sehr verschieden vom phänomenologischen Lucyschen (1982b) Windmodell mit einer Abfolge nur von *forward* Schocks, womit das Teilchen viele Schocks durchlaufen kann. Zwischen zwei Schalen des OCR-Windes (nach Owocki, Castor & Rybicki, 1988) gibt es einen Ort r_b, oberhalb dessen (d. h. sternauswärts) Materie in den nächstäußeren *reverse* Schock hineinbeschleunigt wird und unterhalb dessen Materie vom nächstinneren *forward* Schock eingeholt wird.
Dies ist in Abbildung 3 dargestellt, wo die Bahn benachbarter Teilchen durch den Wind verfolgt wird. (Die „Feinstruktur" der Kurven ist durch den Suchalgorithmus für die Teilchen bedingt und hat keine Bedeutung.) Die Teilchen sind gemäß ihrer Startposition von innen (sternwärts) nach außen von 1 bis 5 numeriert. Teilchen 1 und 2 erfahren einen *forward* Schock, gelangen damit in die hintere, innere Schale, Teilchen 4 und 5 einen *reverse* Schock und gelangen in die vordere, äußere Schale, Teilchen 3 liegt (so nahe) bei r_b, daß es (bislang) noch im Zwischenschalenmedium verbleibt. Im Geschwindigkeitsverlauf sieht man auch, daß durch den *reverse* Schock ein Teilchen abgebremst wird, durch den *forward* Schock beschleunigt.

Der so entstandene Wind ist *stabil*, indem er der Ursache der Instabilität ausweicht: Zum einen ist das *Zwischenschalen*medium so dünn, daß die Resonanzlinien darin nicht mehr

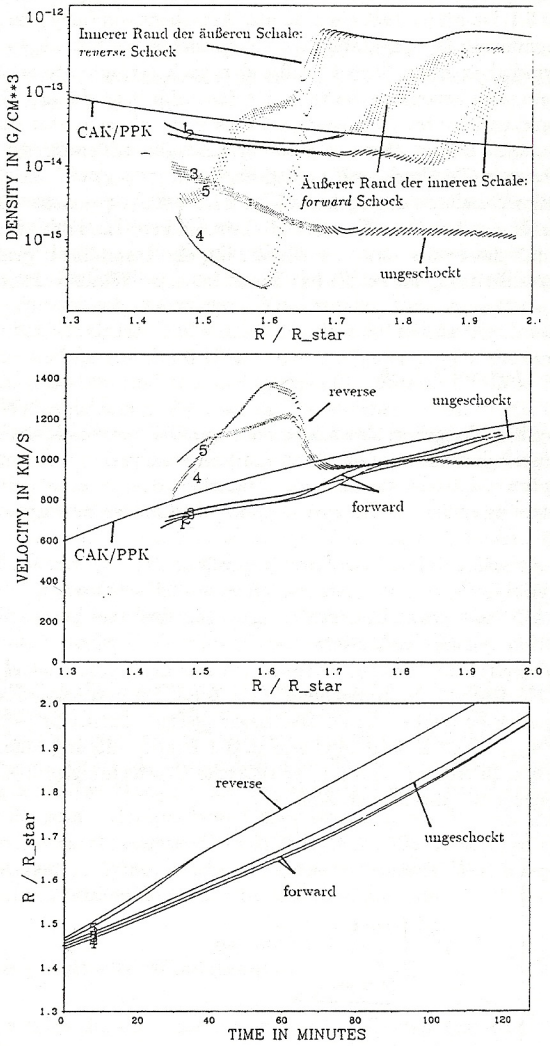


Abb. 6.3. Bahnen anfänglich benachbarter Teilchen im zeitabhängigen, instabilen Wind.

optisch dick werden können, wobei letzteres die Grundvoraussetzung für die Instabilität ist, siehe Abschnitt 5.1. Damit ist auch ein zentrales Argument von Lucy (1982b) für diese Modelle nicht signifikant: Die Separation aufeinanderfolgender Schock„spitzen" (also der hohen Geschwindigkeiten am Schock) sollte demnach *geringer* als die thermische Geschwindigkeit sein, weil ansonsten die radiative Instabilität an diesem „überstehenden" Material angreifen könnte: Zum einen wäre es nicht abgeschattet durch weiter innen liegendes Material, erfährt also eine große Strahlungsbeschleunigung; zum anderen treten hinreichend große Geschwindigkeitsdifferenzen ($> v_{\rm th}$) auf. Im OCR-Wind ist jedoch die primäre Voraussetzung optisch dicker Linien nicht gegeben. – In den dichten *Schalen* nun andererseits ist der Geschwindigkeitsgradient *klein* oder sogar *negativ* (siehe unten), so daß die zweite Grundvoraussetzung der Instabilität, große positive Geschwindigkeitsgradienten, nicht erfüllt ist. Somit ist diese Windstruktur insgesamt *stabil*.

Warum reverse und forward Schocks?

Die Instabilität der Strahlungsbeschleunigung hat *zwei* Richtungen: Material kann eine positive Geschwindigkeitsstörung erhalten, die weiter anwächst aufgrund des Verlassens des Absorptionsschattens sternnäheren Materials; oder es erhält eine negative Geschwindigkeitsstörung und wird durch das Eintauchen in den Absorptionsschatten weiter abgebremst.
Diese Separation in zusätzlich beschleunigtes (gegenüber dem stationären Wind) und abgebremstes Material findet sich in *reverse* und *forward* Schocks wieder: In den *reverse* Schock läuft sternnäheres, zusätzlich beschleunigtes Material von hinten hinein – der *forward* Schock holt auswärtigeres Material ein:
Die entwickelte Windstruktur wird im wesentlichen nur nach außen *advektiert* (siehe Abschnitt 8, Abb. 11), weshalb für hinreichend kurze Zeiten im Bezugssystem der Schale *Stationarität* angenommen werden kann. Die Lagrangesche Ableitung (entlang einer Teilchenbahn) ist dann $d/dt \equiv v\,(\partial/\partial r)$, womit die Beschleunigung eines Teilchens $dv/dt = v\,(\partial v/\partial r)$ ist. In Abbildung 4 ist der typische Geschwindigkeitsverlauf in der Umgebung einer Schale dargestellt, vgl. Abb. 1.

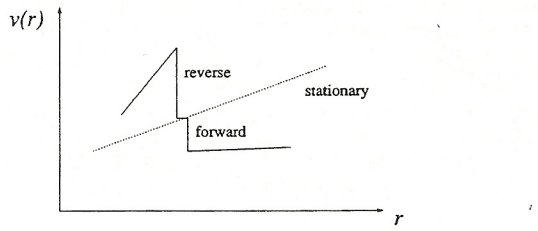


Abb. 6.4. Verlauf des Geschwindigkeitsfeldes in der Umgebung einer Schale.

Damit ergibt sich für die Beschleunigungen

$$\frac{dv}{dt}_{\rm rev,pre} > \frac{dv}{dt}_{\rm stat} > \frac{dv}{dt}_{\rm for,pre}, \tag{6.5}$$

also *zusätzlich beschleunigtes* Material vor dem *reverse* Schock und *abgebremstes* Material vor dem *forward* Schock.

Das Auftreten von *reverse* und *forward* Schocks kann wie folgt verstanden werden (Owocki et al., 1988). Die photosphärischen Schallwellen laufen durch den subsonischen Windbereich nach außen; in der Nähe des sonischen Punktes hat das (stationäre) Geschwindigkeitsfeld seinen größten Gradienten. Die Längenskala der Änderung des Geschwindigkeitsfeldes kann in dieselbe Größenordnung kommen oder kürzer werden als die Wellenlänge der Schallwellen. Dies führt zu einer starken *Reflexion* der Schallwellen. Im bereits supersonisch gewordenen Wind werden diese sternwärts laufenden Wellen mit nach außen advektiert. Auswärts laufende *adiabatische* Schallwellen ($g_{\rm rad} = 0$) haben eine Phasendifferenz von 0 Grad, einwärts laufende eine Phasendifferenz von 180 Grad zwischen Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen. (Diese Phaseninformation ist in der Wellengleichung, die man in der üblichen Weise durch *Differenzieren* von Euler- und Kontinuitätsgleichung und wechselseitiges Einsetzen erhält, verlorengegangen. Sie folgt aber, wenn man deren Wellenlösung in die ursprünglichen Gleichungen einsetzt.)
Die schnellen, auswärts laufenden Wellen ($v + a$) führen zur Formation der *forward* Schocks, die langsamen, einwärts laufenden Wellen ($v - a$) zu *reverse* Schocks.
Dies stimmt damit überein, daß die *forward* Schocks schneller als die *preshock* und *postshock* Strömung sind, die *reverse* Schocks langsamer als beide. Weiterhin ist an den *forward* Schocks die Geschwindigkeit groß, wo die Dichte groß ist (0^0 Phasendifferenz), an den *reverse* Schocks die Geschwindigkeit groß, wo die Dichte klein ist (180^0 Phase).

Bezüglich der *relativen Stärke* von *reverse* und *forward* Schocks kann folgendes Argument gegeben werden: Die Strahlungsbeschleunigung g ist $\sim \exp(-\tau)$. *Auf*tauchen $-\delta\tau$ aus dem Schatten umgebenden Materials bewirkt ein größeres absolutes δg, also eine größere Wachstumsrate als *Ein*tauchen $+\delta\tau$, dies aufgrund der Terme ($\sim \delta\tau^2$) zweiter Ordnung in der Entwicklung der Exponentialfunktion. Auftauchendes Material ist aber mit *reverse* Schocks verknüpft, womit diese stärker sein sollten als die *forward* Schocks. Eine lineare Stabilitätsanalyse (Owocki & Rybicki, 1984) führt auf eine Dispersionsrelation für Wellen im Wind, welche für *einwärts* laufende Wellen ($\rightarrow$ *reverse* Schocks) größere Wachstumsraten ergibt als für *auswärts* laufende.

6.3 Zeitlich gemittelte Windstruktur

Abbildung 5 zeigt die über Zeiträume von 15 Minuten und einer Stunde gemittelte Windstruktur,

$$\bar{v}(r) = \frac{1}{t_{\rm end} - t_{\rm sta}} \int_{t_{\rm sta}}^{t_{\rm end}} dt\; v(r,t) \qquad \text{usw.} \tag{6.6}$$

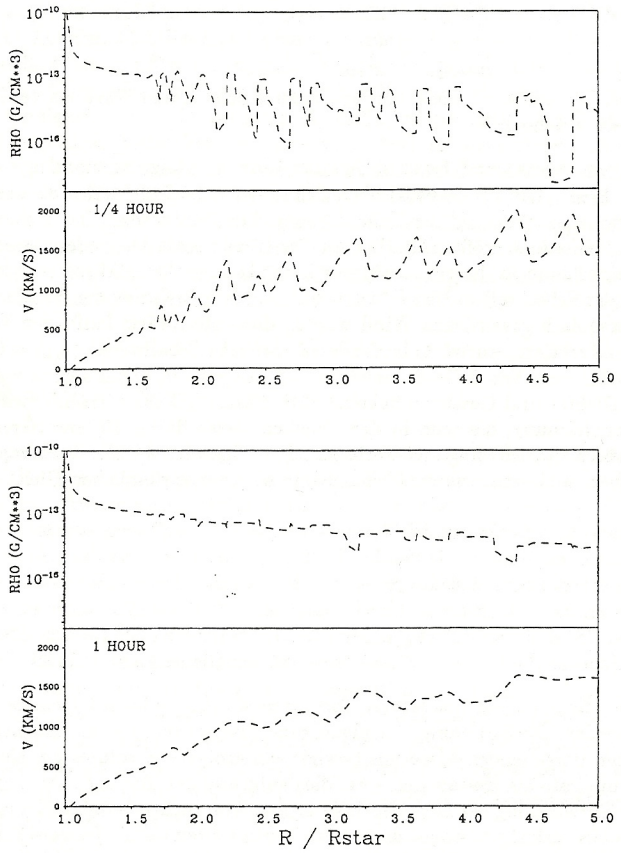


Abb. 6.5. Zeitlich gemittelte Windstruktur nach 1/4 und 1 Stunde.

Bei Mittelung über eine Stunde ergibt sich bereits fast wieder der zugrundeliegende stationäre CAK/PPK-Wind.
UV-Spektren sehr leuchtkräftiger galaktischer Sterne wie ζ Puppis oder α Cam können in nur 10 Sekunden aufgenommen werden. Typische *IUE*-Belichtungszeiten entfernter, jedoch nur schwach verröteter galaktischer Sterne liegen im Bereich von Minuten. Da selbst nach Mittelung über 15 Minuten in Abbildung 5 die Windstruktur noch deutlich vorhanden ist, sollten UV-Linienprofile dann gute Indikatoren für die *momentane* Windstruktur sein. Belichtungszeiten stark verröteter oder extragalaktischer Objekte

liegen dagegen im Stundenbereich. (Linienentstehung und zeitliche Mittelung sind jedoch *nicht* beliebig vertauschbar; der richtige Weg zum Vergleich der Windmodelle mit (längeren) Beobachtungen ist daher die Linienbildung in einem *momentanen* strukturierten Wind und anschließende zeitliche Mittelung der Profile.)

6.4 Massenkoordinate

Gut *beobachtbar* werden in einem strukturierten Wind nur die dichten Schalen sein; das Zwischenschalenmedium ist zu stark verdünnt, um noch signifikante Beiträge zum Strahlungsfeld zu geben (außer möglicherweise in den blauen Kanten starker P Cygni Linien (Henrichs, 1990, Prinja, 1992, Puls et al., 1993; vgl. hierzu auch Abschnitt 7.3). Dies legt die Einführung einer Massenkoordinate M anstelle des Radius r nahe (Owocki et al., 1988),

$$M(r) \sim \int_{r_0}^{r} dr'\, r'^2\, \rho(r'). \tag{6.7}$$

Abbildung 6 zeigt die Windstruktur gegen diese Massenkoordinate (zwischen 0 und 1 normiert) aufgetragen. Die Ziffern in Abb. 6 bezeichnen dieselben *reverse* Schocks wie in Abb. 1. Die Schalen, die über den Radius aufgetragen extrem schmal erscheinen, dominieren auf der (linearen) Massenskala gegenüber dem dünnen Zwischenschalenmaterial.
Im Geschwindigkeitsfeld sind jetzt beide Arten von Schocks klar getrennt. Deutlich zu erkennen sind auch die durchwegs negativen Geschwindigkeitsgradienten innerhalb der Schalen. Dies *könnte* ein numerischer Effekt sein, da die Ausschmierung von *forward* und *reverse* Schock über die ganze Schale hinweg erfolgt (innerhalb der Schalen liegen nur wenige Gitterpunkte).

Nimmt man in Abb. 6 die Hochgeschwindigkeitsspikes bei extrem niedrigen Dichten heraus, die praktisch kein Material enthalten, so verbleiben ein Dichte- und Geschwindigkeitsfeld, welche in erstaunlich guter Übereinstimmung mit dem stationären CAK/PPK-Wind sind. Die beobachtbaren UV- und optischen Spektren sollten daher in erster Näherung in einem stationären und instabilen Wind nicht zu verschieden sein! Dies wird durch quantitative Linienformationsrechnungen bestätigt, siehe Puls, Owocki & Fullerton (1993).

Als Grund, daß die Haupt*masse* des strukturierten Windes einem CAK/PPK-Geschwindigkeitsfeld folgt, kann angeführt werden, daß die strukturanregenden Schallwellen nur wenig *Energie* in den Wind transportieren; denn eine Schallwelle mit von erster Ordnung kleiner Amplitude hat Energie von zweiter Ordnung, siehe Landau & Lifschitz VI (1991) §65.

6.5 Zeitserie der Windentwicklung

Abbildung 7 zeigt eine Serie von Momentaufnahmen der Massenverlustrate aufgetragen gegen den Radius, über den Zeitraum von $t = 6\frac{3}{4}$ h bis $t = 18\frac{1}{2}$ h. Die Spikes in der Massenverlustrate sind die dichten Schalen, der in $\dot{M}$ nahezu konstante Bereich stellt das Zwischenschalenmedium dar. (Die $\dot{M}$-Skala ist im linken und rechten Bild verschieden.)

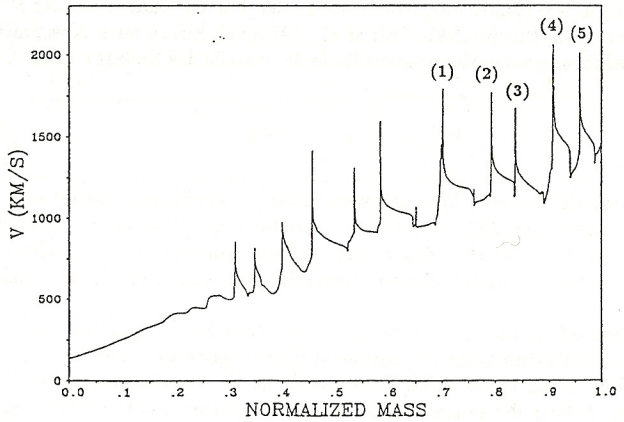


Abb. 6.6. Windstruktur aufgetragen gegen lineare Massenskala (normiert zwischen 0 und 1).

Bis etwa 9,5 Stunden wandert die Störung des Windes scheinbar nach innen. Eine echte Ausbreitung hin zu kleinen Radien ist aber im (hoch) supersonischen Wind, der jegliche Störung nach außen advektiert, nicht möglich. Die Erklärung für das scheinbare Einwärtswandern ist die Abhängigkeit der instabilen Wachstumsrate vom Geschwindigkeitsgradienten, $\omega_b \sim v'$ (siehe (5.12)), wonach in Bereichen großer Geschwindigkeitsgradienten die Störungsamplitude schneller anwächst.

Nach etwa 12 Stunden ist der *transiente* Bereich (mit einer Vielzahl von Wellen) durchlaufen, die Umwandlung vom anfänglich instabilen Zustand ist vollzogen, und der Wind hat einen neuen *stabilen*, streng periodischen, zeitabhängigen Zustand erreicht.
Ab etwa 10 bis 11 Stunden werden die Schalen in zeitlichen Abständen von 5000 Sekunden, d. i. die Periode der photosphärischen Schallwellen, in *Paaren* oder *Tripeln* „abgeworfen“: Im Bereich von etwa 1,35 bis 1,5 Sternradien (also einem sehr engen Bereich) werden *gleichzeitig* zwei oder drei Schalen sichtbar.

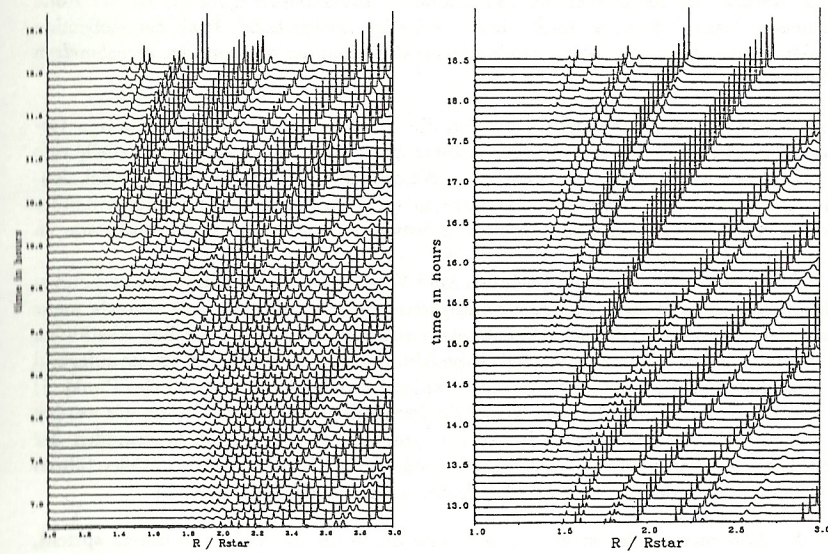


Abb. 6.7. Zeitliche Entwicklung der Massenverlustrate im instabilen Wind.

(In Tabelle 1 wurde die Wellenlänge der Schallwellen mit 0,0087 Sternradien angegeben. Der Abstand der Schalen in Abb. 7 aus aufeinanderfolgenden 5000 s Auswürfen ist jedoch typischerweise 0,5 Sternradien, also mehr als einen Faktor 50 größer. Dies ist ein durch das unterliegende Geschwindigkeitsfeld bedingter Effekt. Der Abstand zweier Teilchen, die in einem stationären Geschwindigkeitsfeld $v(r)$ *treiben*, ist an verschiedenen Stellen r_1 und r_2 einfach $\Delta r_1/\Delta r_2 = v_1/v_2$.)

6.6 Schalenstöße

Die gleichzeitig in unmittelbarer Nachbarschaft zueinander entstehenden Schalen haben eine ausgeprägte Tendenz zur *Kollision* untereinander. Außerhalb von 3 Sternradien (dem äußeren Rand dieser Rechnung) ist von den ursprünglich zwei bis drei gleichzeitig entstandenen Schalen nur eine einzige übrig. Aus Abb. 7 wird nicht klar, inwieweit es zur Kollision von Schalen aus aufeinanderfolgenden 5000 s Zyklen kommt. Bis zu 3 Sternradien ist *keine* solche Kollision eingetreten. Die Stöße führen *immer* zu einem *Verschmelzen* der beiden stoßenden Schalen, und die neu entstandene hat immer einen höheren Massenverlustpeak als die beiden stoßenden; in einem Fall (nämlich dem Stoß

bei 2 Sternradien der beiden bei 13,5 Stunden entstandenen Schalen) ist die Höhe des neuen Peaks doppelt so hoch wie der jeweilige (gleich hohe) Peak der stoßenden Schalen. Diese lagern sich somit eindeutig *nicht* aneinander an, sondern *verschmelzen* miteinander.

Diese Stöße wären nicht möglich, würden die Schalen nur in einem *stationären* Geschwindigkeitsfeld $v(r)$ *treiben* (in der englischsprachigen Literatur als „the shells ride the wind" bezeichnet), wie beispielsweise in Waldron et al. (1993) der Fall. Alle Schalenbahnen wären dann untereinander identisch, im (r,t) Diagramm also nur gegeneinander parallel verschoben; da die Schalen nicht sternwärts laufen können, kann es dann zu keinem Stoß kommen.
Kollisionen *sind möglich* unter folgenden zwei Voraussetzungen: i) die Schalen können sich untereinander in ihren Laufgeschwindigkeiten beeinflussen (wodurch sie nicht mehr nur einfach treiben), ii) die Schalen entstehen *nicht* in konstanten zeitlichen Abständen Δt. Punkt i) ist im Wind realisiert durch die Abbremsung einer äußeren Schale aufgrund der Abschattung der photosphärischen Strahlung durch eine innere Schale. Punkt ii) ist ebenfalls erfüllt durch die paar- oder tripelweise Erzeugung der Schalen; wir werden im folgenden finden, daß dies mit der Anregung der *harmonischen* Obermoden der Schallperiode zusammenhängt. Daß beispielsweise Punkt i) allein nicht zu Stößen führen kann (sondern wieder nur zu parallelen Bahnen), ist in Abb. 8 dargestellt.

Für die Abbremsung der auswärtigen Schale durch die nachfolgende innere spricht, daß in Abb. 7 die Bahn der sternnahen zweier stoßender Schalen gleichmäßig konvex gekrümmt ist, die außen laufende dagegen zuerst einer konvexen Bahn folgt, die dann jedoch in eine *konkave* Bahn übergeht, also abgebremst wird.

6.7 Zeitreihenanalyse: Chaos im Wind?

Wir wollen uns einer Zeitreihenanalyse der hydrodynamischen Größen an einem *festen Ort* r zuwenden. Abbildung 9 zeigt die (normierte) Geschwindigkeit am Ort $r = 2R_*$ über einen Zeitraum von mehr als 83 Stunden, entsprechend 60 kompletten 5000 s Zyklen der photosphärischen Schallwellen. Die dominantesten Spikes in Abb. 9 haben diesen Abstand von 5000 s. Mindestens zwei höherfrequente Oszillationen sind sichtbar sowie eine niederfrequente Oszillation als „Schwebung" des 5000 s Signals. Über die ersten $\approx 0,8 \cdot 10^5$ s in Abb. 9 befindet sich der Wind noch im transienten Bereich.

Abbildung 10 zeigt die Fouriertransformierte des Signals aus Abb. 9. Die eingestrahlten photosphärischen Schallwellen sind im oberen Bild am linken Rand, im unteren Bild am rechten Rand als Peak der normierten Höhe 1 zu sehen, bei einer Frequenz von $0,2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$.
Im oberen Bild von Abb. 10 sind die ersten neun *selbst*angeregten *Ober*schwingungen

$$\nu^{(n)} = (n+1)\,\nu_0, \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{6.8a}$$

deutlich erkennbar.

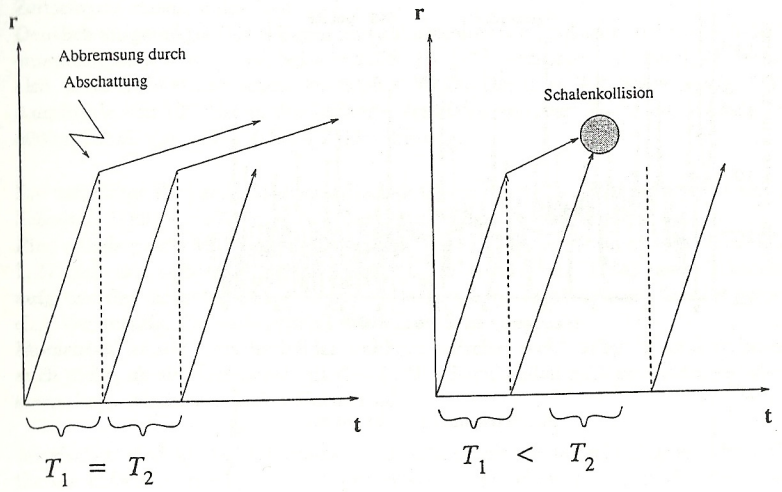


Abb. 6.8. *Links*: Allein durch Beeinflussung einer Schale durch eine andere kann es nicht zu Kollisionen kommen. Diese sind erst möglich, wenn die Schalen weiterhin in *nicht* regelmäßigen Abständen aufeinander folgen (*rechts*).

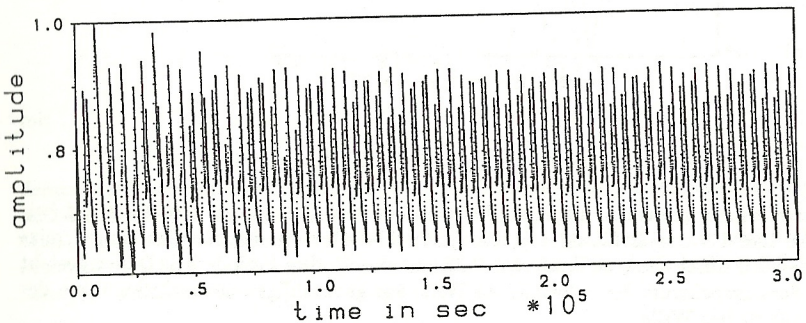


Abb. 6.9. Zeitserie der (normierten) Geschwindigkeit an einem festen Ort im instabilen Wind.

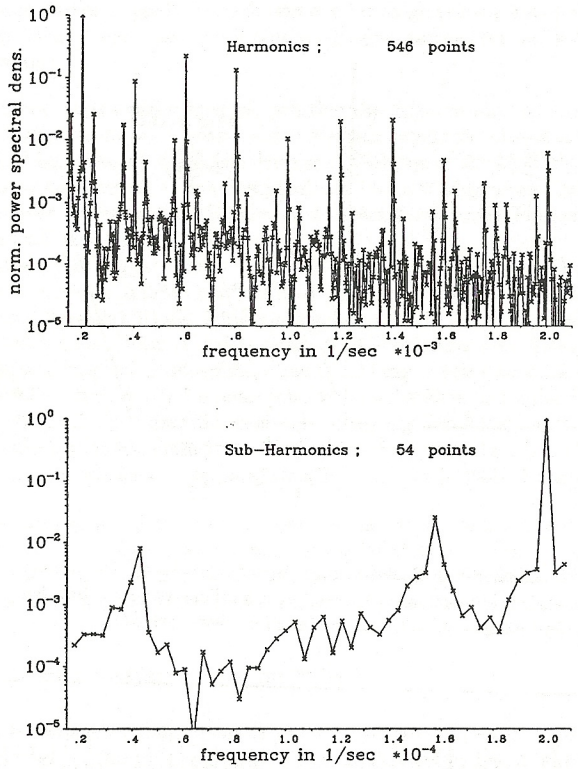


Abb. 6.10. Fouriertransformation des Windsignals aus Abb. 9.

Oberschwingungen treten allgemein bei *nichtlinearen* (kollektiven) Prozessen auf (wir folgen hier Landau & Lifschitz (1991) §102, S. 494): Eine ursprünglich sinusförmige Welle wird durch diese *deformiert*, behält dabei aber ihre Periode bei. Daher besteht das Fourierspektrum der deformierten Welle aus ganzzahligen Oberschwingungen der ursprünglichen Welle.

Im unteren Bild von Abb. 10 wären die Subharmonischen der 5000 s Schwingung zu finden,

$$\nu_{(n)} = (n+1)^{-1}\,\nu_0, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{6.8b}$$

(Die schlechtere Qualität (weniger Punkte) des subharmonischen Spektrums liegt an der

geringeren Zahl von Wellenzügen über den betrachteten Zeitraum hinweg – andererseits muß die *hochfrequente* Seite des Spektrums im numerischen Rauschen des einzelnen Zeitschritts enden, siehe Abb. 10.)
Deutlich ausgeprägte Peaks liegen im subharmonischen Spektrum bei $\nu = 4,3 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$, entsprechend $n = 4,6$, und bei $\nu = 1,58 \cdot 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$, entsprechend $n = 1,27$, beide sind also *keine* Subharmonischen der 5000 s Welle. Die $n = 4,6$ Schwingung mit einer Amplitude von 10^{-2} ist in der Zeitserie *deutlich* erkennbar: Es ist die Modulation der 5000 s Schwingung über 4 bis 5 Zyklen hinweg.

Ein möglicher Weg zum deterministischen Chaos führt über Frequenz*halbierung* (siehe Schuster, 1989) – wofür in Abb. 10 kein Anzeichen zu sehen ist.
Eine naheliegende Möglichkeit wäre, die subharmonischen Komponenten (speziell: $n = 1,27$) mit den selbstangeregten Wellen von Owocki et al. (1988) (siehe Abschnitt 9) aufgrund des variablen Courantschen Zeitschrittes zu identifizieren. Dies ist jedoch nur eine Vermutung, die noch geprüft werden muß.
Momentan ist die Ursache beider Subharmonischer nicht bekannt, und insbesondere auch nicht, ob sie überhaupt mit den 5000 s Schallwellen zusammenhängen oder aber stern- bzw. windintrinsischer Natur sind.

Inzwischen sind in der Astrophysik Zeitreihenanalysen mittels einiger in der Chaostheorie entwickelter Methoden üblich geworden (Buchler et al., 1985). Eine sehr leistungsfähige Methode ist die von Ruelle (als *priv. comm.* zitiert in Geisel, 1985, S. 168) und Takens (1981) entwickelte Methode zum Auffinden von Phasenraumattraktoren der Dimension $2 < n < 3$ aus einem zeitlichen Signal $S(t)$ (siehe Schuster, 1989). Die Idee ist, $S(t)$ über die 3 Koordinaten $S(t), S(t+T), S(t+2T)$ aufzutragen, wobei die Zeitverschiebung T etwa ein fünftel einer „typischen" im System auftretenden bzw. erwarteten Periode sein sollte. Dies soll am Beispiel des Signals

$$S(t) = \sin\left(2\pi\frac{t}{T_1}\right) + \sin\left(2\pi\frac{t}{T_2}\right), \tag{6.9a}$$

mit

$$T_1 = 5000\,\mathrm{s}, \qquad T_2 = 5000/\sqrt{5}\,\mathrm{s}, \tag{6.9b}$$

demonstriert werden. Das Signal ist in Abb. 11 zusammen mit seinem Fourierspektrum und der Ruelle-Takens-Analyse dargestellt.
Man erkennt den zweidimensionalen Phasenraumtorus aufgrund der inkommensurablen Frequenzen. (Die Oberfläche des Torus wird im Laufe der Zeit gleichmäßig gefüllt und damit gleichmäßig schwarz.)

Abbildung 12 zeigt die Ruelle-Takens Analyse des Windsignals aus Abb. 9 (wobei der dort noch vorhandene transiente Bereich hier weggelassen wurde, da er das Bild extrem stark verrauscht). Es ergibt sich aufgrund der vielen Oberschwingungen im Signal ein verflochtenes Gebilde, das jedoch *keinerlei* Verzweigungen oder disjunkte Bereiche zeigt, die Hinweis auf chaotisches Verhalten wären (→ seltsamer Attraktor).

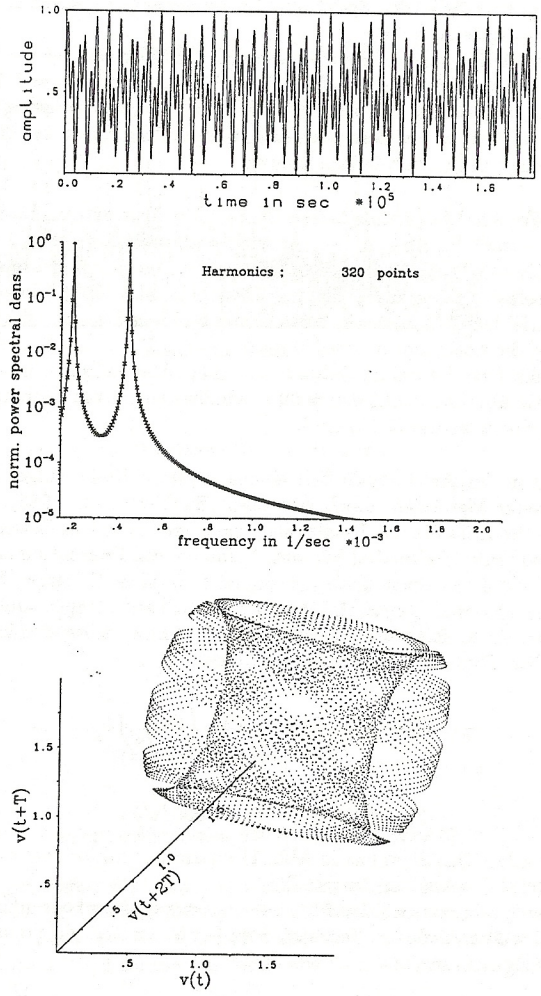


Abb. 6.11. *Oben:* Zeitreihe des Signals (9), bestehend aus zwei inkommensurablen Frequenzen. *Mitte:* Zugehöriges (numerisches) Fourierspektrum. *Unten:* Ruelle-Takens-Analyse der obigen Zeitreihe.

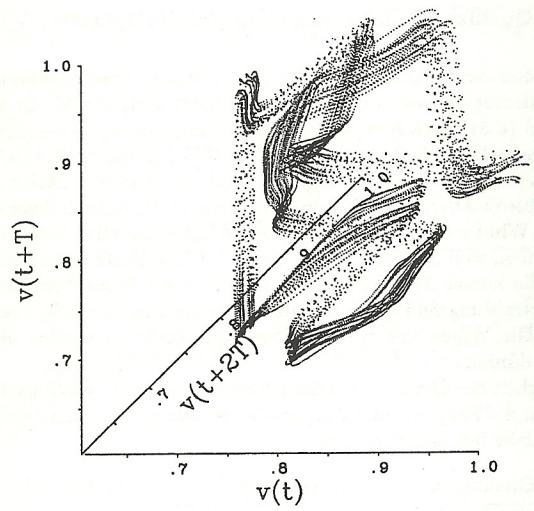


Abb. 6.12. Ruelle-Takens-Analyse des instabilen Windsignals aus Abb. 9.

(Fernerhin kommt es für dieses Windsignal zu *keiner* Ausschmierung einer anfänglichen ϵ–Kugel im Phasenraum, und auch Poincaresche Wiederkehrabbildungen ergeben für das Windsignal keine Anzeichen von deterministischem Chaos.)

Die vorgestellten Windmodelle liegen also gerade erst jenseits der Stabilitätsgrenze, in einem Bereich, in dem eine streng periodische Strömung aufgrund nur einer dominanten instabilen Mode entsteht. Der Wind erscheint nur kompliziert aufgrund der vielen auftretenden Oberschwingungen (wobei jedoch die Rolle der zwei niederfrequenten Schwingungen noch unklar ist).

Bei weiterem Anwachsen der mit der Instabilität der Strahlungsbeschleunigung verbundenen dimensionslosen Zahl (entsprechend der Reynolds- oder Rayleighzahl; hier ist diese noch nicht bekannt) sollten neue, voneinander unabhängige (daher i. a. inkommensurable) instabile Moden auftreten. Nach Landau ist *Turbulenz* schließlich die Anregung unendlich vieler instabiler Moden, nach Ruelle & Takens (1971) kann Turbulenz (zumindest Chaos) schon bei drei angeregten instabilen Moden durch den Zerfall des instabilen (!) dreidimensionalen Torus in einen seltsamen Attraktor geringerer, fraktaler Dimension eintreten: Es ergibt sich stochastisches Verhalten des Mediums bei nur wenigen angeregten Freiheitsgraden.

6.8 Optisch dicke Quellfunktion. Verschiedene Schallamplituden & -perioden

Nach dieser Diskussion des Windmodells mit optisch dünner Quellfunktion in der Linienstrahlungsbeschleunigung sollen in diesem Abschnitt variable Winde mit *optisch dicker* Quellfunktion (4.5) betrachtet werden. Dabei kann entweder die optisch dicke Quellfunktion des unterliegenden *stationären* CAK/PPK-Modells verwendet werden (die also zeitlich konstant ist) oder die jeweilige optisch dicke Quellfunktion der *aktuellen* Windstruktur. Wie in Abschnitt 5.3 diskutiert, bewirkt die optisch dicke Quellfunktion des stationären Windes eine Stabilisierung des Windes (negative Wachstumsraten) bis zu gewissen Radien, weil $Sr^2/I_* R_*^2 > 0,5$ ist – im Gegensatz zur optisch dünnen Quellfunktion, für die immer $Sr^2/I_* R_*^2 < 0,5$, außer an der Sternoberfläche ($= 0,5$), wodurch das Streustrahlungsfeld das instabile Anwachsen nicht völlig kompensieren kann (Puls, 1993). Die Winde mit optisch dicker Quellfunktion werden also stabiler sein als mit optisch dünner.
Neben der Abhängigkeit der Struktur von der verwendeten Quellfunktion soll hier auch die Abhängigkeit von der Frequenz und Amplitude der anregenden Schallwellen anhand der folgenden 5 Modelle betrachtet werden:

Nr.	Quellfunktion	Amplitude A (%)	Periode T (s)
1	dünn	10	5.000
2	dünn	25	10.000
3	stat. dick	1	5.000
4	stat. dick	10	5.000
5	akt. dick	10	5.000

Diese Modelle wurden, zu einem späteren Vergleich mit stationären Windrechnungen unter Einbezug des EUV-Strahlungsfeldes aufgrund von Schockemission (Pauldrach et al., 1993), mit den stellaren Parametern für ζ Pup aus der zuletzt genannten Arbeit berechnet. Diese lauten

$$T_{\rm eff} = 42.000\,{\rm K}, \qquad M = 52\,M_\odot, \qquad R_* = 19\,R_\odot, \qquad Y = 0,12.$$

Die Sternmasse ist mit 52 $M_\odot$ anstelle der bisherigen 42 $M_\odot$ angenommen; die von 0,16 auf 0,12 geänderte Heliumhäufigkeit dürfte nur einen minimalen Einfluß haben.
Es werden wieder 3.000 logarithmische Gitterpunkte im Bereich von einem bis fünf Sternradien verwendet, und der Wind kann sich über 24 Stunden entwickeln.
In Abb. 13 für Modell 1 ist der Wind außerdem zum Zeitpunkt 24 Stunden + 34 Minuten wiedergegeben, und man erkennt hier (nochmals), daß die Struktur im wesentlichen nach außen advektiert wird. In dieser zweiten Momentaufnahme sind, um die numerische Auflösung kenntlich zu machen, nur die Werte auf den Gitterpunkten gezeichnet.

In den Modellen 1 und 2 (A = 10 und 25%) mit optisch dünner Quellfunktion sieht man, auch im Vergleich mit dem Modell in Abbildung 1 (A = 1%), nur eine *geringe*

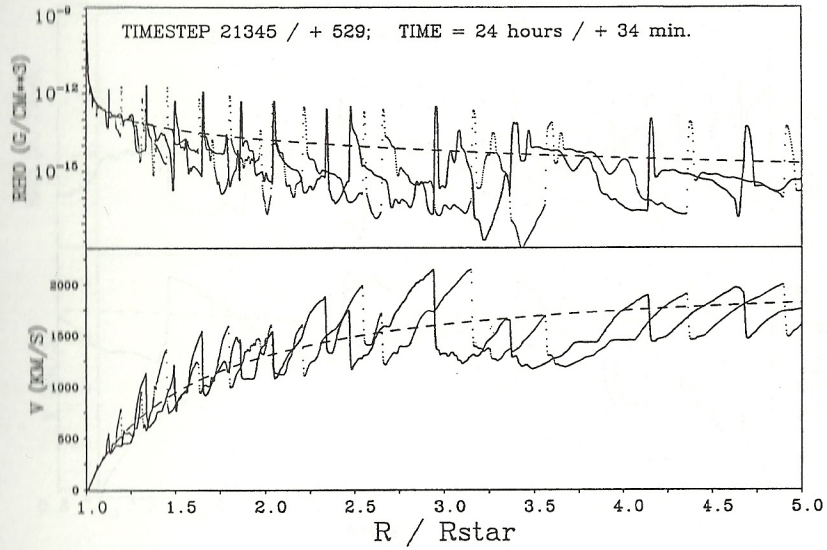


Abb. 6.13. Optisch dünne Quellfunktion, $A = 10\%, T = 5000$ s (Modell 1).

Abhängigkeit der *Amplitude* der Windstruktur von der Amplitude der photosphärischen Schallwellen. Bereits die allerersten Schocks bei etwa 1,2 Sternradien sind vergleichbar stark. Das instabile Wachstum der Störungen im Wind scheint somit in einen nichtlinearen *Sättigungs*bereich gelangt zu sein.
In vielen Fällen instabilen Wachstums konvergiert die Amplitude in diesem Sättigungsbereich gegen *einen* bestimmten Wert, der *unabhängig* von der ursprünglichen infinitesimalen Amplitude ist! Dieses Verhalten wird beispielsweise im Landauschen Modell beschrieben, siehe Landau & Lifschitz (1991) und Drazin & Reid (1981).
Es ist aber auch möglich, daß diese (nahezu) konstante Windamplitude bei verschiedener photosphärischer Störung nicht mit der Windinstabilität zusammenhängt, sondern mit dem Aufsteilen der Schallwellen im subsonischen, exponentiell abfallenden Dichtefeld. Wie in Abschnitt 3.11 dargestellt, führt dies bereits zu Schocks, und es kann sich bezüglich dieses Wachstums (das mit *keiner* Instabilität verknüpft ist) bereits eine Sättigungsamplitude der Schockwellen eingestellt haben, die dann wiederum erst die Windinstabilität triggern. Wir geben weiter unten (bei der Behandlung der Modelle mit optisch dicker Quellfunktion) ein Argument, daß dies hier noch nicht der Fall ist.

Der Schalen*abstand* verdoppelt sich ungefähr von Modell 2 (T = 5.000 s Schallwellen)

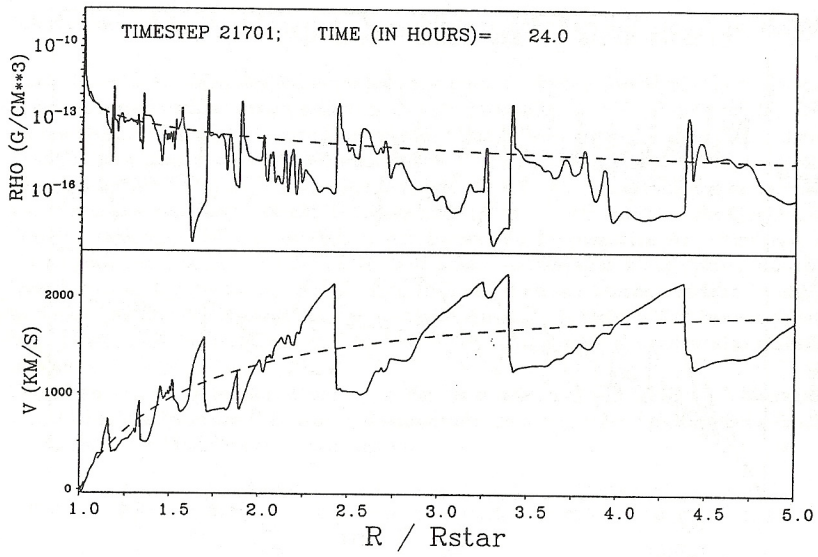


Abb. 6.14. Optisch dünne Quellfunktion, $A = 25\%, T = 10000$ s (Modell 2).

zu Modell 3 ($T = 10.000$ s). Es ist im Detail schwierig, die Zahl der Schalen (in einem gewissen Radiusbereich) in Abhängigkeit von der Periode der Schallwellen festzustellen: die angeregten *Ober*schwingungen (siehe Abb. 10) entsprechen *Sub*schalen (siehe Abb. 7), deren Amplitude nur um einen Faktor 3 bis 10 kleiner zu sein braucht als die Grundamplitude.
Die Amplitudenhöhe der Windstruktur sollte mit dem verfügbaren freien Raum zwischen den Schalen zusammenhängen (Owocki et al., 1988), in dem für große Abstände das dünne Material auf höhere Geschwindigkeiten beschleunigt werden kann. Jedoch treten in Modell 2 breite Bereiche konstanter niedriger Geschwindigkeit und konstanter mittlerer Dichte (höher als die übliche Interschalendichte) *vor* dem *forward* Schock auf. Der eigentliche Geschwindigkeitsanstieg zum *reverse* Schock verläuft in Modell 2 nahezu gleich steil wie in Modell 1.

In allen Modellen mit *optisch dicker* Quellfunktion ist, wie erwartet, bedeutend weniger Struktur zu sehen als bei optisch dünner Quellfunktion. In Modell 3 (mit $A = 10\%$) ist die Windstruktur stärker ausgeprägt als in Modell 4 ($A = 1\%$): Die Instabilität ist also noch im exponentiellen, von der anfänglichen Störung abhängigen Wachstumsregime. Insbesondere ist die Wachstumsrate der Instabilität bei großen Radien im *kleinen* Ge-

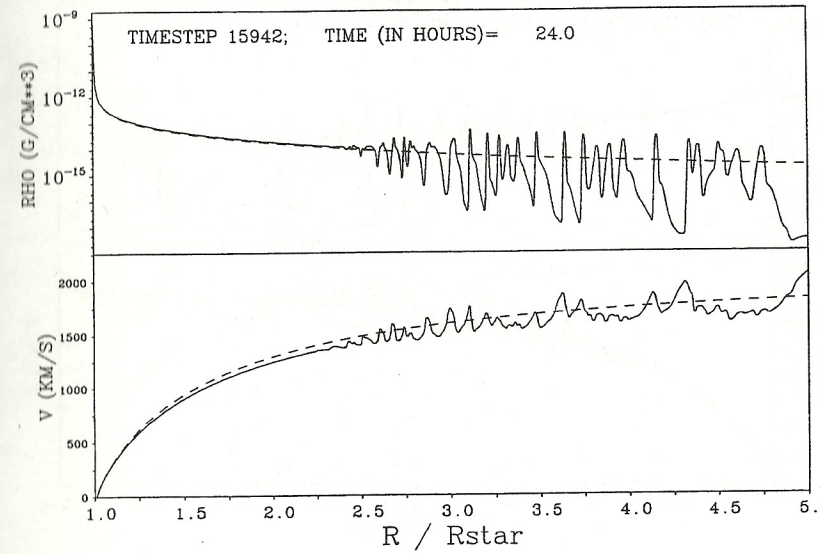


Abb. 6.15. Stationäre optisch dicke Quellfunktion, $A = 1\%, T = 5000$ s (Modell 3).

schwindigkeitsgradienten (des CAK/PPKschen Startmodells) klein, so daß es außen zu keiner starken Struktur mehr kommen kann – diese kann sich nur im *steilen* Geschwindigkeitsfeld nahe am Stern mit entsprechend großer Wachstumsrate entwickeln.

In Modell 4 sind (im Ansatz) wieder Schalen mit 5.000 s Separation, entsprechend der Grundperiode, zu erkennen. In Modell 3 sind hingegen keine Schalen sichtbar, dafür sind die Grundperiode und die *erste* Oberschwingung vergleichbar stark angeregt, so daß die „Struktur" insgesamt doppelt so fein wie in Modell 4 erscheint.
In Modell 3 ($A = 1\%$) setzt die Struktur bei 2,5 Sternradien ein, in Modell 4 ($A = 10\%$) bei 1,7 Sternradien. Dies ist eine eindeutige Korrelation des Radius erster Struktur mit den photosphärischen Amplituden, woraus geschlossen werden kann, daß die Schallwellen sich im subsonischen exponentiellen Dichtefeld noch *nicht* zu einer konstanten Sättigungsamplitude aufgesteilt haben. Bezüglich der nahezu von der photosphärischen Amplitude unabhängigen Amplitude der Windstruktur in Modellen mit optisch dünner Quellfunktion heißt daß, das die Instabilität bei diesen tatsächlich im *Sättigungs*bereich ist.

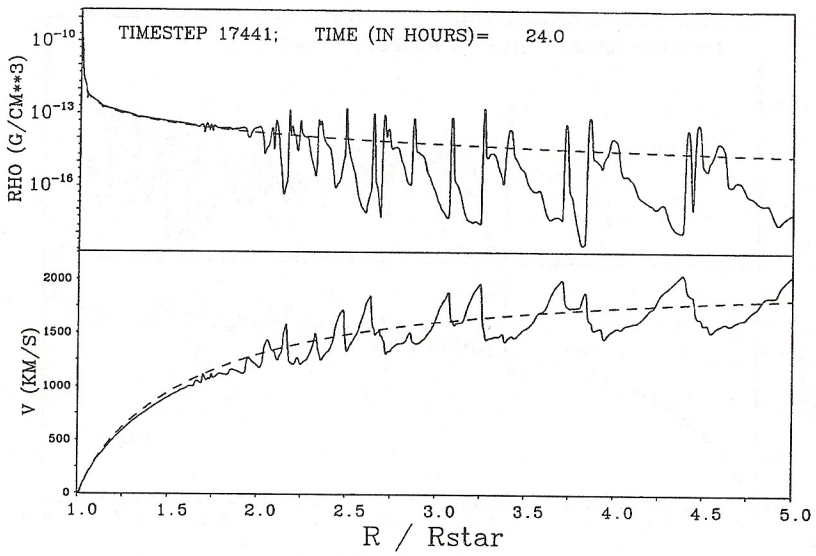


Abb. 6.16. Stationäre optisch dicke Quellfunktion, $A = 10\%, T = 5000$ s (Modell 4).

Bei der *aktuellen* optisch dicken Quellfunktion (Modell 5) setzt die Struktur beim selben Radius ein wie in Modell 4. Dies ist klar, denn beide Modelle haben dieselbe photosphärische Amplitude ($A = 10\%$), und die aktuelle optisch dicke Quellfunktion ist in glatten Windbereichen (also *bis* zum Einsetzen der Struktur) identisch zur stationären dicken Quellfunktion.
In Modell 5 ($A = 10\%$) ist weniger Struktur zu sehen als in Modell 3 ($A = 1\%$). Die aktuelle optisch dicke Quellfunktion ist also die am stärksten stabilisierende. Der Grund ist folgender: In Bereichen großer Geschwindigkeitsgradienten geht $S_{\rm act} r^2 / I_* R_*^2$ gegen den Wert 0,75 (siehe Puls, Owocki & Fullerton, 1993, sowie folgende Abbildung 18) und ist damit stärker stabilisierend als die stationäre dicke Quellfunktion, für die maximal (und nur für hinreichend kleine Radien) $S_{\rm stat} r^2 / I_* R_*^2 \gtrsim 0,5$ ist (die Stabilitätsgrenze ist 0,5).
Alle drei normierten Quellfunktionen $(S/I_*) \cdot (r/R_*)^2$ sind in Abbildung 18 dargestellt. Die optisch dünne Quellfunktion erreicht nur direkt am Stern den stabilisierenden Wert 0,5. Die *stationäre* optisch dicke *und* die *aktuelle* optisch dicke Quellfunktion steigen nahe dem Stern zunächst auf Werte über 0,5, womit der Wind stabil wird. Erst ab gewissen Radien ($r \approx 1,1\, R_*$) fallen beide unter 0,5. Der Grenzwert für große Radien

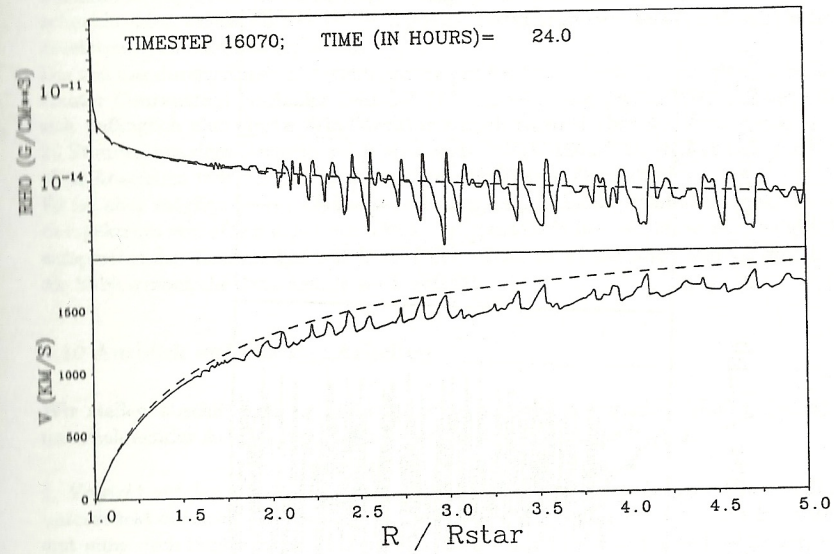


Abb. 6.17. Aktuelle optisch dicke Quellfunktion, $A = 10\%, T = 5000$ s (Modell 5).

der normierten optisch dünnen Quellfunktion ist 1/4, der stationären optisch dicken ist 0. Obwohl die aktuelle optisch dicke Quellfunktion zwar schnell kleiner werden kann als die stationäre optisch dicke, überwiegt bezüglich der Winddynamik der Einfluß der stabilisierenden Bereiche $(S/I_*) \cdot (r/R_*)^2 > 0,5$, mit einem Maximum von 0,75.

Daß in Modell 5 die Geschwindigkeit immer unter dem stationären CAK/PPK Wert liegt, ist durch die Quellfunktion verursacht: Da diese vom aktuellen Geschwindigkeitsgradienten abhängt, kommt es zu einer *Asymmetrie* in der Beschleunigung aufgrund des diffusen Strahlungsfeldes (die Geschwindigkeit wächst vor dem *reverse* Schock über weite Strecken gleichmäßig an und fällt im Schock abrupt ab) und damit einer Abänderung der gesamten Strahlungsbeschleunigung.

6.9 Der Zeitschritt

Die Rechnungen in Owocki et al. (1988) (mit reiner Photonen*absorption*) zeigen das Phänomen *selbstangeregter*, periodischer *Wellen* im Wind, *ohne* Einstrahlung photo-

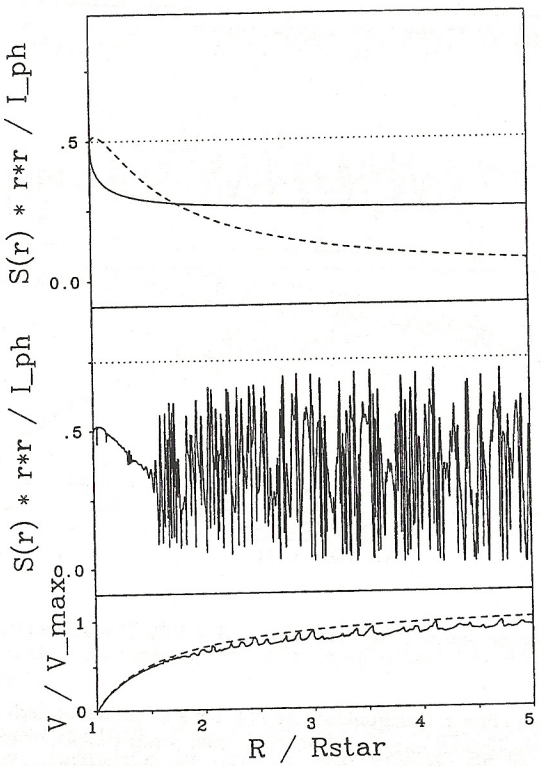


Abb. 6.18. Normierte Quellfunktionen. *Oben*: Optisch dünn (durchgezogen) und stationär optisch dick (gestrichelt); die Punkte sind die Stabilisierungsgrenze. *Mitte*: Aktuell optisch dick, zum Zeitpunkt $t = 24$ h; die Punkte sind der Maximalwert 0,75 nach Puls, Owocki & Fullerton (1993). *Unten*: Geschwindigkeitsfelder nach CAK/PPK und Modell 5 (Abb. 17), woraus die optisch dicken Quellfunktionen berechnet wurden.

sphärischer Schallwellen. (Diese selbstangeregten Wellen haben bei Owocki et al. (1988) eine Periode von $\approx$ 5.000 s.) Als Ursache hierfür wurde die Verwendung eines Zeitschritts mit fester Courantzahl gefunden (Owocki, 1991, mündl. Mitteilung): Läuft ein Wellenberg in der Geschwindigkeit $v(r)$ aus dem räumlichen Gitter hinaus, so verringert sich dabei (nachdem das Maximum des Wellenbergs über den Rand hinaus ist) die Maximalgeschwindigkeit innerhalb des Rechenbereichs, und der numerische Zeitschritt $\Delta t = \sigma \min[\Delta r/(|v| + a)]$ wächst. Der periodisch veränderliche Zeitschritt (zwischen

aufeinanderfolgenden Wellenbergen) bedingt periodisch veränderliche numerische Abschneidefehler, welche als *Störungen* durch die Instabilität *verstärkt* den einmal in Gang gesetzten Zyklus aufrechterhalten.
Die von uns durchgeführten Rechnungen zeigen bei konstantem Zeitschritt und bei konstanter Courantzahl (variabler Zeitschritt) *keine* selbstangeregten Wellen: Zwar bildet sich anfänglich eine starke Windstruktur aus, diese wird aber im Verlauf von 10 bis 20 Stunden aus dem Rechenbereich hinausadvektiert; danach entwickelt sich der Wind ohne Anzeichen weiterer Struktur zu einem *stationären* Zustand hin.
Es ist aber möglich (s. o.), daß eine selbstangeregte Mode im subharmonischen Fourierspektrum von $v(t)$ mit optisch dünner Quellfunktion beobachtet wurde. Es gilt, die entsprechenden Rechnungen mit festem Zeitschritt zu wiederholen und zu prüfen, ob die Subharmonische dann immer noch auftritt.

6.10 Ausblick auf künftige Arbeiten

Wir stellen abschließend *einige* Stichpunkte zusammen bezüglich künftig (noch) zu unternehmender Arbeiten im Rahmen *isothermer* Windmodelle.

1. *Verzicht auf den Abschneideparameter $\kappa_{\max}$ der Linienverteilungsfunktion.* – Dieser unterdrückt die *extrem* optisch dicken Linien im Wind und macht damit die Instabilität erst numerisch handhabbar. Derzeit sind Rechnungen *ohne* den Abschneideparameter noch nicht möglich.

2. *Intrinsische Variabilität der hydrodynamischen Modelle.* – Gegenwärtige Simulationen von Owocki scheinen auch ohne explizite Störung des Windes zu einer Strukturbildung zu führen, während entsprechende eigene Rechnungen gegen einen stationären Zustand konvergieren. Diese Frage soll (in einem ersten Schritt) durch im Detail vergleichbare numerische Rechnungen (gleiche stellare Parameter, radiale Gitter usw.) mit den beiden Programmen angegangen werden.

3. *Berechnung des* konsistenten *Strahlungsfeldes.* – Dies ist, aufgrund der Komplexität des Strahlungstransports im instabilen Wind, eine wohl nur langfristig zu lösende Aufgabe. Die direkte und vollständige Lösung des Strahlungstransports liegt – bei 10^4 bis 10^5 Zeitschritten der hydrodynamischen Rechnung – jenseits verfügbarer Computerkapazitäten, so daß geeignete Approximationen entwickelt werden müssen. Andererseits ist eine möglichst genaue Behandlung des diffusen Anteils der Linienstrahlungsbeschleunigung unerlässlich, und zwar zum einen wegen der Stabilisierung des Windes aufgrund Reemission (*Line Drag* Effekt), zum anderen wegen des großen Einflußes des diffusen Strahlungsfeldes auf die Ausbreitungscharakteristik von Wellen im Wind und damit auf die sich entwickelnde Windstruktur.

4. *Andere anregende Mechanismen als Schallwellen, insbesondere nichtradiale Pulsationen.* – Dieser Punkt betrifft in erster Linie die Frage nach beobachtbaren Anzeichen der Windvariabilität aufgrund der Instabilität und wie diese Variabilität mit photosphärischen Ereignissen korreliert ist.

5. *Bessere numerische Auflösung der dichten Schalen (→ Lagrangeschema).* – Indem in den instabilen Winden fast die gesamte Materie in schmalen, dichten Schalen konzentriert wird, müssen insbesondere *diese*, als primär beobachtbar, durch die Rechnungen gut aufgelöst werden, was mit dem in vorliegender Arbeit verwendeten Eulerschen Differenzenschema nur bedingt möglich ist.

6. *Zweidimensionale Windrechnungen.* – Obwohl es parallel zur Sternoberfläche keine Instabilität der Strahlungsbeschleunigung gibt, spricht *nichts für* eine *Anregung* weitflächiger horizontaler Strukturen im Wind: Intrinsische Störungen oder (Schall-)Wellen im Wind werden nur eine gewisse horizontale Kohärenz haben, und bei nichtradialen Pulsationen besteht die Möglichkeit der Anregung hoher l-Werte mit entsprechend kleiner Längenskala. Zweidimensionale Rechnungen mit der instabilen Linienstrahlungsbeschleunigung aus Kapitel 4 sind an der derzeit äußersten Grenze verfügbarer Rechnerkapazitäten, sollten aber in naher Zukunft unternommen werden können.

7

Diagnostik variabler Winde

Über den gesamten Spektralbereich elektromagnetischer Wellen hinweg, vom Radiobereich bis zu den Gammastrahlen, manifestiert sich die zeitlich veränderliche Windstruktur. In diesem Kapitel sollen vor allem die entsprechenden Beobachtungsfakten zusammengestellt werden. Insbesondere die *Röntgenemission* variabler Winde steht hierbei im engen Zusammenhang mit dem *Energietransfer* im Wind, für den zeitabhängige Rechnungen erst in Kapitel 9 diskutiert werden. Sie soll jedoch – der Einheit wegen – bereits hier besprochen werden. Wir behandeln die verschiedenen Spektralbereiche vom langwelligen zum kurzwelligen gehend.

7.1 Radiowellen

Die photosphärische Radiostrahlung von OB-Sternen liegt unter der beobachtbaren Grenze (Abbott et al., 1984), jedoch empfängt man ein (starkes) frei-frei Radioemissionsspektrum von der thermischen *Bremsstrahlung* der Elektronen im dichten, ionisierten Wind. Diesem thermischen Spektrum ist häufig ein nichtthermischer Anteil überlagert (zu erkennen am verschiedenen Spektralindex), wie erstmals von Abbott el al. (1984) gefunden wurde. Diese Autoren vermuten als Ursprung der Strahlung einen (unsichtbaren) Begleiter des O-Sterns. White (1985) schlug eine inzwischen favorisierte Interpretation als Radio-Synchrotronstrahlung *relativistischer* Elektronen vor. Die Elektronen werden hierbei durch den Fermiprozeß in Schocks beschleunigt; dies wird in Kapitel 8 genauer dargestellt. Da die Radiophotosphäre $\tau_{\mathrm{Radio}} = O(1)$ sehr weit außen im Wind liegt (typischerweise bei 100 Sternradien), käme dann als beschleunigender Schock auch der *terminal shock* in Frage, der durch den Aufprall des schnellen Windes auf des ruhende interstellare Medium entsteht. Überhaupt ist fraglich, ob es bei solch großen Abständen vom Stern noch durch die radiative Instabilität entstandene Schocks gibt.

7.2 Infrarot

Das frei-frei Infrarot- und Radiospektrum in der isotherm expandierenden Windhülle wurde von Wright & Barlow (1975) und Panagia & Felli (1975) berechnet. Cassinelli & Hartmann (1977) fanden, daß eine Korona an der Windbasis im Infrarotspektrum einen *bump* verursacht, und zwar, wie von Lamers & Waters (1984) diskutiert, in der Umgebung derjenigen Wellenlänge, bei der die gesamte Korona eine optische Dicke von 1 hat; dies ist für typische OB-Überriesen bei etwa 100 bis 1000 μm der Fall. Lamers, Waters & Wesselius (1984) fanden aus IRAS-Daten keinen Hinweis auf einen *bump*, und somit keine Korona, während Wolfire, Waldron & Cassinelli (1985) aufgrund derselben Daten die Existenz einer Korona nicht ausschlossen. – Das thermische Infrarotspektrum

entsteht durch gebunden-frei und frei-frei Prozesse, deren Anzahl $\sim N_H N_e \sim \rho^2$ ist. Bezüglich der zeitlichen Mittelung durch die Beobachtung gilt

$$\langle \rho^2 \rangle > \langle \rho \rangle^2, \tag{7.1}$$

und man kann aufgrund der Klumpung im Wind eine verstärkte Infrarotemission erwarten. Bei den derzeitigen isothermen Windmodellen mit optisch dünner Quellfunktion ist die Klumpung jedoch so groß, daß der Infrarotexzeß deutlich über dem beobachteten liegt, siehe Owocki (1992), Puls et al. (1993).

7.3 UV-Linien

Wir weichen hier von unserer Reihenfolge bzgl. der betrachteten Spektralbereiche ab und behandeln zuerst die UV-Linien und im nächsten Abschnitt die optischen Linien.

Diskrete Absorptionskomponenten

In ungesättigten P-Cygni Profilen beobachtet man (Morton, 1976, Snow, 1977) auf der Absorptionsseite (auf den Beobachter zuströmendes Material) bei Frequenzen entsprechend Windgeschwindigkeiten von etwa 0,5 v_∞ (neueste Werte von Prinja et al. (1992) reichen bis 0,3 v_∞) die plötzliche Entstehung einer *diskreten Absorptionskomponente* (DAC), siehe Abbildung 1. Diese wandert über einen Zeitraum von typischerweise 1 Tag (Prinja & Howarth, 1988) an die blaue Kante des Profils, bis hin zu maximal 0,8 bis 0,9 $v_{\rm edge}$, siehe Abbildung 2. (v_∞ ist als „theoretische" Größe stationärer Windmodelle aufzufassen, $v_{\rm edge}$ als Beobachtungsgröße. Man verwendet dann (siehe z. B. Henrichs et al., 1988) $v_\infty = v_{\rm final,DAC} = 0,8 \ldots 0,9\, v_{\rm edge}$. Dies v_∞ ist um 10 bis 20 % kleiner als das bei der halben Höhe der blauen Flanke gesättigter Profile gewonnene v_∞.) Die Breite des DACs nimmt hierbei von anfänglich bis zu 500 km/s (Prinja, 1992) auf schließlich etwa 300 km/s ab. Das Auftreten der DACs ist nicht chaotisch, sondern periodisch, mit typischen Wiederkehrzeiten von 15 bis 20 Stunden, plus/minus 1 bis 2 Stunden (Prinja et al., 1992), vergleiche Abbildung 3. Die kürzeste Zeitskala der (beobachteten) Variabilität ist 1/2 bis 1 Stunde (Prinja & Howarth, 1988, Henrichs, 1990). Die Amplitude der Variabilität erreicht bis zu etwa 50 % des lokalen Kontinuumlevels. DACs werden meist in ungesättigten UV-Resonanzlinien (Si IV, C IV, N V) beobachtet, seit neustem auch in *subordinate lines* (Linien, deren unterstes Niveau nicht der Grundzustand ist), siehe Fullerton, Gies & Bolton (1992). Ausführliche Diskussionen des DAC Phänomens werden in Prinja & Howarth (1986), Henrichs (1988) und Howarth und Prinja (1989) gegeben.
In typischen OB-Überriesen ist die Si IV Resonanzlinie die am besten zur Beobachtung von DACs geeignete. N V und C IV sind im allgemeinen bereits gesättigt und eignen sich daher zur Beobachtungen der Variabilität des blauen Randes, siehe unten.

Früh konnte gezeigt werden (Lamers, Gathiers & Snow, 1982, Howarth, 1984, Prinja & Howarth, 1986), daß der DAC *kein* Effekt beruhend auf abrupten Verschiebungen im

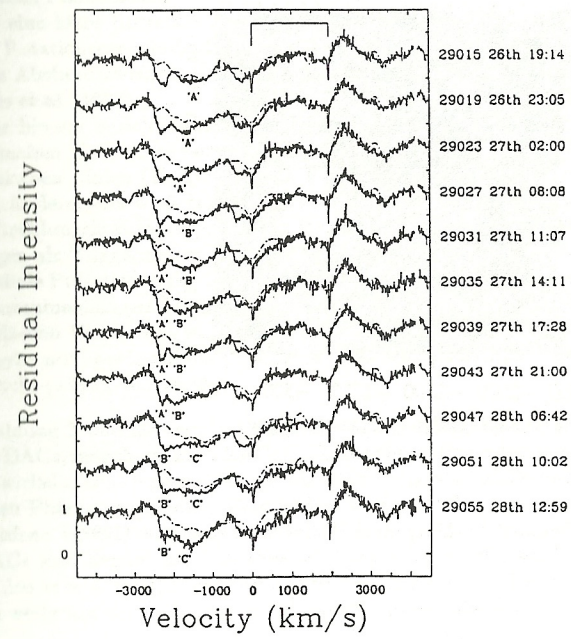


Abb. 7.1. DAC in Si IV. Aus Prinja & Howarth, 1988.

Ionisationsgleichgewicht ist: Linien mit sehr verschiedenem Ionisationspotential zeigen *gleichzeitig* einen DAC.

Das zentrale, bislang ungelöste Problem bzgl. der DAC-Beobachtungen ist deren Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsgesetz. Stationäre Winde haben typischerweise ein β–Geschwindigkeitsfeld (vgl. Anhang 2) mit $\beta = 0,8 \ldots 1$, siehe Pauldrach et al. (1986). Die DACs folgen jedoch Geschwindigkeitsfeldern mit $\beta > 2$ (Prinja, Howarth & Henrichs, 1987, Prinja & Howarth, 1988, Fullerton, Gies & Bolton, 1992, Howarth, 1992, Prinja et al., 1992,), wobei es zu Spitzenwerten von $\beta = 7$ (Fullerton et al., 1992) und $\beta = 9$ (Howarth, 1992) kommen kann. Im krassen Widerspruch hierzu finden Waldron, Klein & Altner (1993) aus denselben IUE-Beobachtungen wie den in Prinja et al. (1992) verwendeten, daß $0,75 < \beta < 1$! Die Erklärung hierzu ist eher knapp (Waldron et al., 1993), nämlich daß es gerade bei niedrigen und mittleren Geschwindigkeiten schwierig sei, die DAC-Beschleunigung zu bestimmen, und es daher stark auf die verwendete Methode ankommt.

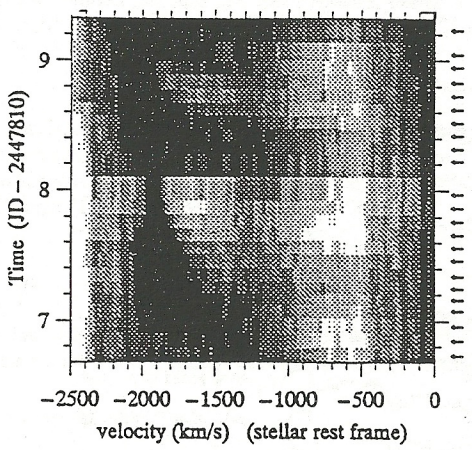


Abb. 7.2. Zeitliche Entwicklung eines DACs. Aus Kaper et al. (1992).

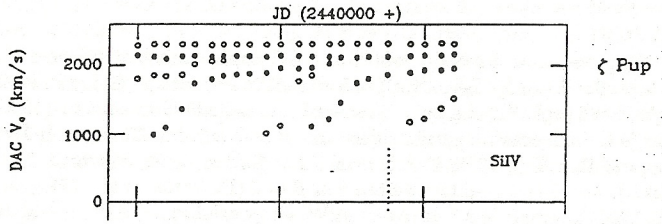


Abb. 7.3. Zeitliche Entwicklung eines DACs. Aus Prinja (1992).

Ein weiterer kontroverser Punkt ist die mögliche Verbindung der DACs mit photo-

sphärischen Phänomenen.
Es gibt eine klare Korrelation der Wiederkehr- und Entwicklungszeitskala der DACs mit der Rotationsperiode des Sterns: Je langsamer der Stern rotiert, desto größer ist der zeitliche Abstand zwischen der Entstehung aufeinanderfolgender DACs (Prinja, 1988, Henrichs et al., 1988).
Darüber hinaus besteht kein klares Bild mehr. Es gibt Hinweise auf einen photosphärennahen Entstehungsort der DACs, nämlich insbesondere die Profilvariationen von optischen Linien (Henrichs, 1990, Fullerton, 1991, Fullerton et al., 1992 – siehe unten). Andererseits wirft Howarth (1992) die Frage auf, inwiefern die „windintrinsische" Strahlungskraftinstabilität, falls sie die Ursache der DACs ist, photosphärischer Störungen als Triggerungsmechanismus bedarf. Er gibt insbesondere Argumente, daß nichtradiale Pulsationen des Sterns und DACs (genauer: stehende DACs, siehe unten) *nicht* zusammenhängen. Für nähere Ausführungen hierzu sei auf die Diskussion der photosphärischen Verbindung in Howarth (1992) (mit den Abschnitten: „Yes, No, Maybe yes, Maybe no") sowie auf die Diskussion zwischen Howarth und Henrichs, abgedruckt in Henrichs (1990), verwiesen.

In Abbildung 2 sind die wandernden DACs zu erkennen, die sich schließlich in die *stehenden* DACs, manchmal auch NACs („narrow absorption components") genannt, „hinein"entwickeln. Dies letztere hat zur Identifizierung von DACs und NACs als ein und desselben Phänomens geführt. Eine andere Interpretation, nach der DACs und NACs *verschiedene* Ursachen haben, wird von J. Puls (1993, mündl. Mitteilung) gegeben: Die NACs sind danach die *kollektive* Wirkung einiger Schocks/Schalen bei mittleren Abständen vom Stern (einige Sternradien), wohingegen die DACs mit ihren hohen β-Werten weiterhin ein noch unverstandenes Phänomen bleiben.

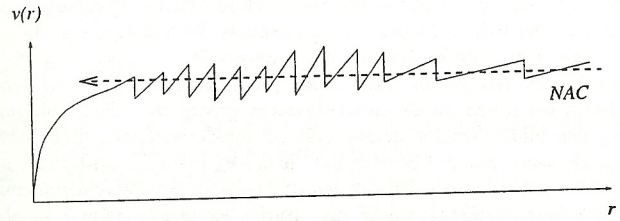


Abb. 7.4. Entstehung eines NACs. Erklärung im Text.

In diesem Modell entsteht die verstärkte Absorption in den NACs durch Mehrfachabsorption der stellaren Photonen im nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld. Die *individuellen* Schocks laufen in etwa mit der Windgeschwindigkeit nach außen, folgen daher einem $\beta \approx 0,8$ Geschwindigkeitsgesetz. Doch der Schock*komplex*, der den NAC verursacht, bleibt (nahezu) *stationär*: Verläßt ein Schock den Komplex an der äußeren Seite („verlassen" kann hier bedeuten, daß die Dichte aufgrund sphärischer Expansion zu klein wird, um noch merklich zur Absorption beizutragen, oder daß der Schock

zerfällt), so wird an der inneren Seite ein Schock in den Komplex hineinlaufen – so daß dieser sich in einem dynamischen Gleichgewicht befindet. Linienentstehungsrechnungen mit den derzeitigen isothermen Windmodellen liefern tatsächlich NACs – nicht jedoch DACs (Puls & Feldmeier, 1993, in Vorbereitung). Dies ist mit der oben festgestellten Beobachtung in Einklang, daß NACs nicht durch nichtradiale Pulsationen erzeugt werden sollten – tatsächlich wird in den Rechnungen die Windstruktur auch nur durch schwache photosphärische Schallwellen (entsprechend den „infinitesimalen Störungen" der linearen Stabilitätstheorie) getriggert.

Zur Erklärung der DACs wurden verschiedene Modelle vorgeschlagen, nämlich Schalen oder Materieklumpen (*blobs*) im Wind, Geschwindigkeitsplateaus, und co-rotierende Wechselwirkungszonen („CIR", für „corotating interaction regimes").
Das *Schalen-* oder *Klumpen*modell (Henrichs, Hammerschlag-Hensberge & Lamers, 1980) interpretiert die DACs als räumlich *enge* Bereiche (→ geringes Geschwindigkeitsintervall) erhöhter Absorption aufgrund erhöhter Dichte. Die Schalen/Klumpen sollen aufgrund der Strahlungskraftinstabilität entstehen. Gegen dieses Modell sprechen nach Prinja & Howarth (1988) folgende Punkte:

i) Die DACs werden weniger beschleunigt als der restliche Wind, d. h. der β-Exponent des Geschwindigkeitsgesetzes der DACs ist zu groß.
ii) Modellrechnungen mit Schalen oder Klumpen zeigen, daß man diese auch bei niedrigen Geschwindigkeiten beobachten müßte (wenn sie überhaupt photosphärennah erzeugt werden).
iii) Es wird *keine* Variabilität des Emissionsteils der Linien beobachtet; die DACs laufen nur durch den blauen Absorptionstrog, sind daher kein sphärisch symmetrisches Phänomen (→ Schalen).
iv) Schalen wären zu schwer; denn um die beobachteten DACs zu erhalten, müßten die Schalen etwa die 10fache Masse der Photosphäre davontragen – und dies ohne irgendeinen beobachtbaren Einfluß auf das photosphärische Spektrum.

Punkt i) ist, wie bereits festgestellt, tatsächlich problematisch. Punkt ii) *setzt voraus*, daß die Schalen bei niedrigen Geschwindigkeiten existieren – die Strahlungskraftinstabilität hingegen bildet Schalen gerade erst bei mittleren Geschwindigkeiten aus (im tatsächlich auch beobachtetem Bereich 0,3 bis 0,5 v_∞). Punkt iii) betrifft nur das Schalen-, nicht das Klumpenmodell. Tatsächlich sind vollständige Schalen ohnehin nicht zu erwarten, eher Schalensegmente, wofür quantitative Rechnungen zur Linienbildung noch ausstehen. Das umgekehrte Argument wie in iii) wird auch gebraucht: Wenn die DACs von Klumpen verursacht werden, dürfen diese nicht zu klein sein: sonst ist die Wahrscheinlichkeit zu groß, daß diese aus dem Sehstrahl herauslaufen und somit die DACs einfach verschwinden, was nicht beobachtet wird. Punkt iv) ist prinzipiell sehr interessant, beruht aber auf kritischen Voraussetzungen: Prinja & Howarth (1988) leiten diese Abschätzung aus dem Si^{3+} Ionisationsbruchteil her, welchen sie selbst als unsicher ansehen. Weiterhin gehen sie davon aus, daß *ein* DAC mit *einer* Schale korrespondiert – tatsächlich könnte ein DAC durch viele Schalen mit bedeutend geringerer Masse verursacht sein (J. Puls, 1993, mündl. Mitteilung); das Argument gilt wiederum nur für Schalen, nicht für Klumpen.

Insgesamt scheint die Kritik gegen das Modell im engeren Sinne *photosphärisch* erzeugte Schalen oder Klumpen zu betreffen, nicht erst im Wind erzeugte.

Geschwindigkeitsplateaus zur Erklärung verstärkter Absorption wurden von Mihalas (1979) und Hamann (1980) vorgeschlagen. Die DACs entstehen durch die große Masse absorbierenden Materials bei *einer* Geschwindigkeit, welches photosphärische Strahlung *einer* Frequenz absorbiern kann (genauer: in einem schmalen Geschwindigkeitsbereich). Das Windmaterial *durchströmt* das Geschwindigkeitsplateau, während es im Schalen/Klumpenmodell in dieselben eingeschlossen ist. Damit ist auch die geringe Beschleunigung der DACs prinzipiell erklärbar: Die Dynamik des Plateaus (→ Beschleunigungsgesetz) kann völlig unabhängig von der Winddynamik sein. (Im Extremfall könnte es stationäre Plateaus im Wind geben, entsprechend den NACs). Fullerton und Owocki (1992) führten eine numerische Simulation durch, bei der in einen stationären Wind nahe am Stern ($1,05R_*$) ein kleiner Bereich geringerer Dichte eingefügt wurde. Dieser entwickelte sich zu einem Geschwindigkeitsplateau mit deutlich größerem β als der Wind.

*CIR*s (Mullan, 1984) entsprechen von ihrer Geometrie den Wasserstrahlen bei einem Rasensprenger: Der rotierende Stern hat auf seiner Oberfläche verschiedene „Flecken", die verschiedene, sich spiralenförmig um den Stern aufwickelnde Wind*streams* erzeugen. Als Grund für das Auftreten der CIRs selbst wird wieder die Instabilität der Strahlungsbeschleunigung vorgeschlagen. – Die Kritik an diesem Modell ist, daß es eine unmittelbare Übersetzung der Verhältnisse beim Sonnenwind auf strahlungsgetriebene Winde darstellt, ohne Umstellung auf die unterschiedliche physikalische Situation: Bei der Sonne bewirken Magnetfelder unterschiedliche Flecken in der Korona (= Windbasis). Nur sehr wenig ist bekannt über Magnetfelder an der Basis von O-Sternen.

Variabilität am blauen Rand der Linie

In *gesättigten* P-Cygni Profilen beobachtet man oftmals eine Variabilität des blauen Randes (des Absorptionsprofiles), siehe Abbildung 5.
Die Position des blauen Randes ändert sich beispielsweise bei 68 Cyg (einem Standardstern für Variabilitätsuntersuchungen) in einem Bereich von 250 km/s, entsprechend 0,1 v_∞, bei ζ Puppis um 200 km/s in der C IV und N V Linie (Prinja et al., 1992). In Henrichs (1990) und Prinja (1992) wurde ein klarer Zusammenhang zwischen DACs und „*blue edge variability*" festgestellt. Die Variabilität am blauen Rand könnte durch die variable Absorptivität von Material, welches über die Geschwindigkeit des stationären Windes hinaus beschleunigt wird (Strahlungskraftinstabilität) verursacht sein, also durch die Schock„spitzen".

Schwarze Tröge

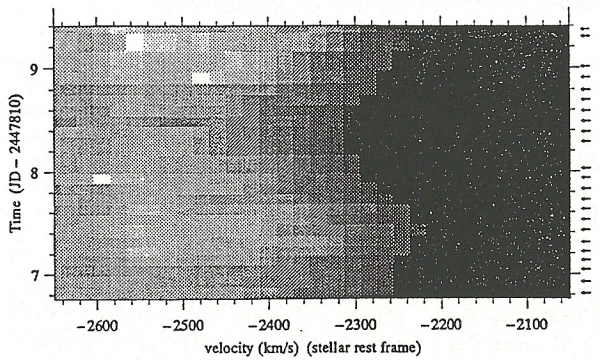


Abb. 7.5. Variabilität am blauen Rand. Aus Henrichs, 1990.

Gesättigte P-Cygni Profile in einem monotonen Geschwindigkeitsfeld haben nur an genau einem Punkt, nämlich am blauen Rand, eine verschwindende Intensität. Tatsächlich beobachtet man (Lamers & Morton, 1976, Castor & Lamers, 1979) häufig ausgedehnte schwarze Tröge mit (wahrscheinlich) Restintensität 0. Eine Erklärung hierfür wurde von Lucy (1982a, 1983) im Rahmen eines nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldes gegeben, wie es in einem Wind mit Schocks (Lucy, 1982b) vorliegt. An jedem der multiplen Resonanzorte im nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld besteht eine Wahrscheinlichkeit für eine *Rück*streuung des Photons (die man in erster Näherung für Resonanzzonen mit großer optischer Dicke zu 1/2 annehmen kann). Liegen die multiplen Resonanzzonen eng beieinander, wie von Lucy angenommen, so kann man den entstehenden *Streukomplex* als aus planaren Schichten zusammengesetzt denken. Man findet, daß im Falle sehr vieler Streuflächen die sternnächste dieser Flächen die *volle* eingestrahlte Strahlung zurückstreut und die letzte überhaupt nicht mehr beschienen wird: Der Streukomplex wirkt als Spiegel. Für die relativ weit auseinanderliegenden Resonanzorte in OCR-Winden muß die Voraussetzung der Planarität aufgegeben werden; die sphärische Geometrie bewirkt dann einige neue Effekte, wozu hier auf Puls, Owocki & Fullerton (1993) verwiesen sein soll.
Schwarze Tröge haben bisher, von einigen Ausnahmen abgesehen (z. B. Prinja & Howarth, 1986), nur wenig Eingang in die Diagnostik zeitabhängiger Winde gefunden. Möglicherweise wird sich dies ändern, wenn die Aussagekraft entsprechender Beobachtungen klarer geworden ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit Abbildungen eines NACs und eines schwarzen Troges, wie sie sich aus Modellen der variablen Windstruktur ergeben. (J. Puls sei für die Überlassung der Abb. 6 und 7 gedankt. Wir gehen hier nicht auf die recht aufwendigen Linienformationsrechnungen in nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeldern ein, siehe

Puls, Owocki & Fullerton, 1993, und Puls, 1993.) Beide, NAC (Abb. 6) und Schwarzer Trog (Abb. 7) ergeben sich mit der Windstruktur des Modells 3 aus Abschnitt 6.8, also mit stationärer optisch dicker Quellfunktion, Amplitude der Schallwellen $A = 1\%$ und Periode $T = 5.000$ s.

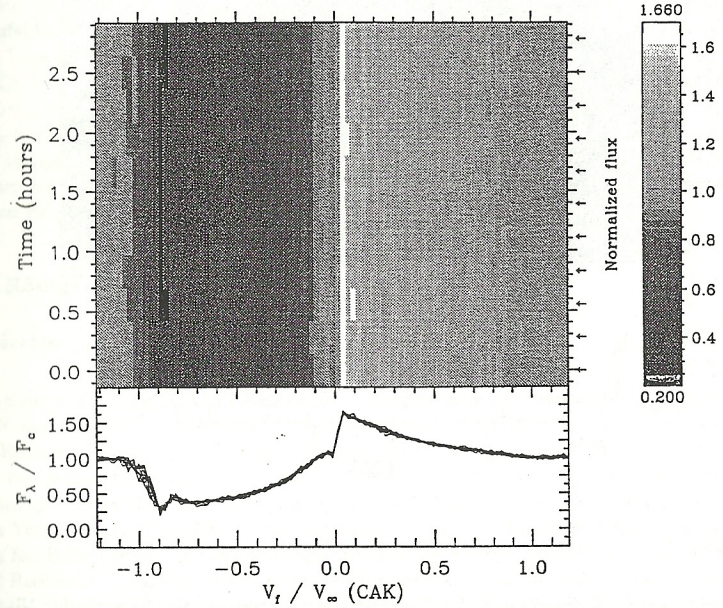


Abb. 7.6. Berechnete *Narrow Absorption Component* in einem ungesättigten P Cygni Profil.

Superionisation

Man beobachtet in den Winden heißer, leuchtkräftiger Sterne Resonanzlinien anomal hoher Ionisationsstufen wie O VI, S VI, N V. Um diese zu erklären, schlugen Lamers & Morton (1976) einen *warmen* Wind mit einer Elektronentemperatur von 200.000 K vor. Ein alternativer Erzeugungsmechanismus der hohen Ionisationsstufen wäre die Auger-Ionisation durch die Röntgenstrahlung einer heißen dünnen Korona an der Basis eines kühlen Windes (Olson, 1978, Cassinelli & Olson, 1979). Doch kann die Superionisation in den *inneren* Windbereichen allein durch das optisch dicke ionisierende Kontinuum

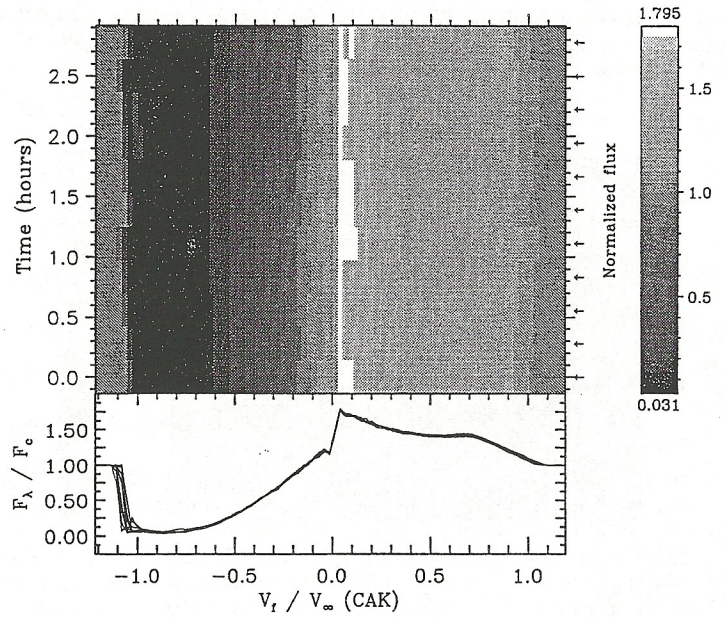


Abb. 7.7. Berechneter Schwarzer Trog in einem gesättigten P Cygni Profil.

kurzwellig der He II Kante und die Elektronenstoßanregung niedrigliegender Niveaus mit nachfolgender Photoionisation in detaillierten NLTE Rechnungen in einem *kalten* Wind $T \approx T_{\rm eff}$ erklärt werden (Pauldrach, 1987). Die Superionisation in *äußeren* Windbereichen dagegen sollte vor allem durch die *Schockemission* im extremen Ultraviolett verursacht sein (Pauldrach et al., 1993).

7.4 Optische Linien

Diese werden in Photosphärennähe, also im unteren Windbereich gebildet (kleine Geschwindigkeiten). Strategische Linien, insbesondere zur Bestimmung der Massenverluststrate, sind Hα (z. B. Ebbetts, 1982) und He I λ6678 sowie die Linien He II λ4686, C IV λ5801, C IV λ5812. Die optischen Linien sind insbesondere interessant, um eine Verbindung der Wind-Variabilität mit photosphärischen Ereignissen (z. B. nichtradiale Pulsationen) aufzudecken sowie den Entstehungsort von Wind-Variabilitäten aufzufinden. Variabilität in optischen Linien wird summarisch als *Linienprofilvariation* (LPV)

bezeichnet. Diese besteht in drastischen Änderungen der Gestalt und Äquivalentbreite der Linie. Auch in optischen Absorptionslinien entstehen diskrete Absorptionskomponenten, welche sich durch die Linie zum blauen Flügel hin bewegen. Die Zeitskalen der LPV sind (im Gegensatz zu denen der UV DACs) *irregulär* und reichen von 12 bis 18 Stunden bis hin zu Tagen (Scuderi et al., 1992).
Fullerton (1991) findet, daß in einem Sample von OB-Sternen *alle* Überriesen LPV zeigen, während *alle* Zwerge *keine* LPV zeigen. Für den Exponenten des Geschwindigkeitsfeldes der optischen „DACs“ geben Fullerton, Gies & Bolton (1992) $\beta = 5$ und $\beta = 7$ an. Dieselben Autoren stellen folgende Unterschiede zwischen UV und optischen DACs fest: UV DACs starten typischerweise bei $0,4\,v_\infty$, optische DACs können ab $0,15\,v_\infty$ beobachtet werden. UV DACs verengen sich mit wachsender Geschwindigkeit v, d. h. die von den DACs eingenommenen Δv Intervalle werden schmaler, dagegen haben optische DACs ungefähr gleichbleibende Ausdehnung. Letzteres ließe sich einfach dadurch erklären, daß die DACs Schalen oder Klumpen sind, die in einem innen steilen, außen flachen $\beta-$Geschwindigkeitsfeld laufen.

7.5 Röntgenstrahlung

Beobachtungen

OB-Sterne (der Cygnus OB2 Assoziation) wurden erstmals mit dem IPC (*Imaging Proportional Counter*, gibt Positionen und Spektren) und HRI (*High Resolution Imager*) des Einstein-Satelliten als diskrete Röntgenquellen nachgewiesen (Harnden et al., 1979). Der beobachtete Spektralbereich umfaßt hierbei Energien von 0,2 bis 4 keV, die Beobachtungszeit mit dem IPC liegt bei 10^4 s. Als Temperatur der Quellen ergibt sich aus dem Vergleich der Verhältnisse der Zählraten in den verschiedenen Energiebändern mit dem Emissionsspektrum eines Plasmas solarer Häufigkeiten $T \approx 6 \cdot 10^6$ K. Aus HRI und IPC Beobachtungen des η Carinae Nebels fanden Seward et al. (1979) einen Wolf-Rayet Stern und mehrere O-Sterne als Röntgenquellen. Eine Zusammenstellung *aller* mit dem Einstein-Satelliten als Röntgenstrahler beobachteten Sterne frühen Spektraltyps geben Chlebowski, Harnden & Sciortino (1989).
Neben den Temperaturen von einigen 10^6K ist das entscheidende empirisch gefundene Faktum der Zusammenhang der Röntgenleuchtkraft mit der Gesamtleuchtkraft (Seward et al., 1979, Long & White, 1980, Pallavicini et al., 1981), $L_{\rm X}/L_{\rm bol} = 10^{-7}$, jedoch mit einer relativ breiten Streuung von ± 1 Dezimale.

Korona an der Windbasis

Die Entstehung einer Korona über der Photosphäre heißer Sterne wäre aufgrund der Dissipation von strahlungsakustischen Wellen möglich (Hearn, 1972, 1973). Diese Korona könnte die Ursache eines thermisch getriebenen Windes Sterne frühen Spektraltyps sein, in Analogie zum Sonnenwind (Hearn, 1975). Die Dicke einer solchen Korona kann aus der beobachteten Äquivalentbreite von Hα in ζ Ori zu etwa 1 Sternradius abgeleitet

werden (Hearn, 1975). (Da Hα tief im Wind gebildet wird, in der heißen Korona Wasserstoff jedoch vollständig ionisiert ist, kann die Korona keinen Beitrag zum zentralen Emissionspeak des Profils geben, weshalb dieses stark abgeplattet erscheint.)
Hingegen fanden Cassinelli, Olson & Stalio (1978) eine maximale erlaubte Ausdehnung der Korona von 0,1 Sternradien, um nicht mit den Hα-Beobachtungen von ζ Ori in Widerspruch zu sein. (Die Unterschiede im Vorgehen gegenüber Hearn (1975) werden in diesem Artikel genau diskutiert – sie sind für das folgende nicht wesentlich.)
Eine Korona als Ursache der *Superionisation* wurde von Cassinelli und Olson (1979) diskutiert. Hierbei soll nach K-Schalen Absorption mit nachfolgendem Auger-Prozeß O IV zu O VI und N III zu N V ionisiert werden. Jedoch haben die meisten *beobachteten* Röntgenphotonen Energien unter 1 keV und sollten in diesem Korona-Modell durch das kalte Windmaterial stark absorbiert und abgeschwächt werden (Long & White, 1980). Tatsächlich ergibt sich aus der Analyse von Of-Sternen und OB-Überriesen (Cassinelli et al., 1981), daß die beobachteten weichen Röntgenstrahlen unterhalb von 1 keV *nicht* so stark abgeschwächt sind wie nach Cassinelli & Olson (1979) zu erwarten. Außerdem müßten einige der untersuchten Sterne ein sehr großes Emissionsmaß haben, um die Superionisation weit außen im Wind erzeugen zu können.
Aus Fits (mit Temperatur, Säulendichte und Emissionsmaß als freien Parametern) an Einstein-SSS (*Solid State Spectrometer*) Daten ergeben sich typische Temperaturen des röntgenemittierenden Materials von $2 \ldots 5 \cdot 10^6$ K, bei relativ schwacher Windabsorption (Cassinelli & Swank, 1983). In ζ Ori findet sich im Röntgenspektrum eine Emissionskomponente bei 2 keV, entsprechend Material von $1,5 \cdot 10^7$K. – In allen SSS-Daten ist kein Hinweis auf Sauerstoff K-Schalen Absorption bei 0,6 keV zu finden – die koronalen Modelle sagen hier maximale Absorption der Röntgenstrahlung voraus, siehe Abbildung 8.

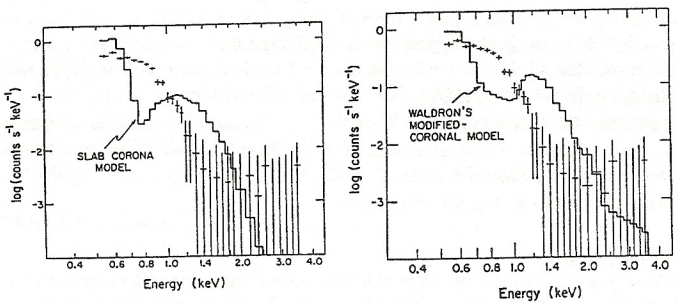


Abb. 7.8. SSS-Daten und Korona-Modell. Aus Cassinelli & Swank, 1983.

Die koronalen Modelle werden von Waldron (1984) zu einer Theorie koronal/radiativer Rekombinationswinde erweitert. Die Initiierung des Windes geschieht hierbei durch die

Korona. Deren großes Emissionsmaß erzeugt ein Übergewicht von He III zu He II, was eine stark verringerte Windopazität bezüglich weicher Röntgenstrahlung bewirkt. Aufgrund von Strahlungs- und Expansionskühlung kommt es schließlich zur Rekombination der Metalle im Wind und zum Einsetzen der Linienstrahlungskraft, die den Wind weiter beschleunigt. Diese Modelle geben gute Fits an die IPC-Beobachtungen (Waldron, 1984), jedoch müssen auch sie aufgrund der SSS-Beobachtungen ausgeschlossen werden (Cassinelli & Swank, 1983), da sie immer noch eine viel zu starke K-Schalen Absorption ergeben.

Das (vorläufig?) endgültige „Aus" für Modelle mit einer Korona an der Windbasis als Quelle der beobachteten Röntgenstrahlung gelang durch den *Nicht*nachweis der koronalen Eisen XIV 5303 Å Linie in hohen Signal-zu-Rausch (=600) Spektren von ζ Puppis (Baade & Lucy, 1987). Bezüglich vier empirischer Korona-Modelle, nämlich einer i) statischen Korona, ii) mitrotierenden Korona, iii) turbulenten Korona, iv) expandierenden Korona, wäre eine deutlich zu beobachtende Eisenlinie zu erwarten – die jedoch in den Beobachtungen nicht gefunden wird.

Schocks als Quelle der Röntgenstrahlung

Die inzwischen favorisierte Erklärung der beobachteten Röntgenstrahlung ist die Emission schockgeheizten Materials im Wind.
Bezüglich des phänomenologischen Lucy & White (1980) Klumpenmodells finden Cassinelli & Swank (1983) klare Nichtkonsistenz mit der Beobachtung: Die die Klumpen berandenden Schocks haben maximale Stärke tief unten im Wind – das entsprechende Röntgenspektrum ergibt wieder eine viel zu starke Abschwächung der weichen Komponente aufgrund von Windabsorption im Vergleich zur Beobachtung.
Auch das Schockmodell von Lucy (1982b), in dem die Schockstärke nach außen hin zunimmt, kann die Beobachtungen nicht reproduzieren. Dieses Modell zeigt zwar kaum K-Schalen Absorption, gibt aber einen um mehrere Dekaden zu geringen Röntgenfluß und ein zu weiches Spektrum. Wenn man annimmt, wie von Lucy vorgeschlagen, daß jeder 200ste Schock (sehr viel) stärker ist als im originalen Modell, kann ein guter Fit an die SSS-Beobachtungen erzielt werden (Vgl. Cassinelli & Swank (1983). Doch verbleibt ein Problem (neben dem unerklärten Auftreten der starken Schocks): Solche vereinzelten starken Schocks sollten zu einer Variabilität des Röntgenspektrums im Stundenbereich führen – die nicht beobachtet wird.

MacFarlane & Cassinelli (1989) erzielen mit einem phänomenologischen Modell *einer* Schale im Wind von τ Sco (BO V) sehr gute Übereinstimmung mit SSS-Spektren. (Die Beobachtungen (Cassinelli, 1985) ergeben bei Vergleich mit einem 2-Temperatur-Modell $T_1 = 5,3 \cdot 10^6$ K und $T_2 > 10^7$ K . Der *dünne* Wind von τ Sco ist für einfache Fits und Modellrechnungen besonders geeignet, da Absorption der Röntgenstrahlung im Wind vernachlässigbar sein dürfte.) Hierbei ist allerdings zu berücksichtigen, daß MacFarlane & Cassinelli einen freien Parameter ihres Modells so einstellen, daß die Schocks vergleichbare Temperaturen wie die beobachteten ergeben. Außerdem hat das

berechnete Spektrum eine größere (negative) Steigung als das beobachtete Spektrum, hat also entweder zu viel weiche oder zu wenig harte Röntgenphotonen (jeweils etwa eine Dekade von insgesamt vier durch die Beobachtung überdeckten Dekaden im Fluß). Eine ähnliche phänomenologische Rechnung (Cooper & Owocki, 1992) unter Verwendung der CAK-Strahlungsbeschleunigung eines Linienensembles von optisch dünnen und dicken Linien anstelle der optisch dünnen Strahlungsbeschleunigung von MacFarlane & Cassinelli (1989) führt, wiederum für eine einzelne Schale, auf vergleichbare Ergebnisse.
Cooper & Owocki (1992) geben auch das resultierende Röntgenspektrum für eine Rechnung mit der *instabilen Linienkraft* an. Das resultierende Spektrum ist *viel* zu weich: Bei ungefähr richtigem Fluß weicher Photonen gibt es zwei bis drei Dekaden zu wenig harte Photonen. Einige Gründe für diese Diskrepanz sollen in Kapitel 9 besprochen werden.

Im Rahmen eines *phänomenologischen* Schockmodells wurden von Hillier et al. (1993) und Kudritzki & Hillier (1992) *Fits* an PSPC (*Position Sensitive Proportional Counter*) Beobachtungen des ROSAT-Satelliten von ζ Puppis gewonnen. Diese ausgezeichneten Beobachtungen zeigen *keinerlei* Anzeichen von K-Schalen Absorption im Wind. In den Modellen wird eine gleichmäßige Verteilung der Schocks im Wind angenommen, bei konstanter Schocktemperatur und konstantem Füllfaktor als freien Parametern. Weiterhin werden parametrisierte Windopazitäten aus detaillierten NLTE-Windrechnungen verwendet. Nur für einem Wind, in welchem bei großen Radien He III zu He II rekombiniert, ist eine gute Anpassung der Modelle an die Röntgenbeobachtung möglich, siehe Abbildung 9.
Bereits mit einem Eintemperaturfit können die Temperaturen des röntgenemittierenden Materials auf $3 \ldots 4 \cdot 10^6$ K eingeschränkt werden, bei einem Füllfaktor von 3 %. Nur weniger als 5 % der tatsächlich im Wind emittierten Röntgenstrahlung gelangt aus dem Wind heraus. Ein zentrales Ergebnis von Hillier et al. (1993) ist der Entstehungsort der beobachteten Röntgenstrahlung: Die optische Tiefe 1 ist bei einer Energie von 1 keV bei etwa 10 Sternradien erreicht, bei kleineren Energien noch weiter außen im Wind. Da die beobachtete Röntgenstrahlung in dem großen Volumen *außerhalb* von $\tau = 1$ emittiert wird (und nicht nur in der Umgebung von $\tau = 1$), erhalten die Autoren im Herekombinierenden Windmodell als Entstehungsort der beobachteten Röntgenstahlung unterhalb von 0,5 keV Radien $r > 100 R_*$! (Bereits Olson & Castor (1981) schätzten ab, daß der Wind von ζ Pup bei einer Massenverlustrate von $5 \cdot 10^{-6}\ M_\odot\ \mathrm{yr}^{-1}$ bei 0,5 keV eine optische Tiefe von ungefähr 30 hat.)
Inzwischen existieren auch *direkte* Hinweise aus Beobachtungen auf die Absorption der Röntgenstrahlung im Wind (Waldron, 1991). Wird das aus IPC-Beobachtungen gewonnene „Hardness"-Verhältnis (das Verhältnis von harten zu weichen Röntgenphotonen), welches direkt mit der Windabsorption zusammenhängt, gegen das Verhältnis von Radioluminosität zu Gesamtluminosität aufgetragen, welches direkt mit der Säulendichte des Windes zusammenhängt, so ergibt sich eine eindeutige Korrelation.

Chen & White (1991a, b) schlagen für die Entstehung der *harten Komponente* ($E \geq 2$ keV), die beispielsweise in den SSS-Daten der 3 Überriesen im Orion-Nebel (Cassinelli & Swank, 1983; siehe oben) einen deutlichen Exzeß gegenüber dem thermischen

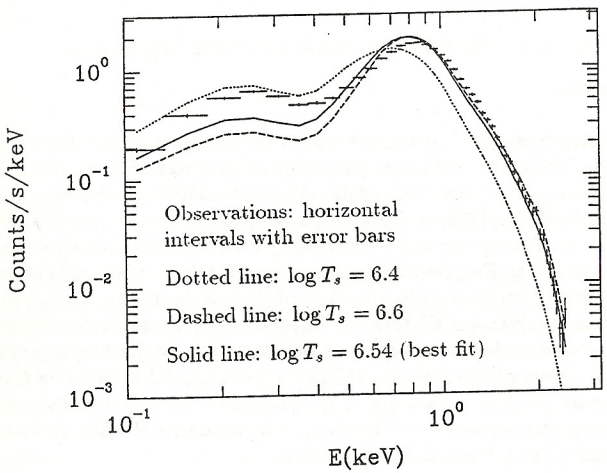


Abb. 7.9. Eintemperaturfit im He-Rekombinationsmodell der ROSAT-Beobachtungen von ζ Pup. Aus Hillier et al. (1993).

Röntgenfluß hat, einen *nicht*thermischen Entstehungsmechanismus (thermisch = adiabatische Schockheizung) vor: Elektronen werden durch den Fermi-Mechanismus erster Ordnung auf relativistische Energien beschleunigt und können dann über den inversen Compton-Effekt die UV-Quanten des Sterns in Röntgenquanten umwandeln (Pollock, 1987). Das entstehende Spektrum folgt einem Potenzgesetz $F_\nu \sim E^{-1/2}$ und ist in Übereinklang mit den Beobachtungen (wobei diese im harten Röntgenbereich bisher noch nicht sehr aussagekräftig sind). – Der Prozeß der Teilchenbeschleunigung im Schock wird in Kapitel 8 behandelt.

Auch *Wolf-Rayet*-Sterne wurden als Röntgenquellen entdeckt. In einem Sample von sieben beobachteten Wolf-Rayet-Sternen zeigen vier Röntgenemission (White & Long, 1986). Das Verhältnis L_X/L_{bol} ist ähnlich wie bei O-Sternen, und die meisten Photonen haben auch hier Energien unterhalb von einem keV. Hier (wie schon bei den UV-Beobachtungen) zeigen die WR-Sterne überraschend ähnliche Variabilitätsmerkmale wie OB-Sterne.

Bisher wurden in diesem Abschnitt nur *stationäre* Röntgenbeobachtungen diskutiert. Signifikante *Variationen* des Röntgenspektrums auf einer Zeitskala von Tagen fanden Collura et al. (1989) aus Einstein-Beobachtungen bei 3 O-Sternen (einschließlich ζ Puppis) aus einem Sample von 12 OB-Sternen. Dagegen finden Kudritzki & Hillier (1992)

aus 60 ksec ROSAT-Beobachtungen von ζ Pup über 12 Tage hinweg *keine* Variationen des Spektrums.

7.6 Gammastrahlen

Im vorigen Abschnitt wurde die Entstehung der harten Röntgenkomponente über den inversen Comptoneffekt an relativistischen Elektronen genannt. Entsprechend könnten γ–Strahlen als GeV-*Bremsstrahlung* relativistischer Elektronen entstehen (Pollock, 1987), wofür Chen & White (1991b) jedoch sehr niedrige Raten finden. Ein alternativer Mechanismus zur Erzeugung von γ–Strahlung wird von White & Chen (1992a) vorgeschlagen: Die über den Fermimechanismus erzeugten relativistischen Protonen im Wind wechselwirken mit den thermischen Ionen, wobei neutrale Pionen erzeugt werden, die schnell in Gammastrahlen um 67 MeV zerfallen. Für Winde mit hoher Massenverlustrate sollte die entstehende Gammstrahlung gerade an der Beobachtungsgrenze des EGRET (*Energetic Gamma Ray Experiment Telescope*) an Bord des *Compton Gamma-Ray Observatory* sein; die Beobachtung von Wolf-Rayet-Sternen (hohe Massenverlustrate) oder von Ansammlungen von O-Überriesen wie der Cyg OB2 Assoziation sollte ein meßbares Signal geben (White & Chen, 1992a).

8

Energetische Prozesse in Sternwinden

Bevor wir uns im anschließenden Kapitel 9 zeitabhängigen numerischen Windmodellen zuwenden, in denen schockgeheiztes Material durch *Strahlungskühlung* und adiabatische Kühlung seine Energie verlieren kann, soll im vorliegenden Kapitel ein Überblick über die *insgesamt* in einem O-Sternwind ablaufenden bzw. zu erwartenden energetischen Prozesse gegeben werden.
§1 behandelt die adiabatische Kühlung, §2 Viskosität und Wärmeleitung im Wind. §3 gibt eine ausführliche Darstellung der stationären statistischen Gleichgewichts*strahlungskühlung* (und einige Bemerkungen zur Nichtgleichgewichtskühlung). Mit der Strahlungskühlung einher gehen zwei *thermische Instabilitäten*, die *kondensatorische* (§4) und die *oszillatorische* Instabilität (§5). Abschließend werden in §§6 und 7 „exotische" Prozesse im Wind vorgestellt, nämlich der Fermiprozeß an starken Schocks, wodurch relativistische Teilchen im Wind erzeugt und beschleunigt werden können, sowie die mögliche Stoßentkopplung der strahlungsbeschleunigten Metallionen vom restlichen Windplasma, die zu einem *runaway* Effekt führt.

8.1 Adiabatische Kühlung

Der Term $p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ in der *idealen* (d. h. adiabatischen, da keine Wärmetransportprozesse) hydrodynamischen Energiegleichung ist identisch zur Volumenarbeit $p\,dV$ des ersten thermodynamischen Hauptsatzes. Er verursacht zwei wesentliche Kühlungseffekte im Sternwind: Im unteren Windbereich nahe der Photosphäre wird es aufgrund des sehr großen Geschwindigkeits*gradienten* und der damit einhergehenden Expansion zu einer starken adiabatischen Kühlung kommen. Der zweite Anteil der Expansionskühlung ist *geometrisch* bedingt; in sphärischer Symmetrie ist jedes hydrodynamische Windteilchen eine *Sphäre* mit geringer radialer Ausdehnung dr, deren Volumenzuwachs beim Hinauslaufen zu einer Kühlung $\rho d\epsilon/dt = -2pv/r$ (sphärische Divergenz) führt.

Das Integral der Bewegung der *stationären*, sphärisch symmetrischen, adiabatischen mikroskopischen Energiegleichung gemäß (2.1) lautet (vergleiche (2.20) für den planaren Fall)

$$p\,v^\gamma\,r^{2\gamma} = \mathrm{const}, \tag{8.1}$$

was identisch ist mit der Adiabatengleichung der Thermodynamik (vr^2 ist die Volumenänderung pro Zeit). Mit dem idealen Gasgesetz in der Form $p \sim \rho T \sim T/vr^2$ (letzteres aufgrund der stationären Kontinuitätsgleichung) kann dies auch geschrieben werden als

$$T v^{\gamma-1} r^{2(\gamma-1)} = \mathrm{const}. \tag{8.2}$$

In Abschnitt 2.2 wurde gezeigt, daß Glg. (1) und (2) an Schocks *nicht* gelten, da Schocks nicht adiabatisch sind, sondern Entropie erzeugen. Glg. (1) und (2) können daher im folgenden nur für stationäre Strömungen *ohne Schocks* verwendet werden.

Es soll die adiabatische Kühlung aufgrund des starken Geschwindigkeitsgradienten im unteren Windbereich abgeschätzt werden. Dazu wird ein *isothermer* Wind betrachtet, was für stationäre Winde heißer Sterne aufgrund von *Strahlungsgleichgewicht* in guter Näherung erfüllt ist (so daß die adiabatische Kühlung des Windes z. B. durch Photoionisation ausgeglichen wird.)
Die photosphärische Windgeschwindigkeit wird in Anhang 8 abgeschätzt; für ζ Pup ergibt sich dort $v_* \approx a_{\rm iso}/200$ mit $a_{\rm iso} \approx 20\,{\rm km\,s^{-1}}$. Wir betrachten zwei Orte im Wind, zum einen den Schallpunkt sehr nahe am Stern (im isothermen Wind!), so daß der $(R_*/r_a)^{2(\gamma-1)}$ Term in (2) vernachlässigt werden kann, und dann den Ort r mit $v(r) = v_\infty/2$, der für ein β-Geschwindigkeitsfeld (isothermer Wind!) mit $\beta = 1$ bei $r = 2\,R_*$ liegt; weiterhin ist $v_\infty \approx 100\,a_{\rm iso}$. Für diese beiden Orte ist also (mit $\gamma = 5/3$)

$$\begin{aligned} T_a &\approx 2,9 \cdot 10^{-2}\, T_{\rm eff} = 1200\,{\rm K}, \\ T_{v_\infty/2} &\approx 8,5 \cdot 10^{-4}\, T_{\rm eff} = 36\,{\rm K}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Dieser große Einfluß der adiabatischen Kühlung auf den Energiehaushalt im unteren Windbereich wird in Springmann (1991) diskutiert.

Die adiabatische Kühlung schockgeheizten Materials aufgrund von *geometrischer* (und kinematischer) Expansion kann ebenfalls einfach abgeschätzt werden. Dazu sei angenommen, daß jedes Teilchen nur einen einzigen Schock durchläuft, so daß nach dem Schock für alle späteren Zeiten (2) gilt. Schocks sind im variablen Wind signifikant erst vorhanden bei einem *nicht sehr kleinen* Bruchteil der Endgeschwindigkeit des Windes (0,3 bis 0,5); der Schocksprung selbst ist *kein sehr großer* Bruchteil der Endgeschwindigkeit (ungefähr 1/5); insgesamt wird sich daher die Geschwindigkeit eines geschockten Windteilchens beim Hinauslaufen um *maximal* einen Faktor 3 erhöhen, entsprechend einem Kühlungsfaktor von 2. Signifikante adiabatische Kühlung von schockgeheiztem Material kann also nur durch die sphärische Expansion eintreten, welche $\sim r^{-4/3}$ ist, also nur auf *dynamischen* Längenskalen ($\sim$ einige bis viele Sternradien) wirkt.

Die sphärisch symmetrische adiabatische Ausbreitung und Kühlung einer Schale mit *reverse* und *forward* Schock in einem unterliegenden stationären isothermen Wind wurde von Simon & Axford (1966) untersucht, siehe Abschnitt 3.9. Zeitabhängige adiabatische strahlungsgetriebene Winde wurden zuerst von Cooper & Owocki (1992) behandelt und werden ebenfalls im nächsten Kapitel betrachtet. Diese sind als der entgegengesetzte Grenzfall zu einem isothermen Wind interessant: Während im isothermen Wind schockgeheiztes Material instantan abkühlt („unendlich großes Wärmereservoir"), kann es im adiabatischen Wind nur auf dynamischen Skalen kühlen. Der wirkliche Wind liegt mit der durch die Strahlungskühlung gesetzten Skala zwischen diesen Extremen.

8.2 Viskosität und Wärmeleitung

Castor, Abbott und Klein (1976) geben folgenden Ausdruck für die Reynoldszahl im stationären O-Sternwind an,

$$\mathrm{Re} = \frac{\ln\Lambda}{5.52 \cdot 10^{-17}\, T^{5/2}}\, \rho v\, \frac{v}{dv/dr}, \tag{8.4}$$

wobei $\ln\Lambda$ der Coulomblogarithmus ist. Die Reynoldszahl ist hiernach *minimal* knapp unterhalb des sonischen Punktes, und zwar typischerweise $\mathrm{Re} \approx 10^{10}$. Damit ist *Viskosität* in diesen Winden sicherlich vernachlässigbar, und es können die nichtviskosen, d. h. *idealen* hydrodynamischen Gleichungen verwendet werden.
Dies ist natürlich nicht mehr richtig an Schocks, wo Viskosität der dominante Mechanismus der Energieumwandlung ist.

Die *Wärmeleitfähigkeit* (der Elektronen) ist vernachlässigbar, wenn die Pécletzahl groß ist. Da in einem Plasma Reynolds- und Pécletzahl über einen Faktor der Größenordnung 1 verknüpft sind (siehe Castor et al., 1976), ist dies für einen *stationären* Wind sicherlich der Fall.
Da der Wärmeleitungskoeffizient mit $\kappa \sim T^{5/2}$ geht (Spitzer, 1956; vergleiche hierzu (4)), kann Wärmeleitung im heißen *postshock* Material wichtig sein. (Bei hohen Temperaturen ist Viskosität *im* Schock wichtig, wo große Geschwindigkeitsgradienten herrschen, Wärmeleitung dominiert *hinter* dem Schock.) Lucy & White (1980) zeigen im Rahmen ihres Klumpenmodells der Windstruktur, daß für ζ Pup die Strahlungskühlungslängen so kurz sind, daß Dissipation der Heizungswärme keine Rolle spielt. Anders jedoch für τ Sco, wo aufgrund der geringen Winddichte die Strahlungskühlungslänge größer sein kann als die dynamische Skala. Hier kann Wärmeleitung im geheizten Windmaterial wichtig sein.
Entsprechendes finden MacFarlane & Cassinelli (1989) in ihrer Schalenrechnung im Wind von τ Sco, wo aufgrund der Wärmeleitung die Maximaltemperaturen auf $\leq 2 \cdot 10^7$ K begrenzt sind. Doch ist in deren Modell die Schockheizung des Materials selbst schon auf Temperaturen zwischen 10^6 und 10^7 K begrenzt.

Im Rahmen einer linearen Stabilitätsanalyse zeigten Owocki & Rybicki (1984), daß in einem CAK-Wind mit einem Exponenten der Linienverteilungsfunktion $\alpha = 1/2$ (und unter Vernachlässigung der Druckkräfte) die Strahlungskraftinstabilität gegenüber Störungen der Wellenlänge $\lambda \gtrsim (a/v)\, L$ (L die Sobolevlänge) weder durch Abstrahlung noch durch Wärmeleitung eliminiert werden kann. Damit verbleibt ein weites Intervall von instabilen, anwachsenden Störungen mit Wellenlängen von $\approx (a/v)\, L$ bis zur *bridging length* $\approx L$ (siehe Kapitel 5). *Störungen mit sehr kurzen Wellenlängen werden durch dissipative Effekte schneller ausgeglichen, als sie aufgrund der Instabilität anwachsen können.* Dies verhindert insbesondere die Ultraviolettkatastrophe von Owocki et al. (1988), die in Abschnitt 2.3 beschrieben wurde.

Viskosität und Wärmeleitung sind momentan in der numerischen Behandlung des variablen Windes nicht berücksichtigt. Aus den obigen Bemerkungen ist ersichtlich, daß beide Effekte (nur) auf kürzesten Längen- und größten Temperaturskalen eine Rolle spielen.

8.3 Strahlungskühlung: die Kühlungsfunktion

Gleichgewichtsionisation und -kühlung

Der dominante Kühlungsmechanismus für schockgeheiztes Material ist die *Abstrahlung*. Die Kühlungsfunktion eines heißen, dünnen Gases im Ionisationsgleichgewicht ist über einen weiten Bereich von Temperaturen (10^4 bis 10^8 K) gut bekannt (mindestens auf einen Faktor 2 genau). Wir wollen die wichtigsten Grundlagen und Ergebnisse der Berechnung dieser Kühlungsfunktion zusammenfassen, wobei wir uns eng an die Arbeit von Cox & Tucker (1969) anlehnen.
Das Gas besteht aus H, He, C, N, O, Ne, Mg, Si, S, Ca, Fe, Ni (Raymond et al., 1976).
Da das Gas als optisch dünn angenommen wird, ist kein *Strahlungstransport* nötig.
Es wird angenommen, daß die Zeiten für den Strahlungsübergang eines Ions aus einem angeregten Zustand in den Grundzustand kurz sind gegen die Zeit zwischen zwei Stößen. Damit brauchen die Besetzungszahlen der angeregten Zustände nicht berechnet zu werden (Cox & Tucker, 1969).
Es wird ein *stationärer* Zustand des Gases angenommen, so daß dessen Ionisationszustand durch die Temperatur bestimmt ist, also unabhängig von der „Geschichte" des Gases ist (z. B. von Anfangsbedingungen).
Das *Ionisationsgleichgewicht* wird als statistisches Gleichgewicht von *Ionisation* durch Elektronenstöße, sowie radiative und dielektronische *Rekombination* berechnet (Cox & Tucker, 1969). (Erste Rechnungen von House (1964) waren mit Strahlungsrekombination nur in den Grundzustand, sowie ohne dielektronische Rekombination.) Es wird weiter angenommen, daß das ionisierende Strahlungsfeld so schwach ist, daß *Photoionisation* vernachlässigt werden kann. (Obwohl die stärkste Kühlung aufgrund erlaubter Linienübergänge von UV-Linien stammt, welche H und manchmal auch He ionisieren können, siehe Cox & Daltabuit, 1971).
Die *Abstrahlungsverluste* beinhalten Bremsstrahlung, Rekombinationsstrahlung (einschließlich der dielektronischen Rekombination), erlaubte Linienübergänge (diese folgen nach Rekombination auf angeregte Zustände und nach Stoßanregung, jeweils aufgrund der Voraussetzung $t_{\rm rad} < t_{\rm coll}$) (Cox & Tucker, 1969), verbotene und semiverbotene Lienienübergänge (Cox & Daltabuit, 1971) sowie Zweiphotonenkontinua (Raymond et al. (1976).

Da Elektronenstöße der einzige *anregende* Mechanismus sind, sind auch die *Strahlungsverluste*, und damit die Kühlungsfunktion P, proportional zu $N_{Z,z}N_e$ (Z: Element, z: Ionisationsstufe). Die Funktion $\Lambda = P/N_eN_H$ ist dann unabhängig von der Dichte, jedoch abhängig von den angenommenen Elementhäufigkeiten. (N_H ist die *gesamte* Wasserstoffteilchendichte, also Atome + Protonen.)

Die dichteunabhängige Kühlungsfunktion $\Lambda(T)$ (siehe Abbildung 1) hat ein breites, ausgeprägtes Maximum ($\approx 5 \ldots 10 \cdot 10^{-22}$ erg cm^3 s^{-1}) bei $2 \cdot 10^5$ K, verursacht durch $2s-2p$ (sowie in geringerem Maße von $3s-3p$ und $1s-2p$) Übergänge von Sauerstoffionen. Um (mehr als) eine Dekade kleinere Maxima liegen bei $2 \cdot 10^4$ K, verursacht durch Ly α-Strahlung, und bei $2 \cdot 10^6$ K, verursacht durch $1s-2p$ Übergänge in Sauerstoffionen sowie $2s-2p$ Übergänge in Silizium- und Schwefelionen.

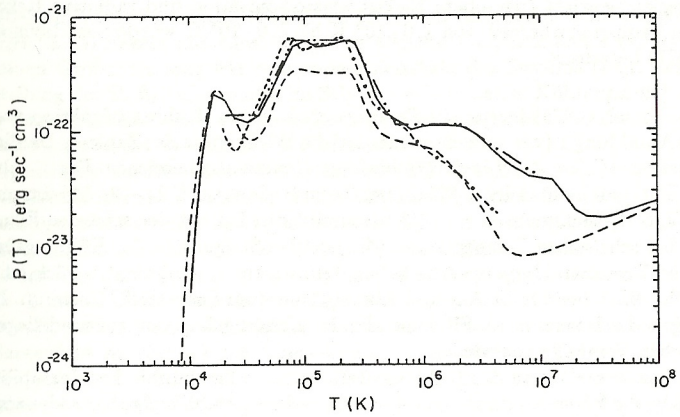


Abb. 8.1: Kühlungsfunktion eines heißen dünnen Plasmas im Stoßgleichgewicht, aus Rosner et al. (1978). *Berechnete Kühlungsfunktion* (nach Raymond): durchgezogene Kurve. *Potenzgesetzfit*: · · — · ·

Oberhalb etwa $5 \cdot 10^5$ K sind Kohlenstoff und Sauerstoff in helium- oder wasserstoffähnlichen Ionisationzuständen, die keine tiefliegenden Zustände haben und daher nicht effizient kühlen können, oder sind sogar vollständig ionisiert. Daraus erklärt sich der entsprechende steile Abfall der Kühlungsfunktion bei diesen Temperaturen. Zwischen $3 \cdot 10^5$ K und 10^6 K kann Neon stark zur Kühlung beitragen. Bei 10^6 K wird etwa die Hälfte, bei 10^7 K werden etwa drei Viertel der Kühlung durch Linienübergänge *schwerer* Elemente, insbesondere Eisen, bewirkt. Bei 10^8 K sind auch diese Elemente zu stark ionisiert um noch effizient kühlen zu können. (Bezüglich dieses letzten Absatzes siehe Raymond et al., 1976)
Die *Frequenzen* dieser *Linien*übergänge, die die Kühlungsfunktion von 10^4 bis 10^7 K dominieren, reichen vom Infraroten bis in den Röntgenbereich (wobei die kurzwellige Strahlung natürlich nur bei entsprechend hohen Temperaturen entsteht).
Ab 10^7 K wird *Bremsstrahlung* durch Coulombstöße von Elektronen an H- und He-Kernen wichtig, und dominiert die Kühlungsfunktion ab 10^8 K (Raymond et al., 1976).
Dielektronische Rekombination hat keinen sehr großen Einfluß auf die Kühlungsfunk-

tion, maximal einen Faktor von etwa 2, und zwar im Intervall von 10^5 bis 10^6 K (Cox & Tucker, 1969).
Unterhalb von etwa 30.000 K ist die Kühlung durch Wasserstofflinien sowie verbotene Kohlenstoff- und Sauerstofflinien dominant.

Das entstehende *Röntgen*spektrum (bezüglich aller oben aufgeführten Abstrahlungsprozesse, also frei-frei, gebunden-frei und Linien) für heiße, optisch dünne Plasmen im Ionisationsgleichgewicht (wie oben: Elektronenstoßionisation und radiative Rekombination) im Temperaturbereich von $1,6 \cdot 10^5$ K bis $1,0 \cdot 10^8$ K wurde von Raymond & Smith (1977) berechnet.

Von Rosner et al. (1978) wurde ein *Potenzgesetz*fit an die Kühlungsfunktion angegeben, siehe Abbildung 1 (wir verzichten hier auf die Wiedergabe der Zahlen). Dies ist ein Potenzgesetzfit $\Lambda(T) = A\,T^{\alpha}$ in 6 verschiedenen Temperaturbereichen. Der Kühlungsexponent ist $\alpha = 0$ beim i) Ly α Maximum, beim ii) Sauerstoff $2s - 2p$ Maximum und beim iii) Si, S, O Maximum. $\alpha = -2/3$ beschreibt den Beitrag der schweren Elemente (Fe usw.) bei sehr hohen Temperaturen (die positive Steigung in der Kühlungsfunktion aufgrund Bremsstrahlung bei sehr hohen Temperaturen wird nicht berücksichtigt). $\alpha = \mp 2$ schließlich beschreibt An- und Abstieg zum/vom Sauerstoff-Maximum. Insgesamt spiegelt der Rosner et al. Fit somit die der Kühlungsfunktion zugrundeliegenden physikalischen Vorgänge gut wieder.
Da es für *bestimmte* Werte des Kühlungsexponenten α zu thermischen Instabilitäten kommt (siehe die folgenden Abschnitte 4 und 5), weisen zeitabhängige hydrodynamische Rechnungen mit Mehr-α-Fits der Kühlungsfunktion komplexe physikalische Prozesse auf und werden schnell undurchsichtig. Es empfiehlt sich daher als erster Schritt die Verwendung eines Fits der Kühlungsfunktion mit nur *einem* Exponenten α.
Zwischen 80.000 K ($\approx 2\,T_{\rm eff}$ bei O-Sternen) und den durch Schockheizung zu erwartenden Temperaturen von einigen 10^6 bis 10^7 K ist ein relativ guter $\alpha = -1/2$ Fit der Kühlungsfunktion möglich,

$$\Lambda(T) = A\,T^{-1/2} \qquad \text{mit} \qquad A = 1,64 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{K}^{1/2} \qquad \text{für} \qquad 8 \cdot 10^4\,\mathrm{K} \le T \le 5 \cdot 10^6\,\mathrm{K}. \tag{8.5}$$

Im Rahmen vorliegender Arbeit wird ausschließlich die Kühlungsfunktion (5) verwendet.

Nichtgleichgewichtsionisation und -kühlung

(Siehe hierzu auch Zeldovich und Raizer (1966), Vol. I, Kap. VI.) Nur falls die Zeitskala zur Einstellung des Ionisationsgleichgewichts bedeutend *kürzer* ist als *alle* anderen Zeitskalen, und das heißt hier insbesondere kürzer als die hydrodynamische Heizungszeitskala durch Schocks sowie die radiative Kühlungszeitskala, ist die Annahme stationärer Ionisations- und Kühlungsgleichgewichte sinnvoll. Die Einstellung thermodynamischen Gleichgewichts bezüglich elastischer Stöße und bezüglich Ionisation geschieht auf jeweils

charakteristischen *Relaxationszeit*skalen. Stoßgleichgewicht, welches eine Maxwellverteilung einstellt (und damit eine Temperatur definiert), wird innerhalb einiger weniger Stöße erreicht, hat also die kürzeste Relaxationszeit.
Alle anderen Freiheitsgrade, also Ionisation, Atomanregung, Vibration und Rotation, benötigen zur Einstellung eines Gleichgewichts *länger* als der translatorische Freiheitsgrad.
Im Gleichgewicht hängt der Zustand des Systems nur von Temperatur, Dichte und chemischer Zusammensetzung ab. Der Gleichgewichtszustand ist völlig unabhängig von irgendeinem vorherigen Zustand (also letztlich vom Anfangszustand) des Systems. Ist dagegen die Zeitskala zur Einstellung des Gleichgewichtszustandes *größer* bzw. von derselben Größenordnung wie eine andere Zeitskala des Systems (hier: Zeitskala zur Einstellung des Stoßgleichgewichts im Schock sowie radiative Kühlungszeit), so ist über diese letztere Zeit hinweg noch kein Gleichgewicht entstanden, der Zustand des Gases ist abhängig von der *durchlaufenen Historie*.
Nichtgleichgewicht der Ionisation innerhalb des Schocks und im nahen *postshock* Gebiet (die Ionisationszeitskala ist länger als die Zeitskala des Schockübergangs) ist für unsere Rechnungen nicht von Bedeutung, da wir uns nicht um eine Auflösung der Mikrostruktur des Schocks bemühen, sondern diesen als Unstetigkeit behandeln.
Bzgl. der hier durchgeführten hydrodynamischen Rechnungen ist das Gas ein reines H/He Gemisch, wobei diese beiden Elemente bereits im „kühlen", stationären Wind *vollständig* ionisiert sind. Für einfach ionisiertes Helium könnte man das mittlere Molekulargewicht am Schock bei Überschreiten einer gewissen Temperatur sprunghaft ändern, entsprechend der vollständigen Heliumionisation; dadurch wird z. B. der Kompressionsfaktor am Schock gegenüber dem rein translatorischen Schockstoß ($\rightarrow 4$ für $\gamma = 5/3$) verändert. Die *Metallionen*, deren Ionisationsverlauf tatsächlich nur durch eine entsprechende Rechnung gewonnen werden kann, sind bezüglich der Hydrodynamik des Windes eine vernachlässigbare Minorität. – Andererseits ist jedoch der Verlauf der Ionisation der Metallionen von großem Interesse für die Kenntnis der Temperaturabhängigkeit der Linienstahlungskraft.
Von großer Bedeutung für die im folgenden Kapitel 9 dargestellten Rechnungen ist die Konkurrenz zwischen Ionisationszeitskala und radiativer Kühlungszeit. Die radiative Abregung wurde als sehr schnell gegen die Stoßzeitskala vorausgesetzt bei der Herleitung der stationären Kühlungsfunktion (siehe oben), womit die Strahlungszeitskala als immer kurz gegen die Ionisationszeitskala vorausgesetzt ist. Doch dies betrifft nicht die Wind*dynamik*; diese hängt statt dessen vom Verhältnis der Zeitskala des *Energieverlusts* aufgrund von Abstrahlung (also der radiativen Kühlungszeit) zur Ionisationszeit ab.

Wir betrachten zunächst ein Plasma, das über eine lange Zeit aufgeheizt wurde, so daß sich tatsächlich ein Ionisationsgleichgewicht einstellen konnte, und bei dem dann die Heizquelle abgestellt wird. Die Temperatur sei so hoch, daß der Kühlungsexponent α negativ ist, die Kühlung mit steigender Temperatur also schlechter wird. Die Kühlungszeit sei kurz gegen die Ionisationzeit. Während das Gas kühlt, bleibt sein Ionisationsgrad nahezu konstant. Die geringe Kühlung bei hohen Temperaturen ist verursacht durch den zu hohen Ionisationsgrad von C, N, O. Dieser liegt nun (bei tiefen Temperaturen)

immer noch vor, das heißt die Nichtgleichgewichtskühlung geht insgesamt *langsamer* vor sich als die Gleichgewichtskühlung, die entsprechende Kühlungsfunktion liegt *unter* der Gleichgewichtsfunktion. – Aufgrund des anfänglichen Ionisationsgleichgewichts in diesem Beispiel sind die hohen Ionisationsgrade überhaupt *vorhanden*. Im instabilen Wind sollen diese in und hinter Schockfronten erzeugt werden. Sind nun Schockdurchgangszeit (womit sich eine neue Temperatur einstellt) und Kühlungszeit hinter dem Schock *kurz* gegen die Ionisationszeit, so wird das schockgeheizte Material bereits wieder abgekühlt sein, ehe es die hohen Ionisationsgrade erreichen kann (siehe auch Chen & White, 1991a), bei deren Vorhandensein die Kühlung schlechter wäre, die Kühlungszeit somit länger; das heißt, die Nichtgleichgewichtskühlung geht hier *schneller* vor sich als Gleichgewichtskühlung.
Durch Nichtgleichgewichtskühlung im Wind werden die relativ langen Kühlungszonen hinter heißen Schocks also verkürzt gegenüber einer stationären Ionisationsrechnung. Umgekehrt ausgedrückt: Da wir nur mit einer stationären Kühlungsfunktion rechnen, werden unsere langen Kühlungszonen *zu* lang sein gegenüber einer realistischen Nichtgleichgewichtsrechnung.

Wir geben eine kurze *Zusammenstellung* einiger wichtiger Arbeiten zu Ionisation und Strahlungskühlung an Schocks. – Die stationäre hydrodynamische + Ionisationsstruktur eines Schocks berechnet Cox (1972a,b,c) am Beispiel der Cygnus Loop. Eine sehr gute Zusammenfassung der Arbeiten bis 1980 geben McKee und Hollenbach (1980) in ihrem Review-Artikel. Eine zeitabhängige Ionisations- und Kühlungsrechnung für einen Schock in einem O-Sternwind wurde von Krolik & Raymond (1985) durchgeführt. Innes, Giddings & Falle (1987a, b) und Gaetz, Edgar & Chevalier (1988) behandeln einen *hydrodynamisch* nichtstationären Schock, welcher der oszillatorischen Kühlungsinstabilität von Langer et al. (1981) (siehe übernächsten Abschnitt) unterliegt. Das Ziel dieser Arbeiten ist vor allem ein Vergleich der oszillatorischen Kühlungsinstabilität für zeitabhängige Nichtgleichgewichtsionisationsrechnungen mit der Instabilität für einfache Potenzgesetzfits an die (stationäre) Kühlungsfunktion. Auch für zeitabhängige Rechnungen findet man, daß ab Schockgeschwindigkeiten von 140 bis 150 km/s die radiative Kühlungszone zu oszillieren beginnt. Die genaue Stabilitätsgrenze hängt von der Amplitude der anregenden Störungen ab (siehe Gaetz et al. (1988). Die Rechnungen mit zeitabhängiger Kühlung zeigen *dieselben qualitativen* Merkmale wie die Rechnungen mit einer Potenzgesetzkühlungsfunktion. Blondin, Fryxell & Königl (1990) schließlich behandeln Nichtgleichgewichtskühlung (mit der Kühlungsfunktion von Kafatos, 1973) für einen Jet.

Radiativer precursor; Stoßrekombination

Photonen aus der Kühlungszone hinter einem Schock können vom *preshock* Material absorbiert werden und dieses aufheizen, womit der Schockübergang schwächer wird, da das Material schon vorgeheizt ist. Dieser radiative *precursor* („Vorläufer") muß in stationären hydrodynamischen Rechnungen mittels *Iteration* behandelt werden, in zeitabhängigen Rechnungen macht er keine gesonderte Behandlung erforderlich. In den

Rechnungen zu Kapitel 9 ist der *precursor* jedoch nicht berücksichtigt.
Eine zweite Komplikation entsteht in stellaren Winden heißer Sterne durch die nicht mehr notwendig erfüllte Forderung geringer Dichten. Damit wird Stoßrekombination $\mathrm{Ion}^{n+} + e^- + e^- \rightarrow \mathrm{Ion}^{(n-1)+} + e^-$ neben der Strahlungsrekombination $\mathrm{Ion}^{n+} + e^- \rightarrow \mathrm{Ion}^{(n-1)+} + \gamma$ wichtig. Die Stoßrekombination als 3-Teilchenprozeß zerstört die einfache ρ^2-Abhängigkeit der Kühlungsfunktion. Schließlich kann man aufgrund der nicht mehr geringen Dichten in Winden nicht mehr einfach voraussetzen, daß das heiße Gas optisch dünn ist, und eine Behandlung des Strahlungstransports wird nötig.

8.4 Die kondensatorische thermische Instabilität

Es wird eine ausgedehnte, homogene, heiße, ruhende Gaswolke im thermischen Gleichgewicht betrachtet. Kühlt Gas (durch Abstrahlung) an einem Ort zufällig *etwas mehr* als Gas in der Umgebung, so wird es *im allgemeinen* (genaueres siehe unten) dichter werden; damit *erhöhen* sich die Stoßraten und also die Abstrahlungsverluste, das Gas kühlt *besser*: Es ist ein Zyklus entstanden, der schließlich zur Auskondensation der ursprünglich infinitesimal kleinen Störung führen kann.
Dieser Prozeß könnte, neben der Gravitation, über viele Größenordnungen hinweg verantwortlich für die „Struktur"bildung der Materie sein (beispielweise: solare Prominenzen, Kondensationen in planetarischen Nebeln, Galaxienenstehung aus dem intergalaktischen Gas, siehe Field, 1965).
Die thermische Instabilität wurde erstmals von Parker (1953) diskutiert, das Stabilitätskriterium in Strenge jedoch erst von Fields (1965) formuliert.
Da diese Instabilität die Kondensation eines Gasteilchens bewirkt, wird sie *lokale* oder *Lagrangesche* thermische Instabilität genannt. Etwas aussagekräftiger scheinen die Bezeichnungen *kondensatorische* oder *runaway* thermische Instabilität.
Das (konkrete) Stabilitätskriterium ist vom *thermischen* Verhalten des Gases bei Abkühlung abhängig; Field (1965) gibt beispielsweise das isochore und isobare Stabilitätskriterium an. Isochore Störungen (in der Sonnenkorona) und deren Kondensation wurden von Parker (1953) betrachtet, doch stellt Field hierzu fest, daß *Kondensation* und isochore Fluktuationen sich konträr entgegenstehen. Dagegen sind Druckgleichgewicht und Kondensationen miteinander konsistent, da es hier keine Druckkräfte gibt, welche bestrebt sind, die entstehenden Dichtekontraste aufzuheben.
Tatsächlich ist Druckkonstanz in der Strahlungskühlungszone hinter Schocks in sehr guter Näherung erfüllt (solange die Kühlungslänge kurz gegen die dynamische Länge ist): Hinter der Schockfront ist das heiße Gas *sub*sonisch, so daß Schallwellen zum schnellen Ausgleich von Druckdifferenzen führen können. Während Dichte und Temperatur sich in der Kühlungszone um Dekaden ändern können, ist der Druck nahezu konstant.

Das isobare Fieldsche *In*stabilitätkriterium für ein Gas mit Kühlungsfunktion $\sim \rho^2 T^\alpha$ (wegen ρ^2: siehe vorigen Abschnitt) lautet

$$\alpha < 2. \qquad (8.6)$$

Wir betrachten hierzu die thermische Energiegleichung eines Gasteilchens,

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = -A\rho^2 T^\alpha, \tag{8.7}$$

und verwenden die ideale Gasgleichung sowie Druckkonstanz $p = p_0$. Dies führt nach Integration auf

$$T_e^{2-\alpha} - T_a^{2-\alpha} = -\mu^2 k^{-2}(\gamma - 1)Ap_0(2-\alpha)(t_e - t_a), \tag{8.8}$$

wobei T_a die Temperatur des Teilchens zur Anfangszeit t_a und T_e die Temperatur zur Endzeit t_e ist. Kühlungsinstabilität heißt $T_e \leq 0$ für hinreichend spätes t_e. Damit ist die linke Seite der Gleichung negativ. Alle Größen auf der rechten Seite, außer eventuell $2-\alpha$, sind positiv, und demnach muß auch $2-\alpha$ positiv sein, also $\alpha < 2$ (für Instabilität). Bei dieser Herleitung ist interessant, daß die zeitliche Integration zur Feststellung des Instabilitätkriteriums notwendig ist. Aus der Differential-Kühlungsgleichung (unter Verwendung der Druckkonstanz) $dT\,T^{1-\alpha} = -C dt$ mit $C > 0$ kann nicht (direkt) auf die Stabilitätsgrenze geschlossen werden.

Der Kollaps geringer *preshock* Dichtefluktuationen in dünne, dichte „Blätter" hinter einem Schock aufgrund der thermischen Instabilität in der Kühlungszone kann zur Erklärung der filamentartigen Struktur von Supernova*remnants* herangezogen werden (McCray, Stein & Kafatos, 1975). Auf diese und ähnliche Ergebnisse wird noch weiter im nächsten Abschnitt eingegangen.

8.5 Die oszillatorische thermische Instabilität

Diese wurde von Langer, Chanmugam & Shaviv (1981, 1982) in numerischen zeitabhängigen Rechnungen zur Akkretion auf einen weißen Zwerg entdeckt. Die lineare Stabilitätsanalyse (die nur bis zu einem gewissen Grad analytisch möglich ist) wurde von Chevalier & Imamura (1982) durchgeführt. Sehr gute und ausführliche Erklärungen des Mechanismus der Instabilität werden in Langer, Chanmugam & Shaviv (1982), Gaetz, Edgar & Chevalier (1988) und Kinwah Wu, Chanmugam & Shaviv (1992) gegeben.
Diese Instabilität wird allgemein als *globale* thermische Instabilität bezeichnet, da sie die Struktur der ganzen Kühlungszone verändert, sich also nicht nur auf einzelne Gasteilchen erstreckt. Aus demselben Grund wird manchmal auch der (nicht sehr aussagekräftige) Name *Eulersche* thermische Instabilität verwendet. Weiterhin üblich ist die Bezeichnung *oszillatorische* thermische Instabilität.

Der stationäre Schock

Es wird das eindimensionale planare Problem eines supersonisch gegen eine Wand strömenden Gases betrachtet. Hierbei entsteht ein adiabatischer Schock, der zunächst

von der Wand wegläuft. Aufgrund der Strahlungskühlung wird der Schock abgebremst (s. u.) und bleibt schließlich im Abstand der *gesamten Kühlungslänge* von der Wand *stehen*: *Ohne* Strahlungskühlung wäre die Dichte hinter dem Schock konstant und der Schock müßte von der Wand weglaufen um der akkretierten Materie Platz zu schaffen; *mit* Strahlungskühlung hingegen wird sich die Position des Schocks gerade so einstellen, daß das Material an der Wand bis auf Temperatur 0 abgekühlt ist, somit unendlich dicht geworden ist (ungefähre Druckkonstanz in der Kühlungszone); das Material akkretiert dann in einer infinitesimal dünnen Schicht an der Wand.

Der Schwingungszyklus der Instabilität

Die Kühlungsfunktion sei wieder $A\rho^2 T^\alpha$, womit für die Kühlungslänge gilt (siehe Anhang 1)

$$L_c \sim \frac{T_{\text{post}}^{\frac{3}{2}-\alpha}}{A\rho} \sim \frac{v_{\text{pre}}^{3-2\alpha}}{A\rho}. \tag{8.9}$$

Für $\alpha \neq 1$ geht die Kühlungslänge also nicht proportional mit der *preshock* Geschwindigkeit.
Wir betrachten ein hinreichend kleines α (genaueres siehe unten). Erhält der stehende adiabatische Schock eine kleine auswärtige Geschwindigkeit, so erhöht sich die *preshock* Geschwindigkeit der einfallenden Materie, womit sich die *postshock* Temperatur erhöht: Die nun erforderliche Kühlungslänge ist größer als der Raumgewinn durch die auswärtige Bewegung des Schocks – wodurch der Schock *weiter* nach außen getrieben wird: Durch die erhöhte *postshock* Temperatur und damit verbundene schlechtere Kühlung kann das Material bis zur Wand hin nicht mehr abkühlen, also nicht mehr in der infinitesimal dünnen Schicht akkretieren. Entsprechend zum adiabatischen Schock baut sich ein Exzeßdruck auf, welcher den Schock weiter nach außen treibt.
Diese verstärkende, instabile Rückkopplung sei nochmals anhand eines Beispiels von Gaetz et al. (1988) gezeigt. Hierzu wird ein *sehr* kleines α betrachtet oder sogar eine Kühlungsfunktion, die oberhalb einer bestimmten Temperatur 0 ist. Eine kleine auswärtige Geschwindigkeitsstörung bewirkt dann eine extreme Vergrößerung der erforderlichen Kühlungslänge: Die *postshock* Strömung wird durch die Störung effektiv *adiabatisch* und der Schock mit einer Geschwindigkeit, die unabhängig von der verursachenden Geschwindigkeitsstörung ist, nach außen laufen. (Diese *abrupte* Verstärkung einer infinitesimalen Störung in eine endliche gilt nur für das angenommene sehr kleine α bzw. eine Kühlungsfunktion mit Sprungstelle; jedoch wird für jedes hinreichend kleine α eine infinitesimale Störung „stetig" in eine endliche Störung ($\rightarrow$ adiabatisches Gas) verstärkt.)
Der Umkehrpunkt im Verlauf der Oszillation kann wie folgt erklärt werden: Nach etwa einer Kühlungszeit hat der Schock hinter sich eine ausreichend lange Kühlungszone (entsprechend seiner auswärtigen Geschwindigkeit und der erhöhten *postshock* Temperatur) aufgebaut und wird zur Ruhe kommen – womit sich aber *preshock* Geschwindigkeit und *postshock* Temperatur verringern, eine (viel) kürzere Kühlungszone hinreichend ist (es entsteht ein Unterdruck im *postshock* Gas), der Schock wird also beginnen, zurück in

Richtung Wand zu laufen.

Kritischer Kühlungsexponent

Erstaunlicherweise ist bislang der kritische Wert für α, unterhalb dessen die oszillatorische Instabilität einsetzt, nicht *exakt* bekannt. Für eine Kühlungsfunktion $\sim \rho^2$ finden Langer et al. (1982) aus zeitabhängigen hydrodynamischen Rechnungen Instabilität für $\alpha \lesssim 1.6$. Sowohl aus linearer Stabilitätsanalyse und zeitabhängigen Rechnungen finden Chevalier & Imamura (1982) und Imamura, Wolff & Durisen (1984) Instabilität für $\alpha \lesssim 0.8$ in den höheren Moden und für $\alpha \lesssim 0.4$ in der Grundmode (bzgl. dieser Moden siehe Abschnitte 3.10 und 9.2). Bertschinger (1986) schließlich findet aus einer *drei*dimensionalen linearen Stabilitätsanalyse $\alpha \lesssim 1$ als instabilen Bereich.

Wir geben eine grobe Abschätzung des kritischen Kühlungsexponenten. Der ursprünglich ruhende Schock habe eine auswärts gerichtete Geschwindigkeitsstörung δv. Wir schreiben die Kühlungslänge als $L = B v_{\rm pre}^{3-2\alpha}$ mit konstantem $B \sim A^{-1}\rho_{\rm pre}^{-1}$. Wegen $\delta v = \delta v_{\rm pre}$ ist

$$\delta L = (3-2\alpha)\, L\, \frac{\delta v}{v_{\rm pre}}, \tag{8.10}$$

und die neue erforderliche Kühlungslänge ist $L + \delta L$. Durch die Auswärtsbewegung wächst die Ausdehnung der Kühlungszone mit $L + t\delta v$. Das Zeitintervall t, nach welchem die neue erforderliche Kühlungslänge durch die Auswärtsbewegung aufgebaut sein muß, kann wie folgt abgeschätzt werden: Die Strömungszeit der Materie vom Schock bis zur Wand ist $t_f \approx L_c/v_{\rm post}$. Die Materie kommt nicht vollständig abgekühlt an der Wand an, und ein Druckgradient baut sich auf; die Information hierüber breitet sich mit Schallgeschwindigkeit aus, d. h. die entsprechende Laufzeit ist vernachlässigbar. Die Auswärtsbewegung des Schocks wird also *weiter* angetrieben (durch den inneren Druckgradienten), wenn nach der Zeit t_f durch die Auswärtsbewegung des Schocks noch *nicht* die erforderliche Kühlungslänge $L + \delta L$ aufgebaut ist. Mit $v_{\rm pre} = 4 v_{\rm post}$ ergibt sich daraus als Instabilitätskriterium

$$\alpha < -\frac{1}{2}. \tag{8.11}$$

Dies ist weit unter der tatsächlichen Grenze $\alpha \lesssim 1$, d. h. Information über die zu geringe realisierte Kühlungslänge hat sich schneller ausgebreitet als t_f. Um $\alpha = 1$ als Stabilitätsgrenze zu erhalten, muß diese „Informations"zeit $t_f/4$ sein, was im Ungenauigkeitsbereich der verwendeten Abschätzung liegt. Die exakte Stabilitätsgrenze kann also nur durch eine *vollständige* hydrodynamische Lösung gewonnen werden.

Langer et al. (1982) verwenden als Stabilitätskriterium, daß die *neue* Kühlungslänge (aufgrund der Störung) *kürzer* als die stationäre sein soll, wenn der Schock eine *auswärtige* Geschwindigkeitsstörung erhält. Damit erhalten sie aus (10) ebenfalls die Stabilitätsgrenze $\alpha = -1/2$.

Periode der Oszillation

Die Periode der Oszillation ist, wie zu erwarten, mit der Kühlungszeit verknüpft. Langer et al. (1982) geben folgende Abschätzung. An den Umkehrpunkten ist die Schockgeschwindigkeit 0; bei der Ruhposition des stationären Schocks hat der oszillierende Schock seine maximale Geschwindigkeit. Hierfür wird die Geschwindigkeit eines adiabatischen Schocks mit $\gamma = 5/3, {\rm Ma} \to \infty$ verwendet, nämlich $v_{\rm pre}/3$, wobei $v_{\rm pre}$ die *preshock* Geschwindigkeit am stationären Schock ist; die mittlere Geschwindigkeit des Schocks während der Oszillation wird dann als $v_{\rm pre}/6$ angenommen. Für einen stark oszillierenden Schock findet man empirisch = numerisch, daß der Schock im Verlaufe der Oszillation bis unmittelbar an die Wand gelangen kann. Als Amplitude der Schwingung wird daher die Kühlungslänge L_c verwendet, und der Gesamtweg des Schocks über eine Periode ist etwa $4L_c$. Mit der Kühlungszeit $t_c \approx L_c/v_{\rm post}$ ergibt sich die Schwingungsdauer

$$t_{\rm osc} \approx 6\, t_c. \tag{8.12}$$

Dies ist nun eine erstaunlich gute Abschätzung: Chevalier & Imamura (1982) finden aus linearer Stabilitätsanalyse typischerweise (die Periode ist schwach von α abhängig)

$$t_{\rm osc} \approx 5\, t_c. \tag{8.13}$$

Es ist manchmal nicht einfach, Effekte der kondensatorischen und oszillatorischen thermischen Instabilität voneinander zu trennen (vgl. hierzu Rózyczka, 1985). Die von McCray et al. (1975) (siehe oben) beschriebene Verstärkung kleiner Dichtekontraste beim Durchgang von Material durch einen radiativen Schock ist durch die kondensatorische Instabilität verursacht. Entsprechend entstehen die von Falle (1975, 1981) beschriebenen *sekundären Schocks* in der Kühlungszone durch die kondensatorische Instabilität von Dichtefluktuationen: Die letzteren treten *in der* Kühlungszone beispielsweise bei der Bewegung des Schocks aufgrund der *oszillatorischen* Instabilität auf, wobei der schnelle Kühlungs*kollaps* der *kondensatorischen* Instabilität zur Erzeugung der sekundären Schocks führt (siehe hierzu Gaetz et al., 1988). Wir finden in eigenen Testrechnungen ebenfalls solche sekundären Schocks, und zwar während eines wohldefinierten Zeitintervalls während jedem Oszillationszyklus, siehe nächstes Kapitel.

8.6 Der Fermimechanismus in Schocks

Geladene Teilchen können in Schockfronten auf relativistische Energien beschleunigt werden. Wir folgen hier der Darstellung in Bell (1978a), McKee & Hollenbach (1980) und Sagdeev & Kennel (1991). Es wird ein planarer Schock betrachtet, dessen Ausbreitungsrichtung parallel zu den (stellaren, planetaren) magnetischen Feldlinien ist. Die Diffusionslänge des betrachteten Teilchens sei so groß, das es sich *stoßfrei* über den Schockübergang hinweg bewegen kann; dies ist erfüllt für sehr energiereiche Teilchen

(→ kosmische Strahlen). Im *postshock* Bereich herrscht Plasmaturbulenz (für Details siehe Bell, 1978a), und, wie von Axford et al. (1977) und Bell (1977) vorgeschlagen, verursachen die hochenergetischen Teilchen im *preshock* Bereich die Entstehung von Alfénwellenturbulenz (siehe wiederum Bell, 1978a). Beide turbulenten Bereiche *streuen* die hochenergetischen Teilchen, und bei jedem zyklischen Durchgang durch den Schock gewinnen die Teilchen Energie nach dem Fermiprozeß erster Ordnung. – Wir gehen hier nicht darauf ein, wie die Teilchen zunächst auf die hohen Energien gebracht werden, damit die soeben beschriebene Beschleunigung einsetzen kann (Bell, 1978b).

Dieser Mechanismus wurde zur Erklärung der beobachteten harten Komponente der Röntgenstrahlung $E > 2$keV von OB-Sternen vorgeschlagen (Chen & White, 1991a): Die stellaren UV Photonen sollen hierbei durch den inversen Comptoneffekt an den (durch den Fermi Prozeß erzeugten) relativistischen Elektronen in Röntgenphotonen umgewandelt werden. (Eine andere Erklärung dieses harten Anteils des Spektrums geschah im Lucy-Modell (1982b) durch die Annahme, daß etwa jeder 200ste Schock sehr viel heißer als die anderen Schocks ist, siehe Abschnitt 7.5.) Aus einem Vergleich der Ergebnisse eines entsprechend phänomenologischen Windmodells (wiederum aufbauend auf dem Lucy-Modell, nun aber ohne seltene starke Schocks) mit den SSS Daten der drei Orion OB-Überriesen (Cassinelli & Swank, 1983, sowie Abschnitt 7.5) finden Chen & White, daß die photosphärischen Magnetfelder dieser Sterne nicht größer als höchstens einige Gauß sein dürfen, was einen sehr geringen Wert darstellt.

Neben der harten Röntgenkomponente bewirkt der Fermimechanismus weitere nichtthermische Anteile in anderen Spektralbereichen: 1. Nichtthermische *Radio*emission aufgrund der Synchrotronstrahlung relativistischer Elektronen (White, 1985, vgl. Abschnitt 7.1). 2. γ–Strahlung im 0,1 GeV-Bereich (diese haben also um 5 Dekaden höhere Energien als die harten Röntgenstrahlen!) (Chen & White, 1991b, White & Chen, 1992a, b) Die GeV-*Brems*strahlung relativistischer Elektronen wird dabei nur eine geringe Effizienz haben; relativ hohe Raten soll hingegen der Stoß relativistischer Protonen mit thermischen Protonen haben, wobei neutrale Pionen entstehen, welche nach kurzer Zeit in Photonen mit Energien um 67 MeV zerfallen. Diese Strahlung sollte für OB- und WR-Sterne gerade an der Beobachtungsgrenze des *Gamma Ray Observatory* liegen, siehe Abschnitt 7.6.
White & Chen (1992b) geben eine Zusammenstellung des Energiebudgets in einem O-Stern (im Rahmen des Lucyschen Schockmodells). Demnach wird etwa 1 % der kinetischen Energie des Windes in Schocks dissipiert. (Speziell dies nur im Lucyschen Schockmodell. In den OCR-Winden mag dies ein bedeutend kleinerer Bruchteil sein.) Der größte Teil der Schockenergie wird als thermische Röntgenstrahlung emittiert; durch die Selbstabsorption des Windes sind aber nur etwa 0,1 % davon beobachtbar. 10 % der Schockenergie gehen in die Erzeugung relativistischer Protonen, 1 % in die Erzeugung relativistischer Elektronen (dies können natürlich nur grobe Abschätzungen sein). 10 % der Energie der relativistischen Protonen sollte durch Pionzerfall in γ–Strahlung umgewandelt werden, 100 % der Energie der relativistischen Elektronen gehen durch den inversen Comptoneffekt in harte Röntgenstrahlung und γ–Strahlung. Nur 0,01 % der Energie der relativistischen Elektronen wird als Synchrotron-Radiostrahlung abgestrahlt.

8.7 Reibungsheizung und Stoßentkopplung

Die Stoßkopplung zwischen Elektronen, Protonen und Metallionen ist für OB-Überriesen so stark, daß der stationäre Wind als *Einkomponenten*medium beschrieben werden kann (Castor, Abbott & Klein, 1976): Obwohl nur die Metallionen durch die Linienstrahlungskraft beschleunigt werden, übertragen sie ihren Impuls durch Coulombstöße schnell auf das restliche Windplasma. Springmann (1991) und Springmann & Pauldrach (1992) untersuchen die *sehr dünnen* Winde von B-Hauptreihensternen, Zentralsternen planetarischer Nebel und O-Unterzwergen. Aufgrund der dort möglichen Driftgeschwindigkeiten zwischen Protonen und Ionen in der Größenordnung der thermischen Geschwindigkeit der Protonen kann die Einkomponentennäherung ungültig werden. Die Reibungsheizung dominiert die Energiegleichung, diese Winde sind nicht mehr im radiativen Gleichgewicht; die Temperatur kann auf Werte über 100.000 K ansteigen. Es kommt schließlich zur Entkopplung der Metallionen und einem Durchbruch ins *runaway*-Regime: Für hinreichend große Driftgeschwindigkeiten ($\approx$ einige $v_{\rm th}$) fällt die Reibung zwischen Ionen und restlichem Windplasma stark ab, womit die Ionen frei beschleunigt werden können; das restliche Windplasma wird nicht mehr beschleunigt, wodurch die beobachtete Endgeschwindigkeit verringert wird.
Bezüglich der stark geklumpten OCR-Winde besteht die Möglichkeit, daß Reibungsheizung und Ionen*runaway* in den extrem verdünnten Gebieten zwischen den Schalen eine Rolle spielen. Dies wird bislang in den Rechnungen nicht berücksichtigt.

9

Instabile Windmodelle mit Energietransfer†

Aus der Vielzahl der Beobachtungsphänomene, die auf eine zeitliche Variabilität von Sternwinden hinweisen – nämlich nichtthermische Radioemission, verstärkte Infrarotemission, Variabilität der optischen Windlinien, insbesondere $H\alpha$, diskrete Absorptionskomponenten in ungesättigten UV-Linien, schwarze Absorptionströge in gesättigten UV-Linien, Variabilität am blauen Rand von gesättigten UV-Linien und schließlich Röntgenbeobachtungen – stehen die Röntgenbeobachtungen im *direktesten* Zusammenhang mit dem Energietransfer im Wind.

In den letzten Jahren konnte überzeugend widerlegt werden (Cassinelli & Swank, 1983, Baade & Lucy, 1987; siehe Kapitel 7), daß die Röntgenstrahlen aus einer dicht über der Photosphäre liegenden Korona stammen; sie müssen ihren Ursprung also im stellaren Wind haben.
Die vorherrschende Meinung ist inzwischen, daß die Röntgenstrahlung von *Schocks* im Wind stammt (eventuell auch aus einer heißen, weit außen im Wind liegenden Korona), wobei die Ursache der Schocks (oder der äußeren Korona) die Instabilität der Linienstrahlungsbeschleunigung ist. Die Schocks treten bevorzugt in Paaren von *reverse* und *forward* Schocks auf, welche eine dichte *Schale* oder einen Materie*klumpen* beranden.
Bisherige Simulationen solcher strukturierter Winde geben kein klares Bild bezüglich des *Energietransfers*, d. h. der Heizung (durch Schocks) und Kühlung (durch Abstrahlungsverluste und adiabatische Expansion) im Wind. Die Arbeiten von Owocki et al. (1988) und Owocki (1991) beziehen die Strahlungskraft*instabilität* zwar erstmals als Ursache der Strukturbildung im Wind in numerische Rechnungen ein, dies jedoch für den Fall eines *isothermen* Windes. Der entgegengesetzte Extremfall eines *adiabatischen* Windes, also unter Vernachlässigung der Strahlungskühlung, wurde von Cooper und Owocki (1992) untersucht. (Die Bezeichnung „adiabatischer Wind" ist natürlich nicht ganz korrekt, da an den Schocks im Wind vermittels der Viskosität Entropie erzeugt wird. Doch folgen die korrekten Sprungbedingungen am Schock bereits aus den idealen, d. h. nichtviskosen hydrodynamischen Gleichungen (siehe Kapitel 2), und die Bezeichnung „adiabatisch" erscheint uns insbesondere geeignet, um diese Winde als entgegengesetztes Extrem zu den *isothermen* Winden zu kennzeichnen.)
Die Energiebalance wird in den Arbeiten von Krolik & Raymond (1985) (Nichtgleichgewichtsionisation und -kühlung an einem einzelnen Windschock) und MacFarlane & Cassinelli (1989) (parametrisierte Gleichgewichtskühlung in einer einzelnen Windschale) behandelt, nicht jedoch die Instabilität der Strahlungsbeschleunigung: In Krolik & Raymond wird der Schock *vorausgesetzt*, in MacFarlane & Cassinelli durch spezielle Randbedingungen erzeugt.

† *Transfer* bezieht sich hierbei auf die Umwandlung makroskopischer kinetischer Energie in Wärme (Schockheizung), sowie die Umwandlung thermischer Energie in Strahlung (radiative Kühlung) und makroskopische Arbeit (adiabatische Kühlung).

Lucy und White (1980) und Lucy (1982b) geben phänomenologische Modelle für die voll entwickelte Windstruktur. Beide Modelle bauen auf intuitiven Argumenten auf und folgen nicht der Entwicklung der Struktur ausgehend von kleinen Störungen. (Das Modell von Lucy (1982b) besteht aus sehr dicht beieinanderliegenden *forward* Schocks, ohne *reverse* Schocks.)
Schließlich gibt es einige Arbeiten unter Einbeziehung der Energiegleichung im *linearen* Bereich der Instabilität (MacGregor et al., 1979, Owocki & Rybicki, 1984). Hieraus kann natürlich keine Aussage betreffs der voll entwickelten Windstruktur gewonnen werden.

Castor (1987) und Owocki et al. (1988) führen Argumente an für eine *dynamische* Isothermie der Winde trotz des Vorhandenseins sehr starker Schocks: Zwar ist das Material unmittelbar hinter dem Schock auf hohe Temperaturen geheizt, jedoch sollte die Kühlung aufgrund Abstrahlung so effektiv sein, daß die Kühlungslänge (die Strecke zwischen abgekühlter Materie und Schock) kurz ist gegen die typische Längenskala der Strömung und dieses aufgeheizte Material daher keinen Einfluß auf die Strömungseigenschaften hat. Diese Voraussetzung effektiver Kühlung braucht aber in den folgenden Fällen *nicht* erfüllt zu sein: 1. In großer Entfernung vom Stern, wo die Kühlungslänge wegen der geringen Winddichte groß ist. 2. Für dünne Winde, beispielsweise von OB-Hauptreihensternen, in welchen die Kühlungslänge schon nahe dem Stern groß sein kann. – In diesen Fällen muß die Windstruktur tatsächlich unter Einbeziehung des Energietransfers berechnet werden.

Cooper und Owocki (1992) finden bei Behandlung der Strahlungskühlung in einem Wind mit der instabilen Strahlungsbeschleunigung *nur* radiative Kühlungszonen mit einer Ausdehnung von einem oder einigen wenigen Gitterintervallen; dies selbst weit außen im Wind eines B-Hauptreihensterns, wo nach einfachen Abschätzungen große Kühlungslängen zu erwarten sind.
Als möglicher Grund hierfür wird eine „Rückkopplung" von numerischen Advektionsfehlern und der angenommenen Kühlungsfunktion angegeben, wodurch die radiative Kühlungszone vom Schock her „weggefressen" werden soll (S. P. Owocki, 1992, priv. Mitteilung).
Alternativ zu dieser Erklärung wollen wir im vorliegenden Kapitel zeigen, daß der Kollaps der Kühlungszone (der in unseren Rechnungen ebenfalls auftritt) eines ruhenden radiativen Schocks durch die oszillatorische Kühlungsinstabilität (siehe Abschnitt 8.5) verursacht wird. Im Verlauf dieser Oszillation wird die Kühlungszone für Augenblicke so stark kontrahiert, daß sie unter die numerische Gitterauflösung fallen kann. Der Schock ist zu einem *isothermen* Schock geworden, für den es keine Kühlungsinstabilität und damit keine (Rück-)Oszillation mehr gibt: Der Kollaps ist *irreversibel*, und Information über den radiativen Schock ist verloren.

Wir beschreiben eine einfache Möglichkeit, diesen Kollaps zu verhindern, indem die Kühlungsfunktion bei niedrigen (und mittleren) Temperaturen so abgeändert wird, daß sie *dort keine* oszillatorische Instabilität mehr zeigt. Obwohl als Methode sicherlich vorläufig, ergeben sich hiermit *ausgedehnte Kühlungszonen* in instabilen Windmodellen,

die größenordnungsmäßig mit den erwarteten übereinstimmen und somit eine Basis für einen Vergleich mit Röntgenbeobachtungen darstellen.

Die weitere Gliederung dieses Kapitels ist wie folgt. In §1 werden die numerischen Grundlagen der Windmodelle unter Einbeziehung der Energiegleichung (mit Strahlungskühlung) diskutiert. §2 beschreibt *Test*rechnungen zum Kollaps der Kühlungszone durch die oszillatorische thermische Instabilität. Das Verfahren, den Kollaps durch Abänderung der Kühlfunktion zu verhindern, wird anhand dieser einfachen Strömung getestet. In §3 werden instabile stellare Windrechnungen mit Energiegleichung vorgestellt.

9.1 Numerische Behandlung der Energiegleichung in Windrechnungen

Auch in diesem Kapitel soll wieder der Wind des O-Überriesen ζ Pup betrachtet werden, die stellaren und Windparameter sind dieselben wie in Abschnitt 6.1, Tabelle 1 und 2. (Es wäre von Interesse, auch einen typischen OB-Hauptreihenstern wie beispielsweise τ Sco zu behandeln. Dies soll in Bälde geschehen. Wir haben hierauf im Rahmen vorliegender Arbeit aus Gründen der verfügbaren Rechenzeit verzichtet.)

Ebenfalls wie in Kapitel 6 dienen photosphärische Schallwellen als anregender Mechanismus, die Strahlungsbeschleunigung wird in der OCR-Formulierung mit der *Smooth Source Function* nach Owocki (1991) berechnet, hier jedoch unter Einbeziehung des Temperatureffekts auf die optische Tiefe und die Strahlungsbeschleunigung (siehe Abschnitt 4.10). Als Quellfunktion wird für einen direkten Vergleich mit isothermen Modellen auch hier diejenige für rein geometrische Verdünnung des Strahlungsfeldes verwendet.

Advektionsschema und Schema für Energiegleichung

Ebenfalls wie in den isothermen Rechnungen wird das van Leersche Advektionsschema und nicht das PPA-Schema verwendet. PPA ist nur dann besser geeignet, wenn man mit *sehr* wenig künstlicher Viskosität auskommen kann; ansonsten wird die gute Auflösung des Schemas an Schocks durch die Ausschmierung aufgrund der Viskosität wieder zunichte gemacht. Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, ist in der numerischen *mikroskopischen* Energiegleichung künstliche Viskosität nötig, um makroskopische kinetische Energie in thermische Energie überzuführen und somit die Abschneidefehler des *nichtkonservativen* Schemas zu unterdrücken (die falsche Schocksprünge und -positionen ergeben würden).
Jedoch verzichten wir damit auf den großen Vorteil des PPA-Schemas, Kontaktunstetigkeiten über beliebige Zeiträume scharf zu halten. Kontaktunstetigkeiten sollten innerhalb der Schalen zwischen den Kühlungszonen von *reverse* und *forward* Schock auftreten. Die Fähigkeit des PPA-Schemas, Kontaktunstetigkeiten scharf zu halten,

beruht auf dem Unstetigkeitsdetektor (Colella & Woodward, 1984). Wie im folgenden schon für einfache Testrechnungen festzustellen ist (und um so mehr in stellaren Windrechnungen gelten wird), arbeitet der Schockdetektor in radiativen Kühlungszonen nicht gut. Es kommt zu Rauschen hinter dem Schock (verursacht durch den Schock selbst und die beiden thermischen Instabilitäten), so daß eine Vielzahl von Punkten von dem Detektor als Unstetigkeiten gekennzeichnet würden.
Dies ist in Abbildung 1 dargestellt, wo alle vom Detektor in einem radiativen Doppelschock gefundenen Unstetigkeiten gegen die Zeit aufgetragen sind. Man sieht die Oszillation der Schockposition aufgrund der thermischen Instabilität aus Abschnitt 8.5. Der innere, dunkle Bereich ist das abgekühlte, adiabatische Material, der mitteldunkle Bereich ist die radiative Kühlungszone; die Kühlungskonstante A wurde so gewählt, daß die gesamte Kühlungslänge gleich 1 ist. (Weitere Aspekte dieser Rechnungen werden im nächsten Abschnitt diskutiert, Abb. 1 soll hier nur zur Veranschaulichung dienen.)

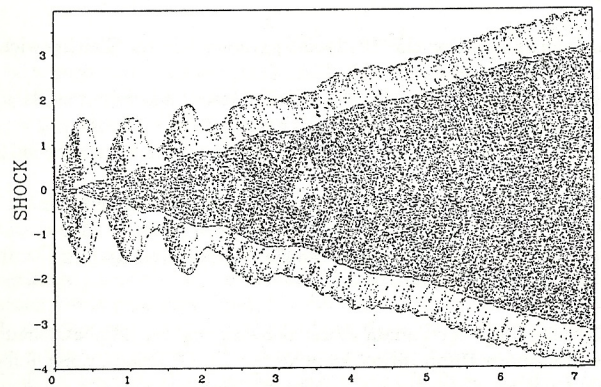


Abb. 9.1. Vom Detektor nach Colella & Woodward (1984) gefundene Unstetigkeiten in einem radiativen Doppelschock.

Die mikroskopische Energiegleichung wird nach dem Schema von Winkler & Norman aus Abschnitt 2.2 gelöst, die Kühlungsgleichung selbst (nach Operatorsplitting),

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -B\,T^{\alpha}, \\ B &= A\frac{\mu(\gamma-1)}{k}\rho, \end{aligned} \tag{9.1}$$

mit dem *zeitintegrierten* Verfahren aus Anhang 5. Die verwendete Kühlungsfunktion ist die einfachst mögliche, nämlich für Gleichgewichtskühlung mit $\alpha = -1/2$, siehe Abschnitt 8.3.

In den Windrechnungen mit Energiegleichung treten dann vier bis fünf, teilweise konkurrierende Längenskalen (und entsprechende Zeitskalen) auf:

1. die viskose Längenskala des Schocks, die durch künstliche Viskosität auf einige Gitterabstände eingestellt ist,
2. die mit der Strahlungsbeschleunigung und deren Instabilität verknüpfte Längenskala, hier die Sobolevlänge,
3. die radiative Kühlungslänge hinter Schocks,
4. die adiabatische, hydrodynamische Längenskala im Wind,
5. die barometrische Skalenhöhe am inneren Rand sowie die Wellenlänge photosphärischer Schallwellen (siehe Punkt 2).

9.2 Der Kollaps der Kühlungszone

Rechnungen von Cooper und Owocki (1992) mit parametrisierter Gleichgewichtsstrahlungskühlung ($\alpha = -1/2$) ergeben ausschließlich Kühlungszonen mit einer Ausdehnung von einem bis einigen wenigen Gitterabständen; also *keiner* Ausdehnung, da schon die kürzeste erlaubte numerische Längenskala des viskosen Schockübergangs zwei bis drei Gitterabstände breit ist. Exakt dasselbe Verhalten haben wir auch in eigenen Rechnungen gefunden.
In Abschnitt 8.5 wurde die oszillatorische thermische Instabilität für eine Kühlungsfunktion $\sim \rho^2\, T^\alpha$ mit $\alpha \lesssim 1$ beschrieben. Es soll nun gezeigt werden, daß diese Instabilität die Ursache der obigen numerischen Anomalie für einen (relativ zum numerischen Gitter) ruhenden radiativen Schock ist.

Die *minimale Kühlungslänge* im Verlauf dieser Schwingung der adiabatischen Schockposition um die stationäre Ruhposition kann unter die Gitterauflösung fallen – die Numerik „vergißt" die Existenz der Kühlungszone, und es verbleibt ein isothermer Schock. Für einen solchen gibt es aber keine Kühlungsoszillation mehr, daher keine Rückschwingung zu einem adiabatischen Schock mit ausgedehnter Kühlungszone: Aus der (reversiblen) Oszillation wurde ein *irreversibler* Kollaps des radiativen Schocks zu einem isothermen Schock.

Testrechnung mit Wandströmung

Um diese Hypothese zu prüfen, führten wir Testrechnungen für den planaren Wandschock von Chevalier & Imamura (1982) durch. Die physikalische Situation wurde in Abschnitt 3.10 beschrieben. Wie in diesem Abschnitt werden auch hier natürliche Einheiten $k = \mu = 1$ verwendet. Die Randbedingung ist eine undurchlässige Wand, $v_{\rm Wand} = 0$.

Der entscheidene Parameter, von dem der Kollaps der Kühlungszone abhängt, ist das Verhältnis „Res" von stationärer Kühlungslänge L_c zu Gitterlänge Δx, Res $= L_c/\Delta x >$ 1. Hierzu kommt als zweiter wesentlicher Parameter die Machzahl des Schocks. Dies ist intuitiv naheliegend und wird durch die Rechnungen bestätigt.
Die *adiabatische* Machzahl ist durch den *Temperatur*sprung am Schock festgelegt. Es ist am starken Schock $T_{\rm post} = \frac{3}{16}\frac{\mu}{k} v_{\rm pre}^2$, weiterhin ist $a_{\rm pre} = (5/3 \cdot kT_{\rm pre}/\mu)^{1/2}$, also

$$\mathrm{Ma}_{\rm adi} = \frac{4}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{T_{\rm post}}{T_{\rm pre}}}. \tag{9.2}$$

Der *Dichte*„sprung" andererseits über den gesamten radiativen Schock ist durch die *isotherme* Machzahl (mit $\gamma = 1$) bestimmt,

$$\frac{\rho_{\rm rad}}{\rho_{\rm pre}} = \mathrm{Ma}_{\rm iso}^2, \tag{9.3}$$

wobei die Machzahlen zusammenhängen gemäß

$$\frac{5}{3}\,\mathrm{Ma}_{\rm adi}^2 = \mathrm{Ma}_{\rm iso}^2. \tag{9.4}$$

Mit (9.2) können typische Machzahlen in instabilen O-Sternwinden abgeschätzt werden: Mit $T_{\rm pre} = T_{\rm eff} \approx 4{\cdot}10^4$ K und $T_{\rm post} \approx 4{\cdot}10^6$ K (was sich aus den Röntgenbeobachtungen ergibt), folgt $\mathrm{Ma}_{\rm iso} \approx 23$.

Die Parameter Res und Ma werden nun über einen weiten Bereich variiert, um festzustellen, wann der radiative Schock kollabiert oder über mehrere Perioden hinweg oszilliert. (Die Kühlungskonstante ist wieder so gewählt, daß die gesamte stationäre Kühlungslänge gerade 1 ist). In Tabelle 1 sind diejenigen Werte von $\mathrm{Ma}_{\rm iso}$ und Res durch einen Kreis gekennzeichnet, für die es zu *keinem* Kollaps kommt. (Die anderen Symbole werden weiter unten erklärt.) Man sieht, daß mit wachsender Auflösung Res Schocks mit immer größeren Machzahlen behandelt werden können, ohne daß es zu einem Kollaps kommt. Die Entscheidung, ob ein Kollaps stattfindet, ist hierbei nicht ganz objektiv: Es gibt Fälle, in denen der Schock über einen Zeitraum von mehr als einer Schwingungsdauer an der Wand steht, dann wieder eine Schwingung durchführt, um schließlich wieder für längere Zeit an der Wand zu verbleiben. Alle derartigen Zweifelsfälle werden als Kollaps gewertet, so daß in Tabelle 1 nur diejenigen Fälle aufgeführt sind, die *eindeutig* nicht zum Kollaps führen.

Abbildung 2 zeigt drei Fälle geringer werdender Auflösung, nämlich Res = 30, 15 und 8, bei einem Verhältnis $T_{\rm post}/T_{\rm pre} = 100$. Für jeden der drei Fälle sind Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur gezeichnet. Um die verschiedenen Momentaufnahmen räumlich zu separieren, werden die Ergebnisse in einem transformierten System dargestellt,

$$x_G = x + V_G t \equiv x + t. \tag{9.5}$$

Tabelle 1: Kollaps vs. Oszillation für verschiedene (Ma,Res)-Werte. Erklärung der Symbole im Text bzw. in der Legende.

```
[1]      Symbol   |   T-swi/T-eff
         ---------|----------------
            o     |        0
            +     |       15
            #     |       30

[2]   -   above: T-swi/T-eff + 5 (i.e. 10 resp. 25) works also
      -   below: T-swi/T-eff - 5 (i.e. 20 resp. 35) works also

[3]     + resp. #  above: works only for 20 resp. 35
        + resp. #  below: works only for 10 resp. 25
```

T_po/T_eff	4	6	8	10	14	20	30	T_po/T_eff	Mach isoth.
200					- # -	- # -	+o#	200	32.7
100		- (#)	+- # -	+- # -	-- +# --	- - +o# - -	+o#	100	23.1
50	(#) -	- +	- +o# - -	- +o# - -	- +o - #	- +o - #	+o	50	16.3
20	o	o	o	o +	o	o +	o	20	10.3
10	o	o	o	o	o	o	o	10	7.3
	4	6	8	10	14	20	30		

T_e ff

Resolution == L_cool_stat / dx_grid

(Es wird *keine* entsprechende Transformation der Geschwindigkeiten

$$v_G = v + V_G \equiv v + 1 \tag{9.5'}$$

durchgeführt.) Die numerischen Ergebnisse in Abb. 2 sind *nicht* bestmögliche: Es ist hier auf eine gute Auflösung der Kühlungszone verzichtet, da wir uns gerade für *kleine* Werte des Parameters Res interssieren.
Da die *postshock* Geschwindigkeit ungefähr 1/4 ist, ist die Kühlungszeit in Abb. 2 $t_c \approx 4$. Die Rechnungen werden bis zum Zeitpunkt $t = 72$ ausgeführt, entsprechend 18 Kühlungszeiten. Der zeitliche Abstand zwischen den Momentaufnahmen in Abb. 2 ist jeweils eine Kühlungszeit. Die Schwingungsdauer sollte nach Chevalier & Imamura

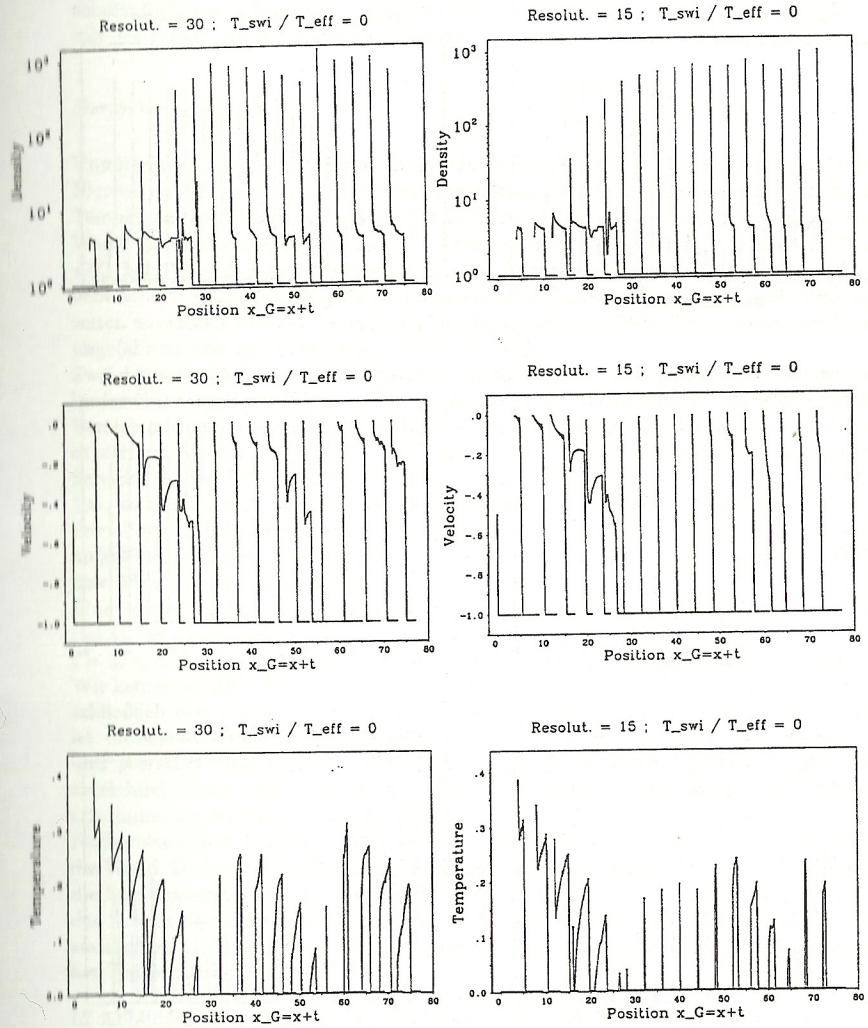


Abb. 9.2a. Oszillation und Kollaps eines radiativen Wandschocks in Abhängigkeit von der Gitterauflösung Res. *Linke Spalte*: Res=30. *Rechte Spalte*: Res=15.

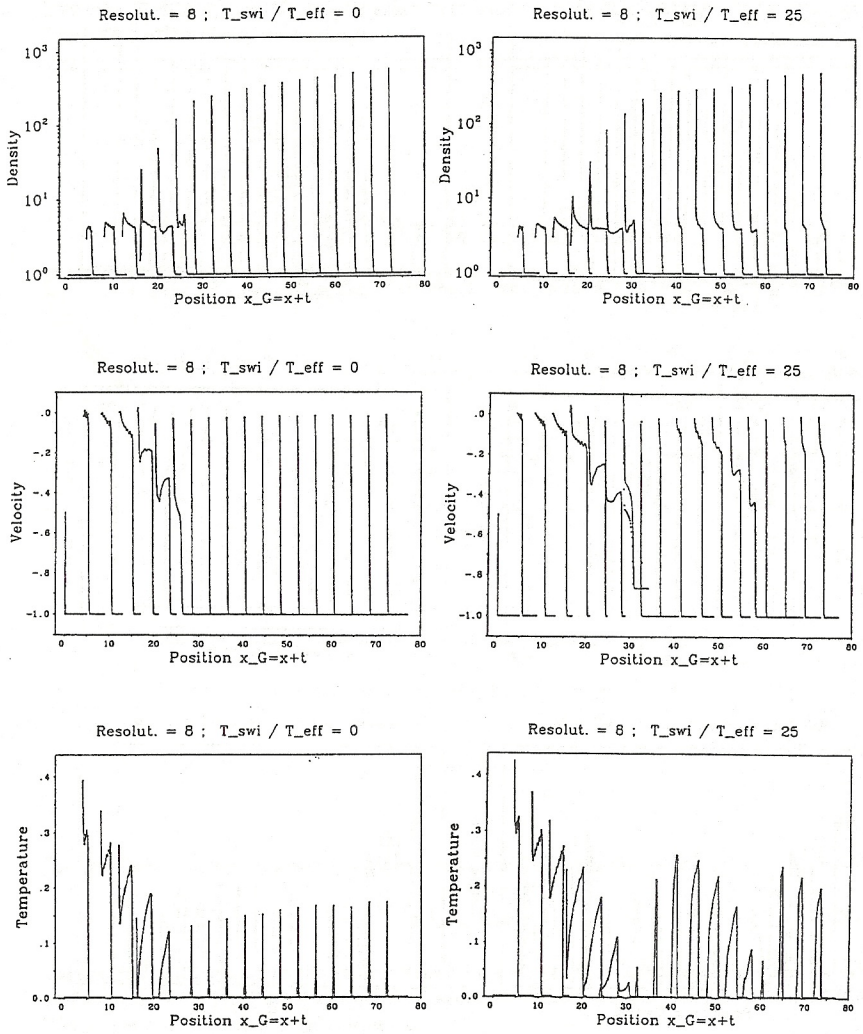


Abb. 9.2b. *Linke Spalte*: Res=8, kollabiert. *Rechte Spalte*: Res=8, jedoch $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 25$.

(1982) für einen Kühlungsexponenten $\alpha = -1/2$ etwa 6 Kühlungszeiten sein (siehe Abschnitt 8.5), was 3 Schwingungszyklen über einen Zeitraum von 72 ergibt. Dies stimmt mit den numerischen Ergebnissen überein.

Der Schwingungszyklus

Unmittelbar nach $t = 0$ beginnt ein adiabatischer Schock von der Wand wegzulaufen. Hierbei ist auf den ersten zwei oder drei Gitterpunkten die Dichte viel zu klein, die Temperatur entsprechend zu groß; dies ist Nohs (1987) künstliche Aufheizung an einer Wand (siehe Abschnitt 3.6), die ihre Ursache in der Verwendung künstlicher Viskosität hat. Während sich der Schock von der Wand wegbewegt, kühlt das Gas hinter dem Schock aufgrund von Abstrahlungsverlusten, und über die ersten drei Kühlungszeiten entwickelt sich der Verlauf von Dichte, Geschwindigkeit, Temperatur und Druck ungefähr zu dem einer stationären Kühlungszone.
Zwischen vier und fünf Kühlungszeiten werden Geschwindigkeits- und Dichteverlauf in der Kühlungszone nichtmonoton; in der Nähe der Wand entsteht ein sehr schmaler Bereich mit großer Variation in beiden Größen. Es ist in diesem Bild nicht eindeutig, ob es sich um die von Falle (1975, 1981) und Gaetz et al. (1988) gefundenen *sekundären* Schocks in der Kühlungszone handelt (vgl. Abschnitt 8.5); der Dichtesprung ist $\approx$ 100, so daß es sich nur um *isotherme* Schocks handeln kann – tatsächlich sind an ihrer Position keine Temperatursprünge zu finden. Damit sind sie aber numerisch nicht aufgelöste radiative Schocks, und es sind genauere Rechnungen mit feinerem Gitter bzw. kleinerer Machzahl nötig.
Eine solche Rechnung, mit $Res = 50$ und $\mathrm{Ma_{iso}}$=5, ist in Abbildung 3 für einen radiativen Doppelschock dargestellt. Die 4 Momentaufnahmen sind zu Zeitpunkten $t = 2, 4, 6, 8\,t_c$; der innere radiative Schock ist numerisch aufgelöst bei $6\,t_c$ zu sehen.
Wir kehren zu Abb. 2 zurück. Nach sechs Kühlungszeiten läuft der adiabatische Schock schließlich einwärts in Richtung Wand. Die *mögliche* Maximalgeschwindigkeit hierfür ist die Geschwindigkeit des einströmenden Materials, denn ansonsten würden *pre-* und *postshock* Bereich ihre Rollen vertauschen. Diese Maximalgeschwindigkeit wird tatsächlich (fast) angenommen, so daß der Schock momentan (fast) vollständig verschwindet: an der Schockposition ist kein Temperatursprung mehr zu sehen.
Nach etwa sieben Kühlungszeiten ist der Moment größter Annäherung des Schocks an die Wand. Da hierbei die Relativgeschwindigkeit Schock/Wand gleich 0 ist, ist *nur* jetzt die Sprungstemperatur dieselbe wie bei einem stationären radiativen Schock, bei dem der Schock ebenfalls relativ zur Wand ruht, dann aber im viel größeren Abstand der stationären Kühlungslänge. Dieser Moment größter Annäherung ist (also) zu erkennen am Temperatursprung 3/16.

In Abbildung 2 oszilliert für Res=30 und 15 der Schock aus seiner Position größter Annäherung zurück. Für Res=8 jedoch findet ein Kollaps statt, der Schock wird (dynamisch) *isotherm* und oszilliert nicht mehr zurück. Der adiabatische Temperatursprung in Abb. 2 widerspricht nicht der Isothermie des Schocks, denn die anschließende Kühlungszone ist (weniger als) einen Gitterabstand breit, der Schock dagegen selbst etwa 3, und

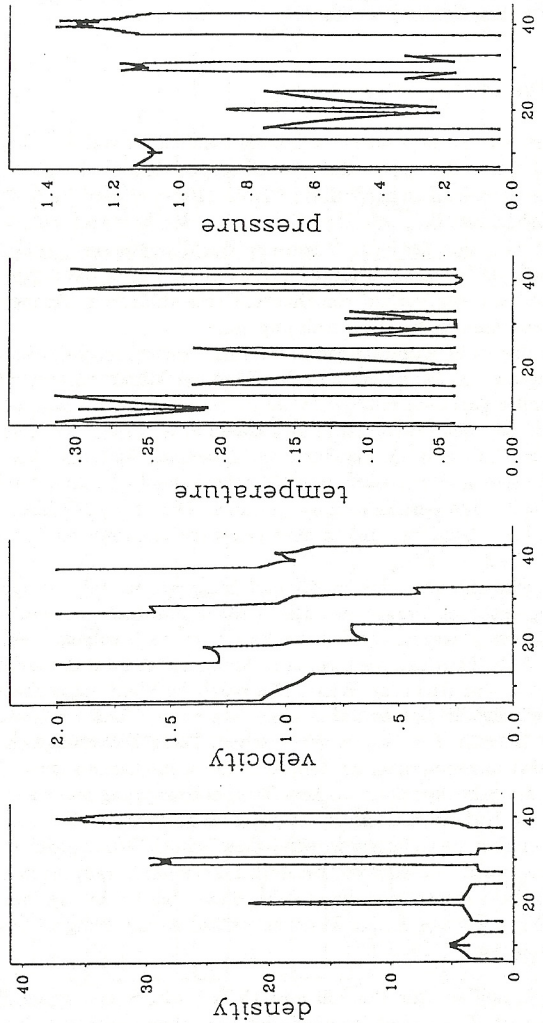


Abb. 9.3. Sekundärer radiativer Schock nahe dem dichten Schalenkern (dritte Momentaufnahme).

man muß daher adiabatischen Schock plus „Kühlungszone" als isothermen Schock auffassen. Tatsächlich wird ein isothermer Schock mit $\mathrm{Ma} \to \infty$ im Abstand $x = 0$ vor der Wand ruhen, dies aufgrund der Sprungbedingungen

$$\frac{\rho_{\mathrm{post}}}{\rho_{\mathrm{pre}}} = \mathrm{Ma}_{\mathrm{iso}}^2, \qquad \rho_{\mathrm{post}} v_{\mathrm{post}} = \rho_{\mathrm{pre}} v_{\mathrm{pre}}. \tag{9.6}$$

Abänderung der Kühlungsfunktion

Um den Schalenkollaps zu verhindern, ändern wir die Kühlungsfunktion in der in Abbildung 4 gezeigten Weise. Unterhalb einer bestimmten Temperatur T_{swi} soll der Exponent $\alpha = 2$ sein; aus der Stetigkeit der Kühlungsfunktion bei T_{swi} folgt für die Kühlungskonstante $\tilde{A}$ unterhalb von T_{swi},

$$\tilde{A} T_{\mathrm{swi}}^2 = A T_{\mathrm{swi}}^{-1/2}, \qquad \text{also} \qquad \tilde{A} = A T_{\mathrm{swi}}^{-5/2}. \tag{9.7}$$

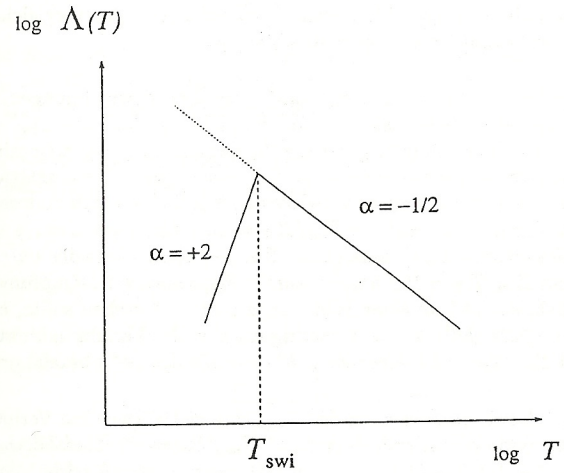


Abb. 9.4. Abänderung der Kühlungsfunktion bei niedrigen Temperaturen.

Das *kritischste* Zeitintervall im Verlauf der Schockoszillation ist dasjenige zwischen dem Augenblick, in dem der Schock aufgrund seiner Bewegung Richtung Wand nahezu verschwindet, sowie dem Moment seiner Umkehr an der Wand – oder dem Kollaps an eben

derselben. Während der Zeit, in welcher der in Richtung Wand laufende Schock nahezu vollständig verschwunden ist, kühlt wegen der entsprechend niedrigen *postshock* Temperatur das Gas in der *gesamten* Kühlungszone mit der modifizierten Kühlungsfunktion $\Lambda \sim \rho^2 T^2$.
Da für $T < T_{\rm swi}$ die modifizierte Kühlungsfunktion kleiner ist als die originale, ist die entsprechende Kühlungslänge größer, und der Schock sollte in seiner Bewegung in Richtung Wand durch den sich aufbauenden Exzeßdruck abgebremst werden. – Aufgrund der thermischen *Stabilität* des Kühlungsexponenten $\alpha = 2$ ist bei niedrigen Temperaturen die antreibende Ursache der Schockbewegung verschwunden, die Ozillation sollte insgesamt mit abgeänderter Kühlungsfunktion nicht so „heftig" sein.

Wird die Umschalttemperatur $T_{\rm swi}$ sehr klein gewählt, so kommt es wieder zum Kollaps der Kühlungszone, da die abgeänderte Kühlungsfunktion (fast) identisch mit der originalen ist. Für großes $T_{\rm swi}$ andererseits wird für (fast) alle Temperaturen $\alpha = 2$ anstelle von $\alpha = -1/2$ verwendet, also eine ganz andere physikalische Situation beschrieben. Der letztere Fall ist daran zu erkennen, daß es hier *ohne* Kollaps dennoch zum Erliegen der Oszillation kommt (denn $\alpha = 2$ ist stabil).

In Abbildung 2 ist ebenfalls der zuvor kollabierte Fall Res=8 gezeigt, wo nun mit $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 25$ der Kollaps verhindert worden ist. Die Ergebnisse stimmen recht gut mit Res=30, $T_{\rm swi} = 0$ überein, insbesondere sind die Kühlungslängen vergleichbar. Wir kommen auf diesen wichtigen Punkt weiter unten zurück.

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse aus einigen hundert solcher Testrechnungen. Es sind diejenigen Werte (Res, Ma) gekennzeichnet, für die es bei bestimmten $T_{\rm swi}$ *weder* zu einem Kollaps, *noch* zu einer Dämpfung der Oszillation aufgrund einer Dominanz des $\alpha = 2$ Terms kommt; wie schon zuvor sind nur die eindeutigen Fälle eingetragen. Die Tabelle wirkt auf den ersten Blick etwas verwirrend, ist jedoch einfach zu lesen:
Kommt es bei gegebenem (Res, Ma) für $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$ weder zum *Kollaps* noch zur *Dämpfung*, so ist dies durch ein „+" bezeichnet. Ein „−" steht *über* oder *unter* diesem „+", wenn es *auch* für $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15 \pm 5$ weder zum Kollaps noch zur Dämpfung kommt. (Als Detail schließlich: ein „+" an einer Stelle, an der ein „−" stehen sollte, bedeutet, daß *nur* bei diesem um ±5 erhöhten bzw. erniedrigten Wert das Verfahren funktioniert.) Endlich ist der Fall $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 30$ durch ein „#" (anstelle des „+") bezeichnet.

Aus der Tabelle ergibt sich beispielsweise für $T_{\rm post}/T_{\rm eff} = 100$ (welches Verhältnis für instabile Sternwinde typisch sein sollte), daß bei $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 30$ die *Gitterauflösung* um fast einen Faktor 4, bei $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$ um fast einen Faktor 3 schlechter werden kann gegenüber einer Rechnung ohne $T_{\rm swi}$, bis wieder der entsprechende Kollaps der Kühlungszone eintritt.

Kühlungslängen bei abgeänderter Kühlungsfunktion

Es soll nun die Veränderung der Kühlungszone durch die Abänderung der Kühlungsfunktion ($\alpha = 2$ für $T < T_{\rm swi}$) betrachtet werden.

Trotz abgeänderter Kühlungsfunktion wird der Temperaturverlauf im heißen *postshock* Material, das primär die beobachtete Röntgenstrahlung erzeugt, ähnlich sein zum Temperaturverlauf bei Verwendung der originalen Kühlungsfunktion; denn im Bereich hoher Temperaturen wird immer die korrekte Kühlfunktion mit $\alpha = -1/2$ verwendet.
Kritischer ist die Frage nach der gesamten Kühlungs*länge*: $L_{\rm cool}$ ist für $T_{\rm swi} > 0$ größer als für die reine $\alpha = -1/2$ Kühlungsfunktion. Ist nun entweder nur die abgeänderte oder die originale *und* die abgeänderte Kühlungslänge größer oder gleich der dynamischen Längenskala, so wird es durch $T_{\rm swi} > 0$ zu einer unerwünschten Veränderung der Wind*struktur* kommen. Entsprechend kommt es auch zu einer Veränderung *schmaler* Kühlungszonen (die ohne Einfluß auf die Windstruktur sind), und der Vergleich der Modelle mit Röntgenbeobachtungen wird willkürlich.

Es soll daher gezeigt werden, daß die Kühlungslänge nur eine *sehr schwache* (nämlich logarithmische) Funktion von $T_{\rm swi}$ ist. Sei hierzu $R > 1$ das Verhältnis der Kühlungslänge bei $T_{\rm swi} > 0$ zur originalen Kühlungslänge bei $T_{\rm swi} = 0$. Dann gilt am starken Schock für das (sehr) große Verhältnis $T_{\rm swi}/T_{\rm post} = 1/3$ (dies sei hier beispielhaft gewählt), daß

$$R = 0,76 + 0,16 \ \ln\left(\frac{T_{\rm post}}{T_{\rm eff}}\right). \tag{9.8}$$

Dies gibt $R = 1,5$ für das in instabilen Winden zu erwartende Temperaturverhältnis $T_{\rm post}/T_{\rm eff} = 100$: Die Kühlungslänge wird durch Abänderung der Kühlungsfunktion mittels $T_{\rm swi}$ also nur geringfügig vergrößert.

Um die gesamte Kühlungslänge zu berechnen, betrachten wir die Kühlungszeit zwischen den beiden Temperaturen $T_{\rm hot}$ und $T_{\rm cold}$,

$$t_{\rm cool} = \int_{T_{\rm hot}}^{T_{\rm cold}} dt_{\rm cool}. \tag{9.9}$$

Die mikroskopische Energiegleichung eines Materieteilchen ist (mit der Lagrangeschen Ableitung d/dt)

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = -p \,\mathrm{div}\, \mathbf{v} - A\rho^2 T^\alpha. \tag{9.10}$$

Der adiabatische Term kann in sehr guter Näherung in eine *Nebenbedingung* umgewandelt werden, nämlich

$$p = \text{konst} = p_{\rm post} \tag{9.11},$$

d. h. Konstanz des Druckes in der gesamten Kühlungszone. Der Grund hierfür wurde in Kapitel 8 angegeben. Es folgt mit

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = -A\rho^2 T^\alpha, \qquad \text{wobei} \qquad p = \text{konst},$$

daß

$$dt \equiv -\frac{k}{\mu(\gamma-1)}\frac{dT}{A\,\rho\,T^{\alpha}}, \tag{9.12}$$

wobei die kinetische Gleichung $\epsilon = kT/\mu(\gamma-1)$ verwendet wurde. Mit der idealen Gasgleichung $p/\rho = kT/\mu$ folgt weiter

$$dt = -\frac{k^2}{\mu^2(\gamma-1)}\,p_{\rm post}^{-1}\,\frac{dT\,T^{1-\alpha}}{A}. \tag{9.13}$$

In dem Integral (9) kann $p_{\rm post}$ dann als Konstante vor das Integral gezogen werden.
Die Kühlungs*länge* ist

$$L_{\rm cool} = \int_{T_{\rm hot}}^{T_{\rm cold}} dt_{\rm cool}\ |\,v_{\rm rel}\,|, \tag{9.14}$$

wobei $v_{\rm rel}$, die Relativgeschwindigkeit zwischen Schockfront und Materieteilchen, in guter Näherung durch die unmittelbare *postshock* Geschwindigkeit ersetzt werden kann,

$$L_{\rm cool} = v_{\rm post}\,t_{\rm cool}. \tag{9.15}$$

$v_{\rm post}$ fällt bei der Bildung des Verhältnisses R (s. o.) heraus, und mit (7) für die Kühlungskonstante $\tilde{A}$ ist für Kühlung von $T_{\rm post}$ nach $T_{\rm eff}$

$$R = \frac{\int_{T_{\rm post}}^{T_{\rm swi}} dT T^{3/2} + \int_{T_{\rm swi}}^{T_{\rm eff}} dT T^{-1} T_{\rm swi}^{5/2}}{\int_{T_{\rm post}}^{T_{\rm eff}} dT T^{3/2}}. \tag{9.16}$$

Mit einheitslosen Größen

$$t = T/T_{\rm eff}, \qquad t_s = T_{\rm swi}/T_{\rm eff}, \qquad t_p = T_{\rm post}/T_{\rm eff} \tag{9.17}$$

ist

$$R = \frac{\int_{t_p}^{t_s} dt\, t^{3/2} + t_s^{5/2}\int_{t_s}^{1} dt\, t^{-1}}{\int_{t_p}^{1} dt\, t^{3/2}}, \tag{9.18}$$

also

$$R = \frac{\frac{2}{5}\left(t_p^{5/2} - t_s^{5/2}\right) + t_s^{5/2}\ln t_s}{\frac{2}{5}\left(t_p^{5/2} - 1\right)}. \tag{9.19}$$

Für $t_s = 1$ (kein $T_{\rm swi}$) ist $R = 1$. Für $t_p \gg 1$ (starker Schock) und $t_s/t_p = 1/3$ ergibt sich aus (19) dann (8).
Tabelle 2 zeigt Werte für R in Abhängigkeit von $t_p = T_{\rm post}/T_{\rm eff}$ und $t_s = T_{\rm swi}/T_{\rm eff}$.

Tabelle 2:
Abhängigkeit der Kühlungslänge von $T_{\rm swi}$

$T_{\rm post}/T_{\rm eff}$	$T_{\rm swi}/T_{\rm eff}$	$R = L_{\rm swi}/L_{\rm true}$
300	10	1
	20	1
	30	1
200	10	1
	20	1
	30	1,1
100	10	1
	20	1,1
	30	1,4
50	10	1,1
	20	1,7
	30	3,1
40	10	1,1
	20	2,1
	30	4,7
30	10	1,3
	20	3,4
	30	8,5

Der physikalische Grund für die schwache Abhängigkeit der gesamten Kühlungslänge L_c von $T_{\rm swi}$ ist, daß der Hauptanteil zu L_c vom sehr heißen Material hinter dem Schock kommt, wo die Kühlung $\Lambda(T) = AT^{\alpha}$ sehr gering ist. Für $\alpha = -1/2$ kommt hierzu noch ein (sehr) kleiner Anteil zu L_s vom fast abgekühlten Material hinzu, wo Λ (sehr) groß ist. Für $\alpha = 2$ ist Λ für abgekühltes Material klein, gibt also einen stärkeren Beitrag zu L_c, kann aber für *hinreichend kleines* $T_{\rm swi}$ mit dem Anteil zu L_c vom heißen Material nicht konkurrieren. Diese Dominanz von Material hoher Temperaturen in L_c wird noch entscheidend durch die *Dichte*abhängigkeit $\sim \rho^2$ der Kühlungsfunktion, womit $L_c \sim \rho^{-1}$ ist, verstärkt: kühles = dichtes Material (wegen Druckkonstanz) kann hiernach besser kühlen und gibt nur noch kleine Beiträge zu L_c.

Für den kritischsten Fall einer abgeänderten Kühlfunktion, nämlich $t_s = t_p$, ist mit (19)

$$R \approx 2.5\,\ln\,t_p, \tag{9.20}$$

was für typische $t_p = O(100)$ ein $R \approx 10$ ergibt.

Einfluß der Advektion auf den Kollaps der Kühlungszone

Abbildung 5 zeigt, daß der Kollaps der Kühlungszone bei *Advektion* des gesamten radiativen Schocks über das numerische Gitter (wie es im variablen Wind der Fall ist) schon

bei besserer Gitterauflösung eintritt als beim bisher betrachteten ruhenden radiativen Schock. (Die Wand im bisherigen Testproblem entspricht der Kontaktunstetigkeit im Wind.)
In Abb. 5 (diese zeigt, entsprechend Abb. 1, mit dem Detektor von Colella & Woodward (1984) gefundene „Unstetigkeiten") strömen zwei planare Gasstrahlen gegeneinander, mit Geschwindigkeiten (+1/−1), (+1,1/−0,9) und (+1,2/−0,8). Die Kontaktunstetigkeit zwischen dem kühlen Ende beider radiativer Schocks bewegt sich dann mit einer Geschwindigkeit 0, 0.1, bzw. 0.2 über das Gitter – dies, weil linke und rechte *preshock* Dichte gleich sind. Der Fall (+1/−1) entspricht dem bisher betrachteten Schock vor einer stehenden Wand, der in Abb. 5 als „(Wand/−1)" bezeichnet ist, und entsprechend sind auch die numerischen Ergebnisse in guter Übereinstimmung. Im Lauf der Zeit zerfällt die *Grund*schwingung zugunsten einer höherfrequenten *Ober*schwingung kleinerer Periode, wie von Chevalier & Imamura (1982) aus einer linearen Stabilitätsanalyse gefunden, siehe Abschnitt 8.5.

Im Fall zweier Gasstrahlen mit Geschwindigkeiten (1,1,−0,9) (in Abbildung 5 im Ruhsystem der Kontaktunstetigkeit gezeichnet) kollabiert die Kühlungszone im $v = 1,1$ Gas. Im Fall (1,2,−0,8) kollabiert entsprechend die Kühlungszone im Gas mit $v = 1,2$. Hier ist außerdem im $v = -0,8$ Gas die Oszillation weggedämpft worden und der adiabatische Schock vom vollständig abgekühlten Material durch eine *stationäre* Kühlungszone der Länge 1 getrennt, entsprechend dem gewählten Wert der Kühlungskonstante A.
(Im Fall (1,2,−0,8) ist neben dem adiabatischen Schock auch das Ende der Kühlungszone deutlich zu erkennen; dahinter ist das Material vollständig abgekühlt und adiabatisch. Dieser kalte adiabatische Kern wird im Lauf der Zeit immer breiter, denn nur im Falle eines unendlich starken Schocks geben die isothermen Sprungbedingungen einen unendlichen Dichtesprung, und nur dann kann sich das ständig neu hinzufließende Material in einem infinitesimalen Grenzbereich an der Wand anlagern.)

Advektive Diffusion vs. Kollaps

Eine mögliche Erklärung der „verschwundenen" Kühlungszonen aufgrund der numerischen Advektionsfehler wurde von S. Owocki (1992, priv. Mitteilung) gegeben.
Es wird hierzu ein Advektionstest mit einem Rechteckspuls heißen Materials betrachtet. Der Druck soll überall, auch über die Unstetigkeit hinweg, konstant sein, so daß sich der Puls dynamisch nicht entwickelt. Die Temperatur im Puls soll so hoch sein, daß Strahlungskühlung (mit einem $\alpha = -1/2$ Exponenten) sehr ineffektiv ist, der Puls also über lange Zeiten hinweg nahezu unverändert bleibt. Wird der Puls nun über das Gitter advektiert, so verursachen Interpolationsfehler des Advektionsschemas ein Verschmieren seiner Ränder. Die dabei auftretenden mittleren Temperaturen kühlen viel besser als das heiße Pulsinnere: der Rand „frißt" sich in den Puls hinein. Die Strahlungskühlung bedingt, daß die Ränder dabei scharf bleiben – was jedoch wieder erhöhte advektive Diffusionsfehler zur Folge hat – und damit verstärkte Strahlungskühlung. Insgesamt wird der Puls durch die gemeinsame Wirkung von advektiver Diffusion und Strahlungskühlung in einem Bruchteil der Zeit vernichtet, die jeder der beiden Effekte für

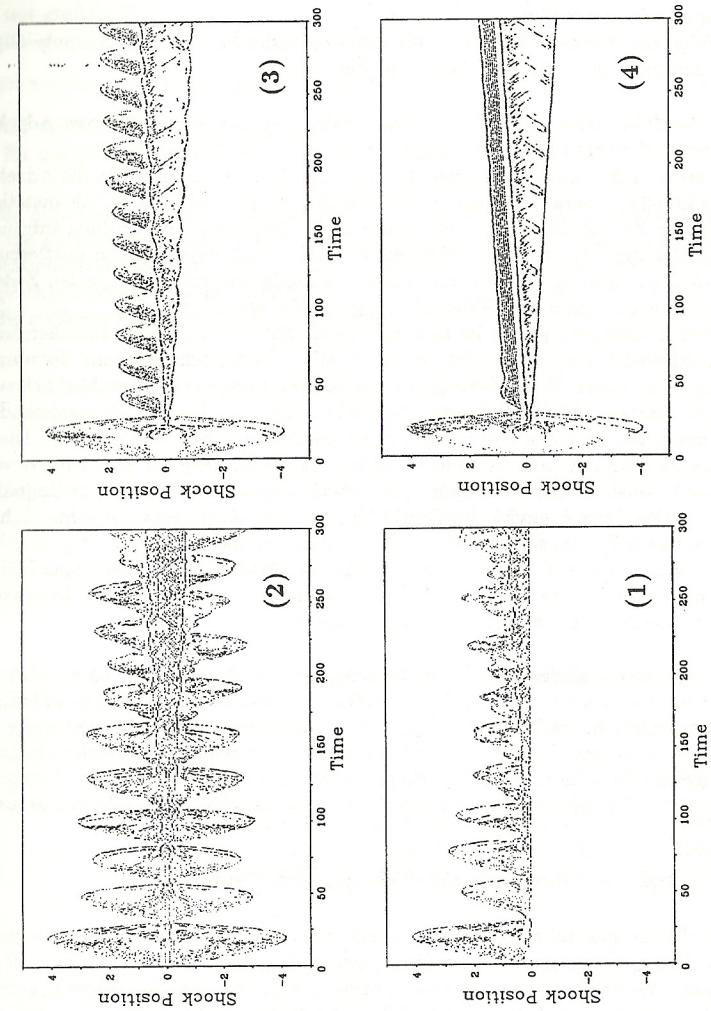


Abb. 9.5. Abhängigkeit des Kollapses der Kühlungszone von der Advektionsgeschwindigkeit des radiativen Schocks über das numerische Gitter. Geschwindigkeiten der beiden aufeinandertreffenden Gasstrahlen: **(1)**: (Wand /−1), **(2)**: (+1/−1), **(3)**: (+1,1/−0,9), **(4)**: (+1,2/−0,8).

sich alleine dazu benötigt.
Die Folge für *radiative Schocks* sollte entsprechend sein, daß die Kühlungslänge nur einen Bruchteil ihrer tatsächlichen Ausdehnung hat.

Wir sehen aber einen wesentlichen Unterschied zwischen dem diffusiven Advektionsproblem und einem radiativen Schock:
Dazu sei zunächst wieder das obige *Advektions*problem betrachtet. Da die Advektionsgeschwindigkeit überall konstant ist (insbesondere ist sie stetig an der Pulsunstetigkeit), liegt immer *dasselbe* Material an der Unstetigkeit. Die verstärkte Kühlung aufgrund der Diffusivität des numerischen Verfahrens und den damit entstehenden mittleren Temperaturen am Sprung ist dann ein *additiver* Prozeß, und mit jedem neuen Zeitschritt wird der durch verstärkte Kühlung bedingte Fehler anwachsen.
An einer *Schock*front jedoch ist es immer *neues* Material welches *hindurch*strömt und dabei aufgeheizt wird. Wenn Material in der Mitte des Schocks aufgrund der numerisch bedingten mittleren Temperatur dort besser kühlen kann, als es augenblicklich zu $T_{\rm post}$ geheiztes Material könnte, so wird dieser Fehler für jedes den Schock passierende Teilchen *neu* gemacht, sollte daher gegen einen bestimmten Wert *konvergieren*. Dies wird durch eine entsprechende Rechnung bestätigt (siehe Anhang 3): Selbst für $\alpha = -1/2$ findet erhebliche künstliche Kühlung (künstlich wegen der numerisch bedingten mittleren Temperaturen) *im* viskosen Schockübergang nur statt, wenn die *echte*, d. h. $T_{\rm post}$ entsprechende Kühlungslänge kleiner als die viskose Schockdicke ist.
Dies ist dann aber *keine* Einschränkung an die numerische Auflösbarkeit einer Kühlungszone, die *a priori* breiter sein muß als der Schockübergang – der die kürzeste auftretende Längenskala hat – um aufgelöst werden zu können.

Diese Argumente stellen noch keine Widerlegung der Idee der diffusen Advektion dar, und es muß in Zukunft genauer der Einfluß der Advektion auf das „Verschwinden" der Kühlungszone eines radiativen *Schocks* – ein Einfluß, der eindeutig besteht, siehe Abb. 5 – untersucht werden. (Leider sind Tests für advektierte Schocks erheblich rechenzeitaufwendiger als Tests für ruhende Schocks, denn die Gitterauflösung muß mindestens gleich sein (tatsächlich: besser), doch ist der räumlich abzudeckende Bereich viel größer.)

9.3 Instabile Windmodelle mit Heizung und Kühlung

Es werden im folgenden zwei Windmodelle diskutiert, das erste mit 3000 logarithmischen Gitterpunkten bis 5 Sternradien, photosphärischen Schallwellen mit 5000 s Periode und 1 % Amplitude, bis zu einer Endzeit $t = 24$ Stunden; das zweite ebenfalls mit 3000 logarithmischen Gitterpunkten, jedoch bis 10 Sternradien, sowie photosphärischen Schallwellen mit 10 000 s Periode und 1 % Amplitude, bis zur Endzeit $t = 48$ Stunden.
Für jedes dieser beiden Modelle wurden 5 Rechnungen durchgeführt:

1. für einen isothermen Wind, d. h. ohne Energiegleichung
2. mit Energiegleichung, ohne $T_{\rm swi}$
3. mit kleinem $T_{\rm swi}$

4. mit großem $T_{\rm swi}$
5. für einen adiabatischen Wind, d. h. ohne Strahlungskühlung

Hierbei werden in 3 und 4 folgende $T_{\rm swi}$ gewählt:

- für das Modell bis $5\,R_*$: $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$ und 30
- für das Modell bis $10\,R_*$: $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 10$ und 20

Um die auftretenden Kühlungslängen abzuschätzen, wird Gleichung (13) aus Anhang 2 für die *gesamte, stationäre* Kühlungslänge bei $\alpha = -1/2$ verwendet. (Die Annahme der Stationarität gilt nicht mehr, sobald Kühlungslänge und dynamische Längenskala von gleicher Größenordnung werden.)
Für die stellaren Parameter von ζ Pup ergibt sich

$$\frac{L^{\rm tot}_{\rm cool}}{R_*} = 1{,}46 \cdot 10^{-7} \left(\frac{r}{R_*} - 1\right) \frac{r}{R_*} \frac{(T_{\rm post}/T_{\rm eff})^2}{\rho_{\rm pre}/\rho_{\rm CAK}}. \qquad (9.21)$$

Tabelle 3 zeigt die Kühlungslängen in Einheiten des Sternradius für typische Schocktemperaturen und Winddichten. In Klammern ist die Zahl der numerischen Gitterpunkte pro Kühlungslänge angegeben; dies für das $10\,R_*$ Modell mit logarithmischem Gitter, $\Delta r/R_* = \ln(10)/3000 = 7{,}7 \cdot 10^{-4}$ am „typischen" Ort $r = 6\,R_*$.

Tabelle 3: Kühlungslänge in Einheiten des Sternradius; *in Klammern*: Zahl der Gitterpunkte pro Kühlungslänge.

$\frac{\rho_{\rm pre}}{\rho_{\rm CAK}} \downarrow$	$\frac{T_{\rm post}}{T_{\rm eff}} \rightarrow$	50	100	200	500
1		0,011 (11)	0,044 (57)	0,17 (220)	1,1 (1400)
1/10		0,11 (110)	0,44 (570)	1,7 (2200)	11 (14000)
1/100		1,1 (1100)	4,4 (5700)	17 (...)	110 (...)

Nach dieser Tabelle sollten *alle* Kühlungszonen hinter heißen Schocks numerisch aufgelöst werden können.

Abbildungen 6a bis 6d zeigen Momentaufnahmen zum Zeitpunkt $t = 24$ Stunden für Dichte, Geschwindigkeit, Temperatur, Druck und Strahlungsbeschleunigung des $5\,R_*$ Modells. Abbildungen 7a bis 7d zeigen die Entwicklung der Dichte und Temperatur im Wind über die anschließenden 6 Stunden von $t = 24$ bis 30 Stunden.

Da der *isotherme* Wind und der Wind *mit Energiegleichung*, dieser jedoch ohne Verwendung einer Temperatur $T_{\rm swi}$ in der Strahlungskühlung, praktisch identische Resultate geben, wird auf die Wiedergabe des isothermen Windes verzichtet.

Momentaufnahmen des $5\,R_*$ *Modells*

In Abbildung 6a für das Modell mit Strahlungskühlung, ohne $T_{\rm swi}$, sind alle Kühlungszonen der radiativen Schocks völlig verschwunden, der Wind ist numerisch isotherm.

Abbildung 6b und 6c mit $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$ und 30 sind untereinander und mit den isothermen Modellen (als solche seien im folgenden das *echte* isotherme Modell *und* das Modell mit Energiegleichung, aber ohne $T_{\rm swi}$, bezeichnet) bis $r \approx 2\,R_*$ praktisch identisch im Dichte- und Geschwindigkeitsverlauf. Im Temperaturverlauf sind jetzt gut aufgelöste Kühlungszonen der *reverse* Schocks zu erkennen; die kurzen Kühlungszonen der schwachen *forward* Schocks werden nicht aufgelöst. Der Schocksprung (deutlich zu erkennen in $v(r)$ bzw. am Dichtesprung 4) und das Dichtemaximum (also der dichte Schalenkern) sind gerade um die Ausdehnung dieser heißen/warmen Bereiche voneinander getrennt. Typische Temperaturen an den *reverse* Schocks liegen zwischen 10^6 und 10^7 K, und liegen damit (deutlich) über den Temperaturen $T_{\rm swi} = 6,3 \cdot 10^5$ bzw. $1,26 \cdot 10^6$ K.

Ab etwas weniger als 2 Sternradien sind die Kühlungszonen ausgedehnter. Doch trotz der entsprechenden Versetzung von Schocksprüngen und Dichtemaxima ist immer noch eine 1-1 Korrespondenz mit den isothermen Modellen vorhanden; dies ist realistisch, da die Breite der Kühlungszonen $\lesssim 0,2\,R_*$ kleiner ist als die dynamische Längenskala $\approx 1\,R_*$.

Die Kühlungslängen sind deutlich kürzer als gemäß (21), wonach bei $T_{\rm post}/T_{\rm eff} = 200$ und $\rho/\rho_{\rm CAK} = 0,01 \ldots 0,1$ (wie typischerweise in Abbildung 6b und 6c am *reverse* Schock der Fall) am Ort $r = 3\,R_*$ Kühlungszonen von $0,4$ bis $4\,R_*$ Breite zu erwarten wären. Doch werden die Schalen *nahe am Stern* gebildet (dies wird in Abbildung 7 noch deutlicher), wo aufgrund der größeren Dichten die Kühlungslänge kleiner ist. Danach werden die Schalen im wesentlichen durch den Wind *advektiert*, und nur noch wenig Material gelangt in sie hinein. Mit einem Entstehungsort der Schalen bei etwa $1,5\,R_*$ (vgl. Abb. 7) verkürzen sich die Kühlungslängen (21) um einen Faktor 8 und liegen zwischen 0,04 und $0,4\,R_*$. Insgesamt stimmen somit die numerischen Kühlungslängen im Rahmen dieser Abschätzungen mit den analytischen, stationären überein.

Die *maximalen* Schocktemperaturen in Abbildung 6b, 6c sind $\approx 10^7$ K, also einen Faktor 2 bis 3 größer als die aus Röntgenbeobachtungen geschlossenen Temperaturen von typischerweise $3 \ldots 5 \cdot 10^6$ K. Dies ist, bedenkt man alle Näherungen der Modelle, nicht zu viel. (Wir wollen hier nicht über einen möglichen Zusammenhang mit der beobachteten harten Röntgenkomponente im 10^7 K Bereich spekulieren). Weiterhin ist in Hillier et al. (1993) gezeigt, daß die beobachtete Röntgenstrahlung von sehr viel größeren Radien (bis zu $100\,R_*$) stammt als hier betrachtet (vgl. Abschnitt 7.5). Weit außen können die Schocks aber aufgrund des flacheren Geschwindigkeitsgradienten schwächer sein und damit die Temperaturen geringer.

Es scheint, daß die Kühlungszonen zu abrupt enden: Nachdem die Temperatur über die

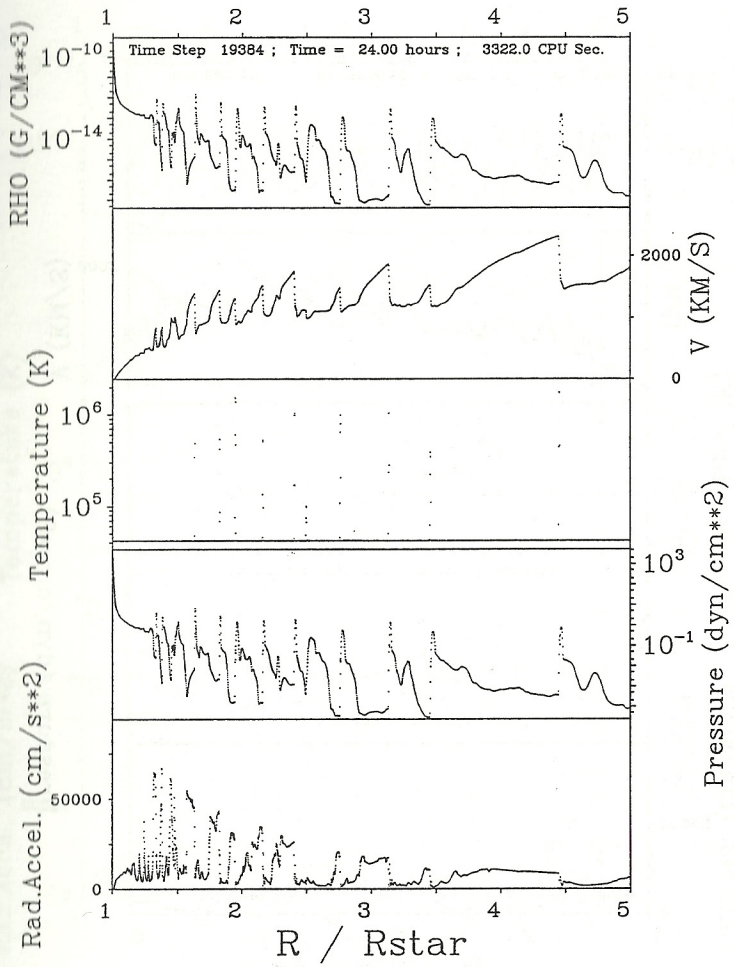


Abb. 9.6a. Instabiler Wind mit Schockheizung und Strahlungs- und adiabatischer Kühlung. Die Strahlungskühlung *ohne* Abänderung der Kühlungsfunktion mittels $T_{\rm swi}$.

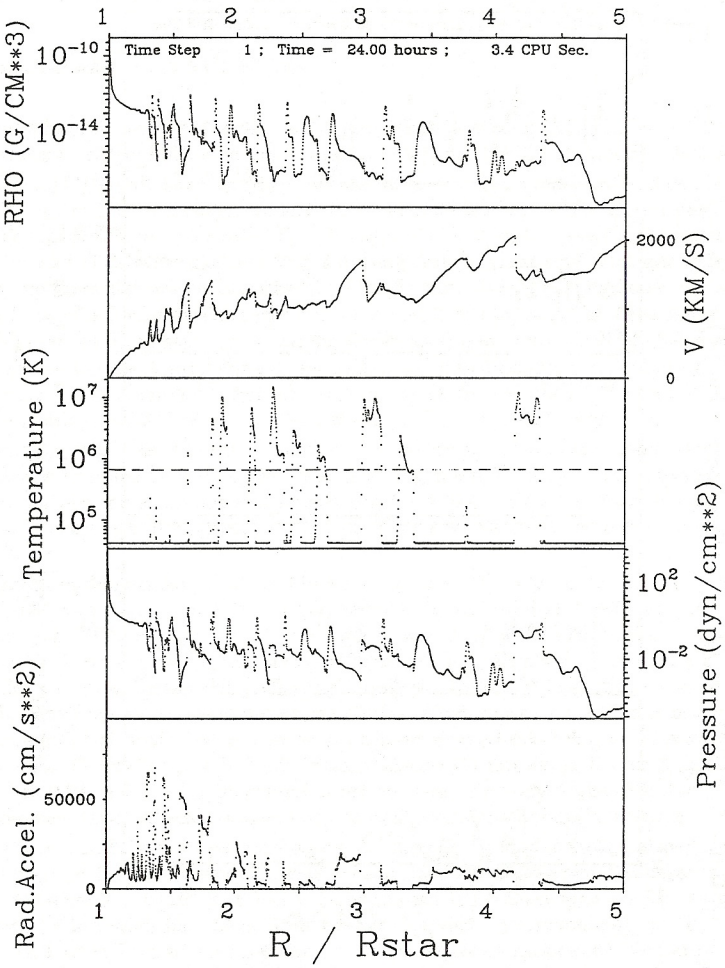


Abb. 9.6b. Wie Abb. 6a, jedoch $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$. Gestrichelte horizontale Linie im Temperaturplot: $T_{\rm swi}$.

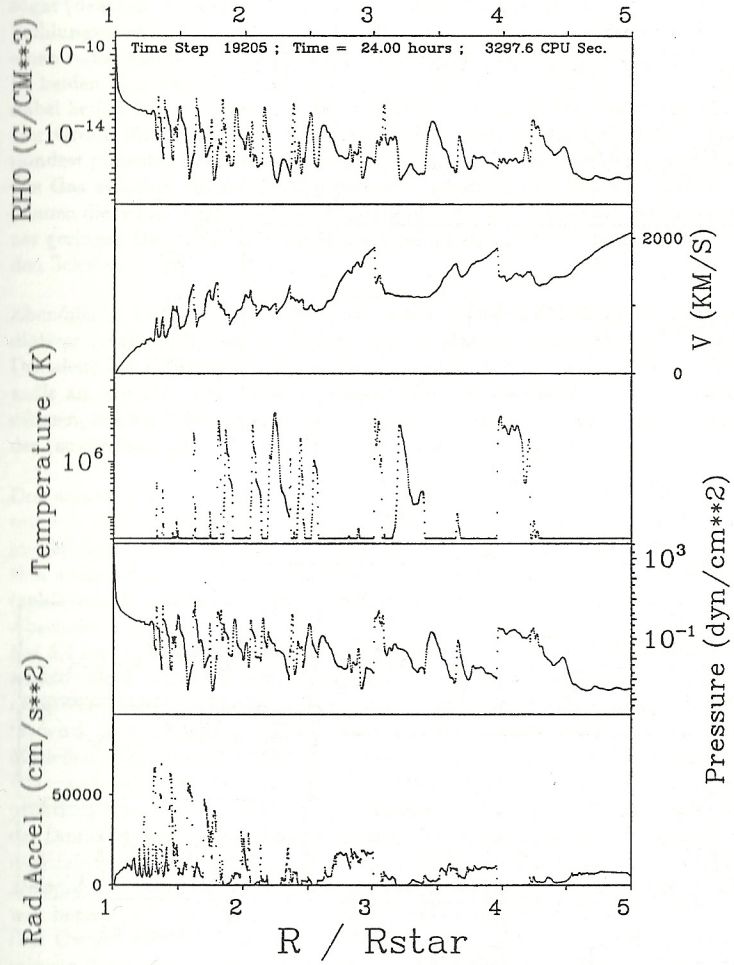


Abb. 9.6c. Wie Abb. 6a, jedoch $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 30$.

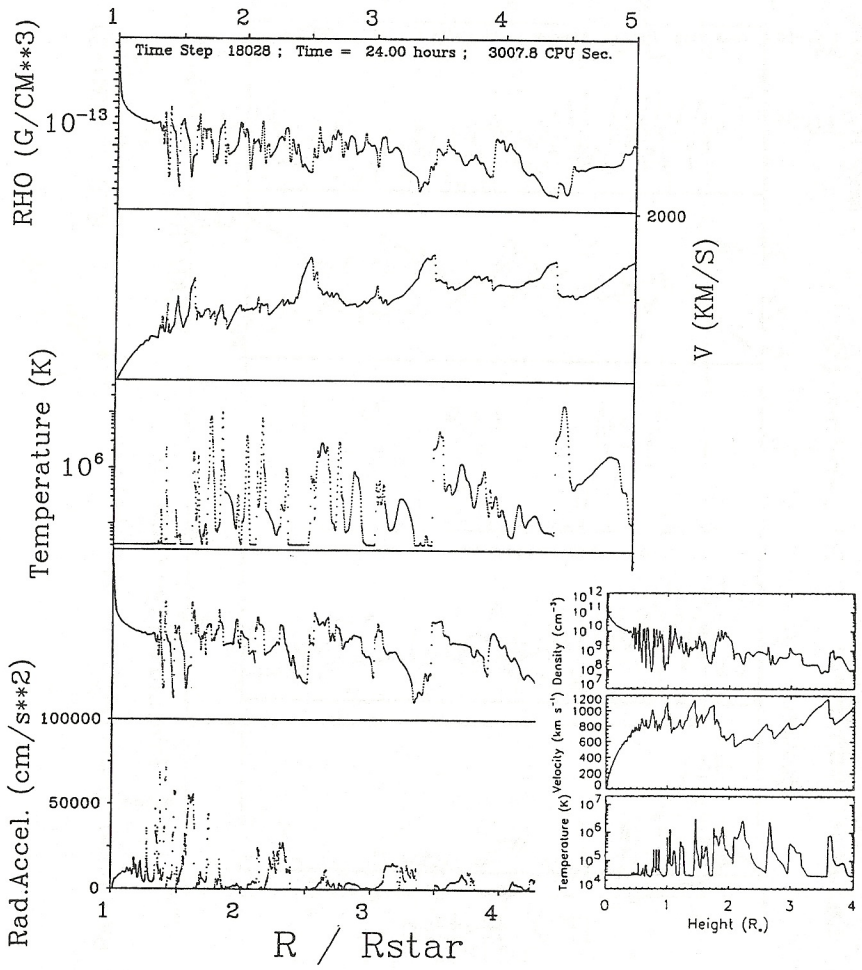


Abb. 9.6d. Instabiler adiabatischer Wind, also *ohne* Strahlungskühlung. *Rechts*: Adiabatischer Wind für τ Sco, aus Cooper & Owocki (1992).

gesamte Zone hinweg nahezu konstant ist, fällt sie innerhalb weniger Punkte auf $T_{\rm eff}$ ab. Doch ist dies kein numerischer Defekt, sondern die hier auftretenden Gradienten sind sogar (deutlich) *kleiner* als die am kühlen Ende der analytischen, stationären $\alpha = -1/2$ Kühlungszone in Temperatur und Dichte auftretenden! Dies ist in Abbildung 9 für einen radiativen Schock im $10\,R_*$ Modell gezeigt.
In beiden $T_{\rm swi}$ Modellen gibt es bei 3,3 Sternradien einen Bereich sehr dünnen und dabei heißen Materials. Es gibt *keine* Schocks, die dieses Material aufgeheizt haben.
Der Grund für die Präsenz dieses heißen Materials ist noch nicht klar. Folgende zumindest plausible Erklärung bietet sich an: Beim Zusammenlaufen zweier Schalen wird das Gas zwischen diesen kompressionsgeheizt, und durch den ansteigenden Gasdruck können die Schalen ggf. wieder auseinander laufen. Das heiße Gas, welches aufgrund seiner geringen Dichte nur sehr ineffektiv strahlungskühlt, füllt dann den Raum zwischen den Schalen.

Ebenfalls in beiden $T_{\rm swi}$ Modellen ist zwischen 4,15 und 4,35 R_* ein ausgeprägter radiativer (*reverse*) Schock zu finden. An die Materieverdichtung (über mehr als zwei Dekaden) bei Kühlung auf $T_{\rm eff}$ schließt (sternauswärts) eine *isotherme Verdünnungswelle* an, die zwischen dem dichten, *ab*gekühlten Material und dem ungeschockten, dünnen, kühlen Windmaterial weiter außen vermittelt. Es gibt *keinen forward* Schock, der (zumindest) als Geschwindigkeitssprung zu erkennen wäre.

Der *adiabatische* Wind in Abbildung 6d zeigt bis 2 oder 2,5 Sternradien Ähnlichkeit mit den vorigen 4 Modellen, doch sind die Dichtekontraste gering, d. h. es gibt keine ausgeprägte Schalenstruktur. Die dennoch relativ gute Kühlung kommt durch Expansion aufgrund großer Geschwindigkeitsgradienten hinter den *reverse* Schocks zustande (sphärische Expansion bewirkt merkliche Kühlung nur über mehrere R_* hinweg, siehe Abschnitt 8.1).
Bei 3,4 und $4,4\,R_*$ gibt es starke *reverse* Schocks im adiabatischen Wind, wobei interessanterweise hinter beiden Schocks in einem Abstand von jeweils $0,1\,R_*$ ein starker negativer Geschwindigkeitsgradient auftritt, durch den Material abgekühlt und verdichtet wird. Obwohl insgesamt der Dichteverlauf viel homogener ist als in allen bisherigen Modellen, zeigt auch der adiabatische Wind eine *Tendenz* zur Materieverdichtung.
Überraschend ist weiterhin, daß der *Geschwindigkeits*verlauf im adiabatischen Wind praktisch identisch ist mit dem der bisherigen Modelle. Die Erklärung hierfür liegt in der Dominanz der *reverse* Schocks in den OCR-Winden: Owocki et al. (1988) finden, daß nichtlineare Sättigung der Wachstumsrate der Instabilität erst nach Anwachsen der *Geschwindigkeits*störungen über mehr als 2 Dekaden einsetzt, nämlich bei $\delta v \approx 500$ km/s, was bereits nahe der Amplitude der voll entwickelten nichtlinearen Windstruktur ist (bei Owocki et al. (1988) $\delta v_{\rm max} \approx 1000$ km/s). Als Grund hierfür geben sie die Dominanz der *reverse* Schocks im Wind an, in die dünnes, sternnahes Material hineinbeschleunigt wird. Im *dünnen* Gas wird wenig Strahlung absorbiert, so daß diese Materie und die Innenseite der Schale die volle Sterneinstrahlung erfahren: Nichtlineare Sättigungseffekte aufgrund von *Abschattung* spielen fast keine Rolle, das instabile Wachstum und damit die Ausbildung der nichtlinearen Windstruktur sind vom *Dichteverlauf* im Wind nahezu unabhängig.

In Abbildung 6d ist rechts der adiabatische Wind aus Cooper & Owocki (1992) wiedergegeben. Dieser wurde für den *dünnen* Wind von τ Scorpii (O9-Hauptreihenstern) berechnet, mit photosphärischen Schallwellen der Amplitude $A = 10\%$ und Periode $T = 1000$ s. Die Windstruktur ist (soweit bei den recht verschiedenen Parametern überhaupt vergleichbar) ähnlich zur hier berechneten. Die Maximaltemperaturen bei Cooper & Owocki sind jedoch $2 \ldots 3 \cdot 10^6$ K, in unserer Rechnung 10^7 K.

Zeitliche Entwicklung des $5\,R_*$ Modells über 6 Stunden

(Die Abbildungen 7 und 8 sind Schwarzweißkopien von farbigen Bildschirm-Hardcopys und haben daher gewisse technische Mängel.)

In Abbildung 7a bis 7d wird deutlich, wie ausgeprägt und periodisch die Windstruktur ist. Zu erkennen sind die verschiedenen Schalen und deren Kollisionen sowie die harmonischen Obermoden (siehe Kapitel 6) bei der Entstehung der Schalen. Alle Modelle, ausgenommen des adiabatischen, zeigen nahezu identische Dichtestruktur. Beim adiabatischen Wind ist der Dichtekontrast bedeutend kleiner, und es kommt zu keinen ausgeprägten Schalen.

Das Temperaturbild für das Modell mit Energiegleichung, aber ohne $T_{\rm swi}$, zeigt fast überhaupt keine heißen Bereiche, alle Kühlungszonen sind kollabiert. Die Ergebnisse für $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$ und 30 sind sehr ähnlich: Die Schalen entstehen bei 1,2 Sternradien mit Schocktemperaturen im 10^5 K Bereich. Recht abrupt bei 1,5 Sternradien bilden sich breitere Bereiche heißen Materials im 10^6 K Bereich aus.

Im $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$ Bild zeigt der *reverse* Schock der Schale, die sich zum Zeitpunkt $t = 24$ h bei $r \lesssim 2\,R_*$, zum Zeitpunkt $t = 30$ h bei $r \lesssim 4\,R_*$ befindet, 7 (!) „Zyklen" von Temperaturoszillationen im Bereich von 10^5 bis 10^7 K (derart niedrige Temperaturen treten nur an diesem Schock auf). Entsprechende Oszillationen sind an fast jedem Schock zu beobachten – sie sind aber (fast) nicht zu finden im Fall $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 30$. Es wäre verlockend, diese Schwingungen mit der oszillatorischen thermischen Instabilität zu identifizieren. Deren Periode liegt für die Kühlungslängen in Abb. 7 im Bereich einiger Stunden, und würde man weiterhin annehmen, daß die *Obermode* – mit einer um einen Faktor 3 verringerten Periode – beobachtet wird, so entspräche dies gut den beobachteten Perioden. Betrachtet man aber den Dichteverlauf, so erkennt man als wahren Grund der Temperaturoszillation *Schalen-Schalen*-Kollisionen. Die noch verbleibende Möglichkeit einer Kopplung der Frequenzen der thermischen Instabilität und der Schalenkollisionen ist auszuschließen, denn die Kollisionen im *isothermen* Wind sind identisch mit denjenigen der beiden $T_{\rm swi}$ Rechnungen (zumindest mit $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$).

Es ist schwierig, aus Tabelle 1 im vorigen Abschnitt 9.2 einen *erlaubten Minimal*wert für $T_{\rm post}/T_{\rm swi}$ anzugeben, bei dem der korrekte $\alpha = -1/2$ Exponent noch die Kühlungszone dominiert, d. h. auch die instabile Oszillation zu beobachten ist. Sehr grob findet man aus Tabelle 1, daß bei

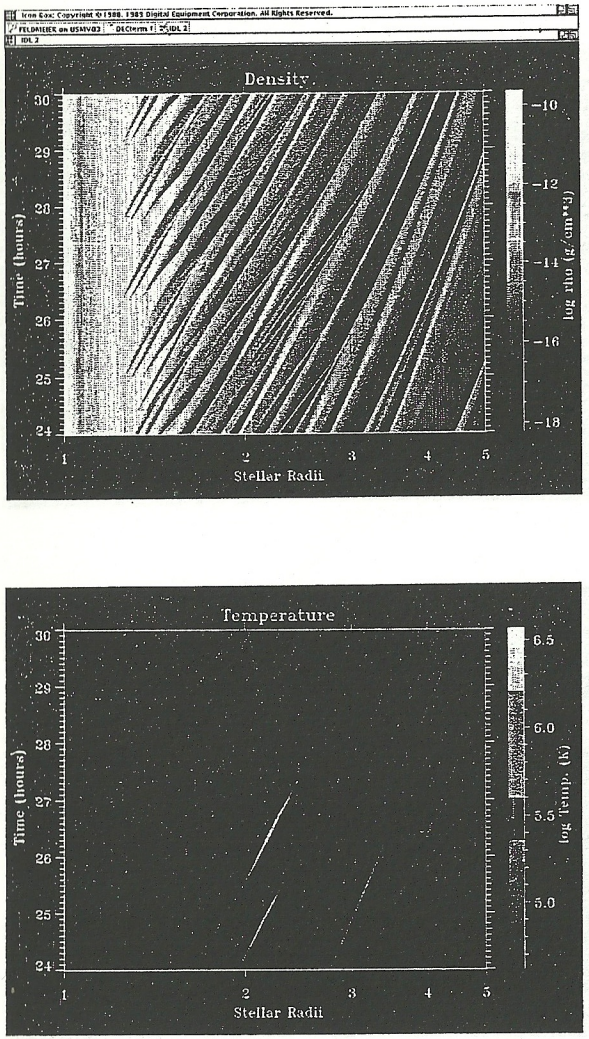
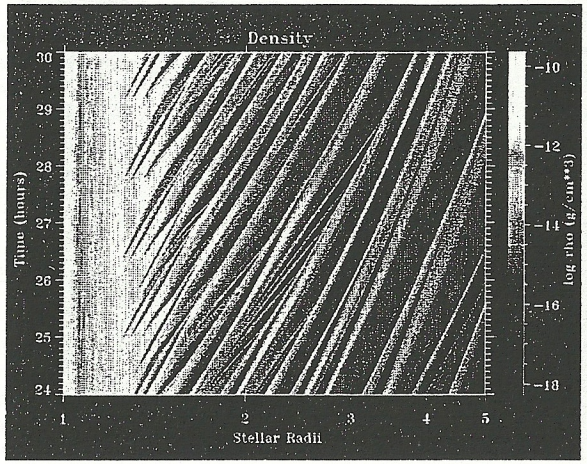


Abb. 9.7a. Zeitliche Entwicklung über 6 Stunden des instabilen Windes mit Energietransfer, jedoch ohne $T_{\rm swi}$ in der Strahlungskühlung. *Oben*: Dichte, *unten*: Temperatur.



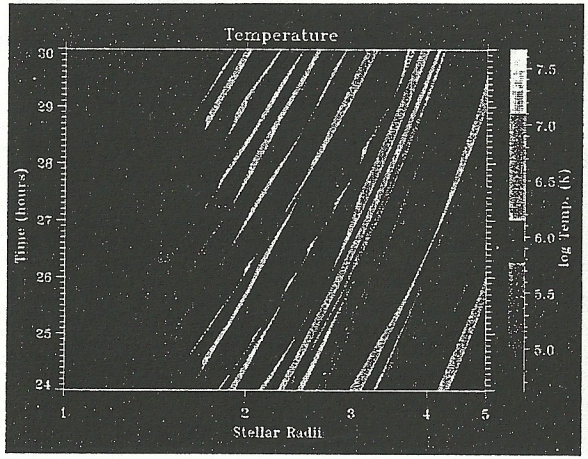
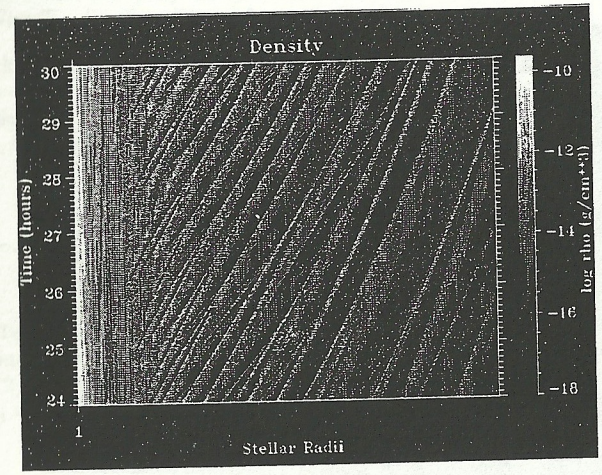


Abb. 9.7b. Wie in Abb. 7a, jedoch mit $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 15$ in der Strahlungskühlung.



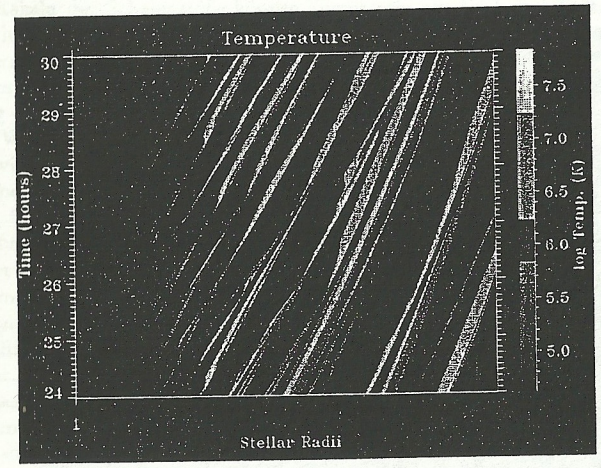


Abb. 9.7c. Wie in Abb. 7a, jedoch mit $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 30$.

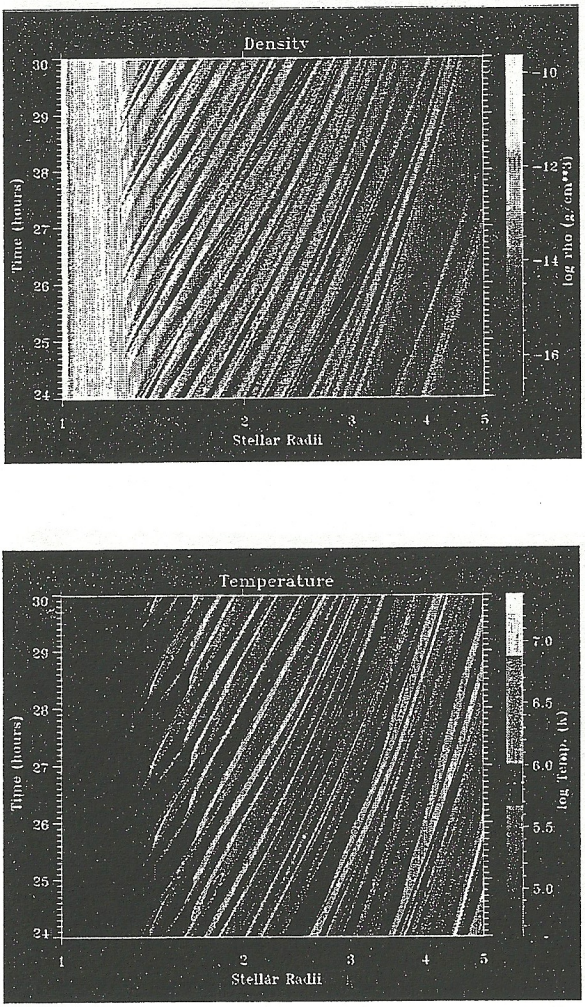


Abb. 9.7d. Adiabatischer instabiler Wind, d. h. ohne Strahlungskühlung.

i) *kleinem* $T_{\rm swi}$ für $T_{\rm post}/T_{\rm swi} \gtrsim \theta = 2$,
ii) *großem* $T_{\rm swi}$ für $T_{\rm post}/T_{\rm swi} \gtrsim \theta = 3$

der korrekte $\alpha = -1/2$ Exponent dominiert. Für einen typischen Windschock mit $T_{\rm post}/T_{\rm eff} = 100$ ist somit (wir betrachten hier bereits den erst im folgenden genauer zu diskutierenden Fall $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 10$ der $10\,R_*$ Modelle)
i) für $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 10$:

$$\frac{T_{\rm post}}{T_{\rm swi}} = 10 \gg 2 = \theta,$$

ii) für $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 30$:

$$\frac{T_{\rm post}}{T_{\rm swi}} = 3 \equiv 3 = \theta.$$

Falls die Testrechnungen aus dem vorigen Abschnitt also auf den instabilen Wind übertragbar sind, dann sollte demnach für $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 10$ die Kühlungszone *eindeutig* durch $\alpha = -1/2$ dominiert sein (dies um so mehr, als im Wind höhere Temperaturen als $T_{\rm swi}/T_{\rm post} = 100$ auftreten), für $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 30$ kann schon das künstliche $\alpha = 2$ Einfluß haben.

Warum dennoch keine Oszillationen der Kühlungsinstabilität auftreten, ist momentan nicht eindeutig klar. Wir wollen einige *mögliche* Gründe zusammenstellen.
1. Die Zeitskala der Schalenstöße könnte kürzer sein als die Instabilitätsperiode, wodurch die instabile Oszillation unterdrückt würde.
2. Die thermische Instabilität könnte, nach anfänglichen starken Schwingungen (Möglichkeit des Kollapses), tatsächlich aus *physikalischen* Gründen gedämpft werden: Die Herleitung der Instabilität geschieht in planarer Geometrie für ein homogenes *preshock* Gas. Der Wind dagegen ist sphärisch symmetrisch und hat eine Dichtestratifikation. Auch Gravitation und noch mehr die Linienstrahlungskraft könnten eine Rolle spielen.
3. Aufgrund der Advektion der Schalen über das Gitter kann es zu einer numerisch bedingten Dämpfung der Oszillation kommen, wie schon in den Testrechnungen des vorigen Abschnitts 9.2 beobachtet. (Bereits in Abschnitt 3.6 wurde eine *Nicht*galileiinvarianz der durch künstliche Viskosität bedingten numerischen Fehler gefunden.)
4. Es ist möglich, daß trotz der abgeänderten Kühlungsfunktion die kurzen, inneren Strahlungskühlungszonen nicht aufgelöst werden. Hierfür spricht, daß zwischen zwei Schalenkollisionen Temperaturen von 10^5 K an den Schocks auftreten – was deutlich zu klein ist, jedoch dem „kollabierten" Modell $T_{\rm swi} = 0$ entspricht.
5. In der sehr gut aufgelösten Schale (da mit einem Lagrangeschema berechnet) im τ Sco Windmodell von MacFarlane & Cassinelli (1989) tritt ebenfalls *keine* Oszillation auf – was die Autoren jedoch nicht diskutieren.

Im *adiabatischen* Wind wird bereits zwischen 1,2 bis 1,5 Sternradien Material auf mehrere 10^6 K aufgeheizt. Dieser ganze Wind ist dominiert durch Material im 10^5 K Bereich, welches in den $T_{\rm swi}$ Modellen vollständig weggekühlt wurde. Das Auftreten sehr *heißen* Materials zwischen 10^6 und 10^7 K ist in den $T_{\rm swi}$ Modellen und dem adiabatischen

Wind recht ähnlich! Dies entspricht der Feststellung bei der obigen Diskussion der Momentaufnahmen (Abb. 6), daß der *Geschwindigkeits*verlauf beim adiabatischen Wind und allen anderen Modellen vergleichbar ist.
Im adiabatischen Wind kommt es zu fast keinen Schalenkollisionen mehr. Der Grund ist, daß aufgrund der kleinen Dichtekontraste Abschattungseffekte noch keine Rolle spielen.

Die Modelle bis $10\,R_*$

Hier sollen nur die Unterschiede zu den $5\,R_*$ Modellen kurz zusammengefaßt werden. Wir verzichten auf die Wiedergabe der Momentaufnahmen und zeigen nur die zeitliche Entwicklung von 48 bis 54 Stunden.
Die Dichtestruktur der drei Modelle $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 0, 10$ und 20 in Abb. 8 a bis c ist vergleichbar. (Da der *isotherme* Wind mit dem $T_{\rm swi} = 0$ Wind praktisch identisch ist, wurde auf die Wiedergabe verzichtet.)
Deutlich zu erkennen ist wieder die Vielzahl der Schalenkollisionen bis 3 Sternradien. Bis zu 10 kleine Schalen laufen von hinten in eine große Schale hinein. Jenseits von 3 Sternradien gibt es nur noch wenige Schalen, und diese werden ohne weitere Kollisionen hinausadvektiert.
In beiden $T_{\rm swi}$ Modellen treten, wie beim $5\,R_*$ Modell, Bereiche heißen, dünnen Materials auf, zum einen zwischen den beiden Schalen, die sich zur Zeit $t = 48$ Stunden bei 4,4 und $5,2\,R_*$ befinden, zum anderen zwischen zwei Schalen, die sich bei $t = 54$ Stunden in der Nähe von $4\,R_*$ befinden.
Der *adiabatische* Wind zeigt sehr viel kleinere Dichtekontraste. Indem in Abb. 8a bis 8d überall *dieselbe* Dichteskala verwendet wurde, ist jenseits von 4 bis $5\,R_*$ im adiabatischen Wind keinerlei Schalenstruktur mehr zu erkennen.

Abbildung 9 zeigt oben den Temperaturverlauf im $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 10$ Modell (zum Zeitpunkt $t = 44$ Stunden). Der mit „Shock 1" markierte *reverse* Schock mit anschließender Kühlungszone ist darunter in normierten Einheiten gegen die analytische Lösung (3) aus Anhang 1 für die stationäre $\alpha = -1/2$ Kühlungszone aufgetragen; die Kreuze sind hierbei die Werte auf den numerischen Gitterpunkten. (Als Ende der numerischen Kühlungszone wurde hier der Ort maximaler Dichte definiert.) Man erkennt, daß trotz des abrupten Abfalls in der Temperatur im obersten Bild die numerische Kühlungszone an ihrem Ende (viel) kleinere Gradienten hat als die analytische; in diesem direkten Vergleich wirkt die numerische Kühlungszone durch das Gitter hinreichend gut aufgelöst.

Abschließende Bemerkungen zu instabilen Windmodellen mit Strahlungskühlung

Im Rahmen der von uns verwendeten Methode, die Kühlungsfunktion bei niedrigen und mittleren Temperaturen zu modifizieren, ist es erstmals möglich, instabile Winde zeitabhängig mit Strahlungskühlung zu berechnen. Wie auch aus der *Abschätzung*

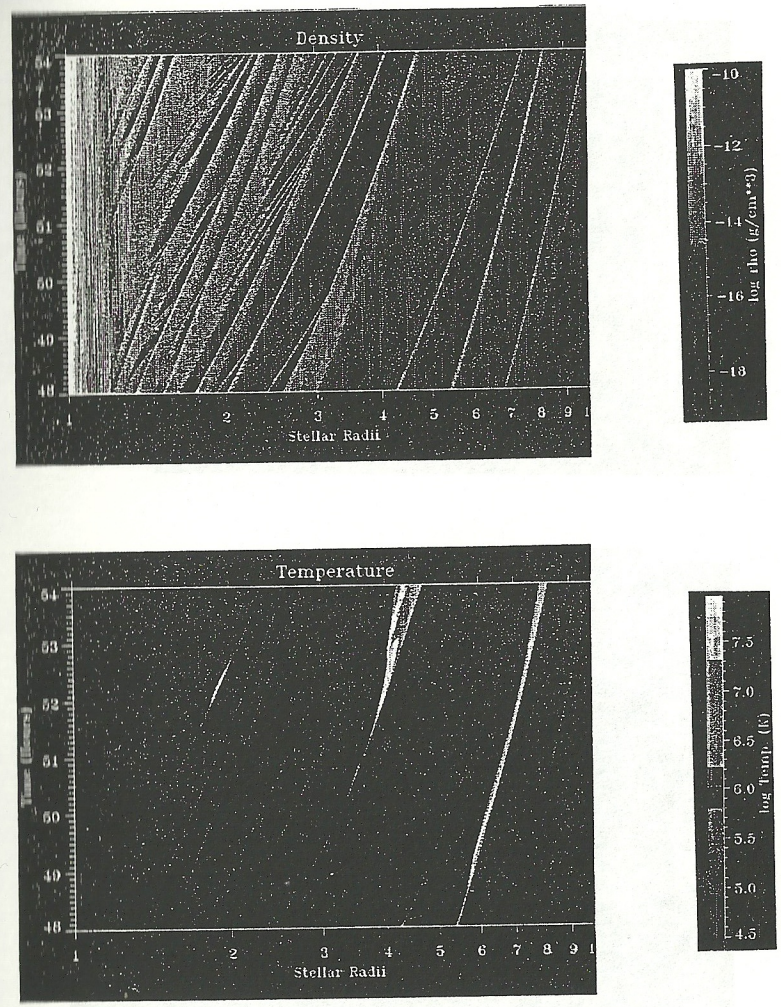
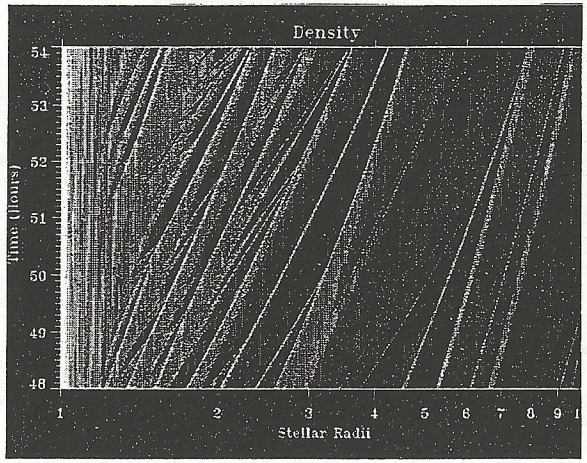


Abb. 9.8a. Instabiler Wind *mit Energietransfer*, jedoch ohne $T_{\rm swi}$ in der Strahlungskühlung. (*Rechts*: Die Codierung der Dichte- und Temperaturgraustufen gilt für diese und für die folgenden Abb. 8b bis 8d.)



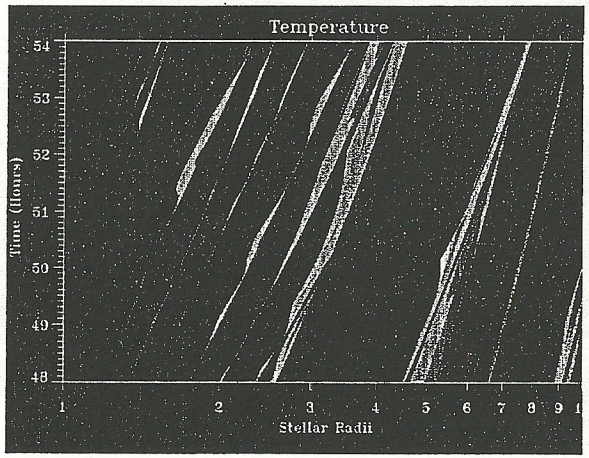
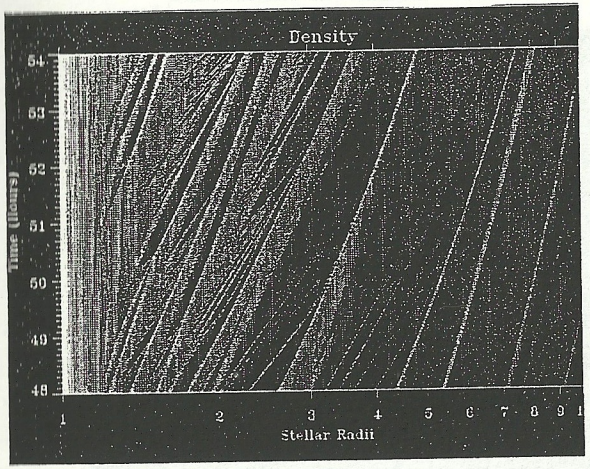


Abb. 9.8b. Wie Abb. 8a, jetzt mit $T_{\mathrm{swi}}/T_{\mathrm{eff}} = 10$ in der Strahlungskühlung.



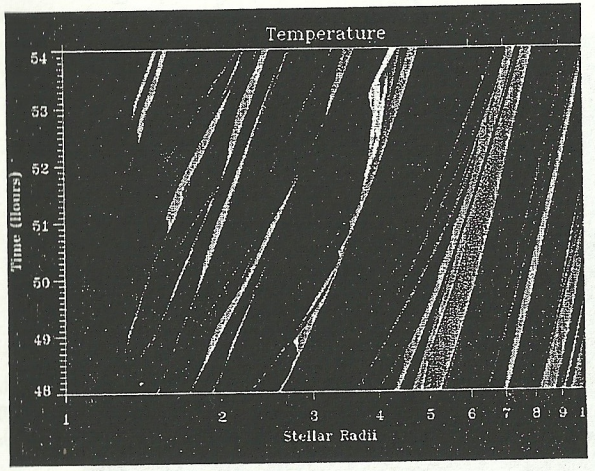
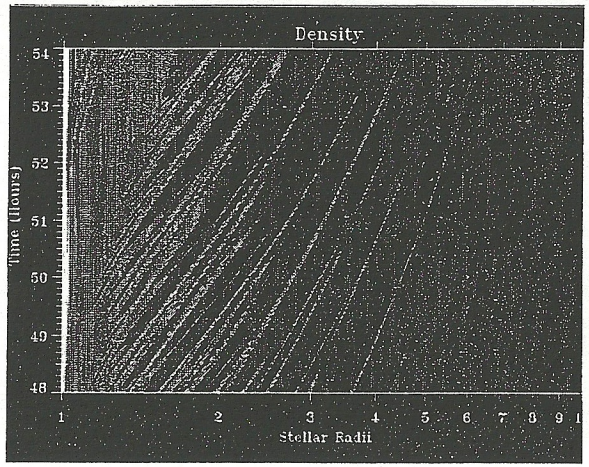


Abb. 9.8c. Wie zuvor, jedoch $T_{\mathrm{swi}}/T_{\mathrm{eff}} = 20$ in der Strahlungskühlung.



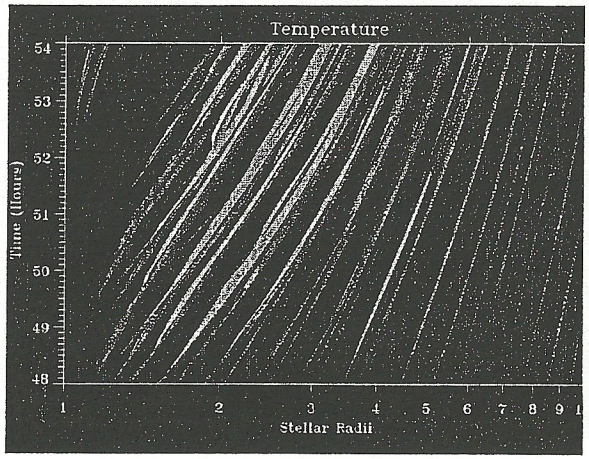


Abb. 9.8d. Adiabatischer instabiler Wind, d. h. ohne Strahlungskühlung.

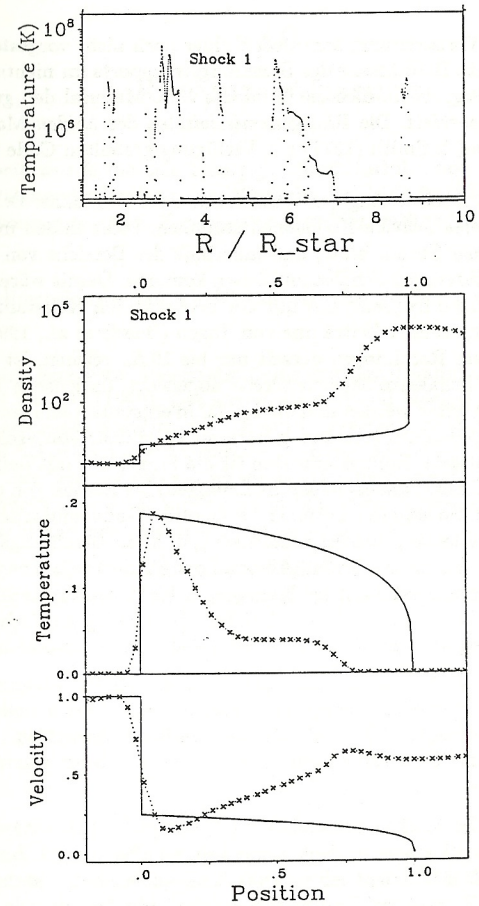


Abb. 9.9. *Ganz oben*: Temperaturverlauf bei $t = 44$ Stunden des $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 10$ Modells. *Untere drei Abbildungen*: Der mit „Shock 1" markierte Schock normiert aufgetragen gegen die stationäre, analytische Lösung für $\alpha = -1/2$.

der Kühlungslängen resultiert, ergeben diese neuen Modelle tatsächlich eine ähnliche Schalenstruktur wie die isothermen Beschreibungen. Die Kühlungszonen sind numerisch gut aufgelöst und ihre Struktur ist durch den korrekten Exponenten $\alpha = -1/2$ der Kühlungsfunktion bestimmt.

Mittels des berechneten Temperaturverlaufes bieten diese Modelle zukünftig die Möglichkeit zu einem *quantitativen* Vergleich mit Röntgenbeobachtungen. Eine entspre-

chende Arbeit ist in Vorbereitung, kann jedoch hier noch nicht vorgestellt werden. Es ist hierzu eine korrekte Berechnung des Strahlungstransports im nichtmonotonen Geschwindigkeitsfeld nötig, da im dichten Wind das *kalte* Material den größten Teil der Röntgenstrahlung *absorbiert*. Die Röntgen*emissivitäten* des *heißen* Materials können mit dem von Raymond & Smith (1977) zur Verfügung gestellten Code berechnet werden.

In den hier berechneten zeitabhängigen Winden sollte der dominante Beitrag zur Röntgenemission von *Schalen-Schalen*-Kollisionen stammen. Diese finden in den Modellen auf Zeitskalen von einer Stunde statt, und innerhalb des Bereichs von $1\,R_*$ bis $10\,R_*$ kann es bis zu 5 gleichzeitigen Schalenkollisionen kommen. Damit wären diese zeitlich wie räumlich hinreichend frequent, um mit der beobachteten Konstanz der Röntgenemission von OB-Sternen über Zeiträume von Tagen (Baade et al., 1993) in Einklang zu sein. Obwohl unsere Rechnungen derzeit nur bis $10\,R_*$ reichen, ist damit der wesentliche Bereich der Schalenkollisionen bereits abgedeckt, da jenseits von $\approx 8\,R_*$ bis $10\,R_*$ die Stöße (sehr) selten werden und die bis dahin entstandenen massereichen Schalen in nahezu gleichbleibenden Abständen nach außen laufen. Von großer Wichtigkeit bezüglich der *beobachtbaren* Röntgenemission ist die Frage, was mit den Schalen (oder ggf. auch Klumpen in mehrdimensionalen Rechnungen) bei Radien von der Größenordnung $100\,R_*$ geschieht. So könnte im dünner werdenden Windmedium der Abstand zwischen Schockfront und kaltem dichten Schalenkern, d. h. die Strahlungskühlungslänge, immer größer werden, bis diese mit dem Abstand der Schalen selbst vergleichbar wird. Diese Fragen können nur durch künftige Rechnungen bis zu großen Radien beantwortet werden.

10
Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die zeitabhängige, durch nichtlineares Anwachsen instabiler Störungen entstehende Struktur der Winde heißer, leuchtkräftiger Sterne untersucht. Die dabei gewonnenen *neuen* Ergebnisse sollen hier nochmals kurz zusammengestellt werden.

Bezüglich eindimensionaler sphärisch symmetrischer *isothermer* Windmodelle fanden wir:

1. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Windmodellen nach Owocki et al. (1988) und Owocki (1992): Der strukturierte Wind besteht aus einer Abfolge von sehr dichten, schmalen Schalen, die von einem *reverse* Schock an der Innenseite und einem *forward* Schock an der Außenseite begrenzt sind. Dichtekontraste von 10^3 bis 10^4 treten an den Schocks auf, welche die Schalen begrenzen. Die Sprunggeschwindigkeiten der Schocks von ≈ 500 km/s sind in sehr guter Übereinstimmung mit den aus Röntgenbeobachtungen geschlossenen (Hillier et al., 1993).

2. Es kommt zu häufigen Schalen–Schalen Kollisionen. Dies setzt i) *nichtlokale* Einflüsse voraus, die hier durch die Abschattung und damit Verlangsamung einer Schale durch sternnähere Schalen gegeben sind, und ii) daß die Schalen *nicht* in konstanten zeitlichen Abständen aufeinander folgen. Letzteres erklärt sich durch folgendes Phänomen:

3. Die Erzeugung der Windstruktur wird in den bisherigen Modellen durch photosphärische Schallwellen *einer* festen Periode T ausgelöst. Es kommt dann zur Ausbildung eines reichen Spektrums von Harmonischen dieser Grundperiode, die bis mindestens $T/10$ nachgewiesen werden können. Der Grund hierfür ist die nichtlineare Aufsteilung der Wellen.

4. Es gibt *keinerlei* Anzeichen von deterministischem Chaos oder stochastischem Verhalten im Wind. Dieser befindet sich somit noch in einem Bereich, in welchem der – bisher unbekannte – dimensionslose Parameter der Instabilität der Linienstrahlungsbeschleunigung nur „wenig“ über seinem kritischen Wert liegt. Ein Zusammenhang der Windstruktur mit *echter* hydrodynamischer Turbulenz ist im hier betrachteten Bereich der Instabilität nicht gegeben.

5. Der Entstehungsort und Dichtekontrast der Schalen hängt von der verwendeten Näherung für die Linienreemission bei der Berechnung der diffusen Strahlungsbeschleunigung ab. Die ausgeprägteste Struktur entsteht bei Verwendung einer optisch dünnen Quellfunktion (rein gemometrische Verdünnung des photosphärischen Kontinuums), weniger Struktur bei Verwendung der optisch dicken Quellfunktion des zugrundeliegenden stationären CAK/PPK-Modells und nur sehr wenig Struktur resultiert bei Verwendung der aktuellen optisch dicken Quellfunktion des jeweiligen Geschwindigkeitsfeldes. Die Rückkopplung der letzteren an die Windstruktur bewirkt eine *Dämpfung* des instabilen

Wachstums. Diese Ergebnisse zeigen erneut die Notwendigkeit einer genauen Berechnung (anstelle der Vorgabe) des konsistenten diffusen Strahlungsfeldes.

6. Im Gegensatz zu einigen Modellen von Owocki (1992), die auch *ohne* explizite Störung des Windes die Entstehung einer selbstangeregten periodischen Struktur zeigen, konvergieren entsprechende eigene Rechnungen gegen einen *stationären* Wind: Es bildet sich anfänglich zwar eine starke Struktur aus, die jedoch vom Stern wegadvektiert wird und einen stationären Wind zurückläßt.

7. Rechnungen zur Linienentstehung basierend auf unseren zeitabhängigen Windmodellen können schon jetzt zumindest zwei auf eine Struktur im Wind hindeutende *beobachtete* Phänomene qualtitativ erklären: i) *Narrow Absorption Components* als *ruhende*, zusätzliche Absorptionskomponenten im Absorptionsteil von ungesättigten P-Cygni Profilen. ii) Schwarze Tröge, d. h. breite Bereiche der Intensität ≈ 0 in gesättigten P-Cygni Profilen.

Die Voraussetzung der *Isothermie* dieser Windmodelle gründet sich auf die Annahme sehr effektiver *Strahlungskühlung*: Sind die Kühlungszeiten und -längen schockgeheizten Materials kurz gegen Strömungsskalen, dann haben die Bereiche heißen Gases keinen Einfluß auf die Winddynamik.
Um jedoch diese Voraussetzung effektiver Strahlungskühlung zu überprüfen, die zumindest in Gebieten geringer Dichten und hoher Temperaturen nicht mehr gegeben ist, ist die Kenntnis der Kühlungszonen unabdingbar.
Des weiteren kann die *Röntgenemission* als entscheidendes *beobachtetes* Charakteristikum der Windvariabilität nur mit Kenntnis der Struktur dieser Zonen (Temperatur- und Dichteverlauf) aus den Modellen berechnet werden.
Die Strahlungskühlung bedingt jedoch ein numerisches Problem: Die Kühlungszonen, die aufgrund einfacher Abschätzungen deutliche Ausdehnung haben sollten, sind in den numerischen Simulationen nur einen oder einige wenige Gitterabstände breit, so daß der Schock numerisch *isotherm* ist.
Wir haben hierzu nun gefunden:

8. In einer Testrechnung mit einem ruhenden radiativen Schock vor einer Wand ist eine genaue numerische (Auf-)Lösung der radiativen Kühlungszone möglich. Wird jedoch das numerische Gitter grober, geschieht bei Unterschreiten einer gewissen Grenze ein qualitativer Umschlag der Strömung, indem der radiative Schock nicht *schlechter* aufgelöst wird, sondern (numerisch) *isotherm* wird (wobei die stationäre Kühlungslänge durchaus noch durch mehrere Gitterpunkte aufgelöst würde). Die Ursache hierfür ist die *Oszillation* des adiabatischen Schocks und damit die periodische Kontraktion und Expansion der gesamten Kühlungszone aufgrund der globalen *thermischen Instabilität* (Langer et al., 1981). Die kontrahierende Kühlungszone kann dabei unter die numerische Gitterauflösung gelangen: Die Numerik „vergißt“ die Existenz einer Kühlungszone, der Schock wird isotherm. An die Stelle der (reversiblen) Oszillation ist ein irreversibler Kollaps getreten.

9. Um diesen Kollaps der Kühlungszone zu verhindern, modifizieren wir die Kühlungsfunktion im physikalisch insignifikanten Bereich niedriger (und mittlerer) Temperaturen

– im Vergleich zur Temperatur unmittelbar hinter dem Schock. Nur Kühlungsexponenten $\alpha \lesssim 1$ ($\alpha = -1/2$ wird in den Rechnungen verwendet) zeigen die oszillatorische Instabilität. Wir führen bei einer Temperatur $T_{\rm swi}$ einen stetigen Knick in die Kühlungsfunktion ein, mit $\alpha = 2$ unterhalb von $T_{\rm swi}$. Durch eine Vielzahl von Testrechnungen sowie durch analytische Abschätzungen kann der Bereich von $T_{\rm swi}$ gefunden werden, für den das Verhalten des Gases in der Kühlungszone durch den korrekten Exponenten $\alpha = -1/2$ bestimmt ist und nicht durch den künstlichen stabilisierenden Exponenten $\alpha = 2$. Die Kühlungslänge hängt aufgrund der Dominanz heißen, dünnen Materials nur logarithmisch von $T_{\rm swi}$ ab. Insgesamt wird somit der Kollaps der Kühlungszone verhindert, ohne daß in dieser Näherung die Kühlungslänge oder die Struktur der Kühlungszone unphysikalisch beeinflußt wird.

*Wind*rechnungen unter Einbeziehung der instabilen Strahlungsbeschleunigung und des Energietransfers (mit der eben beschriebenen abgeänderten Kühlungsfunktion) ergeben:

10. Die Abhängigkeit der Windstruktur von $T_{\rm swi}$ ist gering. Kleinste verwendete $T_{\rm swi}$ sind $T_{\rm swi}/T_{\rm eff} = 10$ bzw. 15, bei typischen Schocktemperaturen $T_{\rm post}/T_{\rm eff} \approx 50$ bis 300. Doch ist die Oszillation der Kühlungszonen aufgrund der thermischen Instabilität *nicht* zu beobachten; der Grund hierfür ist momentan nicht klar.

11. Die Kühlungslängen im betrachteten Wind des O-Überriesen ζ Pup bis 10 Sternradien *sind* kurz. Sie haben Ausdehnungen $\lesssim 0,2\,R_*$, bei typischen Schalenabständen von $1\,R_*$. Die Modelle *mit* Energiegleichung sind daher bezüglich ihrer (makroskopischen) Windstruktur nahezu identisch mit den entsprechenden isothermen Modellen. Ein wesentlicher Grund hierfür ist die Entstehung der Schalen nahe am Stern (typischerweise: $0,2 \ldots 0,5\,R_*$ über der Sternoberfläche), wo sie aufgrund hoher Dichten effektiv strahlungskühlen können.

12. Dominante heiße Bereiche entstehen in diesen Modellen durch häufige *Kollisionen* der Schalen, die somit (primär) auch für die beobachtete Röntgenemission von OB-Sternen verantwortlich sein sollten. Jenseits von etwa 3 Sternradien sind jedoch nurmehr wenig Kollisionen zu beobachten, dafür aber deutlich ausgeprägte radiative Kühlungszonen an den *reverse* Schocks der verbleibenden Schalen.

13. Es bilden sich in den Windmodellen mit Energietransfer keine *forward* Schocks. Stattdessen entsteht hinter der (durch radiative Kühlung entstandenen) Verdichtung der *reverse* Schocks (also sternauswärts) eine isotherme *Verdünnungswelle* hin zum dünnen, ungeschockten Windmaterial.

Wir hoffen, mit den so gefundenen Ergebnissen einen weiteren Schritt beigetragen zu haben zu der nun über die Jahre so erfolgreich gewachsenen Theorie der strahlungsdruckgetriebenen Winde heißer, massereicher Sterne und insbesondere auch Anhaltspunkte gefunden zu haben für eine mögliche *Synthese* der noch vor kurzem so disparat erscheinenden stationären Ansätze einerseits und der Idee einer Zeitabhängigkeit aufgrund der Instabilität der Strahlungsbeschleunigung andererseits.

Anhang 1: Analytische Lösungen für stationäre Kühlungszonen

Wir stellen hier die analytischen Lösungen für eindimensionale, planare, stationäre, radiative Kühlungszonen gemäß Chevalier & Imamura (1982) (CI im folgenden) zusammen.
Die physikalische Situation ist folgende: Ein (von rechts kommender) Gasstrahl strömt hoch supersonisch (Ma $\to \infty$) gegen eine Wand. Der von der Wand weglaufende adiabatische Schock kommt aufgrund radiativer Kühlung des geschockten Materials zwischen Wand und Schock in festem Abstand von der Wand zur Ruhe, der Abstand zwischen Wand und Schock ist dann die gesamte Kühlungslänge. – Im Gegensatz dazu würde in einem rein adiabatischen Gas, ohne Strahlungskühlung, der Schock mit konstanter Geschwindigkeit von der Wand weglaufen.
Das betrachtete Gas soll einen Adiabatenexponenten $\gamma = 5/3$ haben. Die betrachtete Kühlungsfunktion ist

$$\rho^2 A \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\alpha}, \tag{A1.1}$$

wobei $p/\rho \sim T$ angenommen wird, und A ist die Kühlungskonstante.
Die stationären planaren hydrodynamischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho v)}{dx} &= 0, \\ \rho v \frac{dv}{dx} &= 0, \\ v\frac{dp}{dx} - \frac{5}{3} v \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dx} &= -\frac{2}{3}\rho^2 A \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{A1.2}$$

Diese sind durch die entsprechenden Randbedingungen am unendlich starken Schock (siehe Anhang 7) zu ergänzen.
Wir stellen die bereits von CI angegeben Lösungen nochmals zusammen – insbesondere, da CI leider nicht die Kühlungslängen angegeben haben, welche sich bei der Lösung als Integrationskonstanten ergeben. Außerdem geben wir Lösungen für einige Werte von α, die nicht in CI aufgeführt sind, im speziellen für den hier besonders interessierenden Fall eines Kühlungsexponenten $\alpha = -1/2$.

Für $\alpha = -2$:

$$\xi = -\frac{65536}{27} w^5 (1+w)^3,$$
$$x_s = \frac{1}{2}\frac{27}{65536}\frac{v_{\rm pre}^7}{A\,\rho_{\rm pre}}.$$

Für $\alpha = -1$:

$$\xi = \frac{15360}{41} w^4 \left(\frac{4}{3}w^2 + \frac{13}{5}w + \frac{5}{4}\right),$$
$$x_s = \frac{1}{2}\frac{41}{15360}\frac{v_{\rm pre}^5}{A\,\rho_{\rm pre}}.$$

Für $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\xi = \left(\frac{-93\sqrt{3}}{320} + \frac{\pi}{8}\right)^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{-w-w^2}}{20}(512w^4 + 464w^3 - 8w^2 + 10w - 15) + \frac{3}{8}\arccos(1+2w) \right\},$$
$$x_s = \frac{1}{32}\left(\frac{93\sqrt{3}}{320} - \frac{\pi}{8}\right)\frac{v_{\rm pre}^4}{A\,\rho_{\rm pre}}.$$

Für $\alpha = 0$:

$$\xi = -\frac{128}{7} w^3 (6w+5),$$
$$x_s = \frac{1}{2}\frac{7}{384}\frac{v_{\rm pre}^3}{A\,\rho_{\rm pre}}.$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\xi = \left(\frac{39\sqrt{3}}{4} - 5\pi\right)^{-1} \left\{ \sqrt{-w-w^2}\,(64w^2 - 20w + 30) - 15\arccos(1+2w) \right\},$$
$$x_s = \frac{1}{48}\left(\frac{39\sqrt{3}}{4} - 5\pi\right)\frac{v_{\rm pre}^2}{A\,\rho_{\rm pre}}.$$

Für $\alpha = 1$:

$$\xi = \left(1 + 3\ln\frac{3}{4}\right)^{-1} (4w^2 - 3w + 3\ln(1+w)),$$
$$x_s = \frac{1}{2}\left(1 + 3\ln\frac{3}{4}\right)\frac{v_{\rm pre}}{A\,\rho_{\rm pre}}.$$

Für $\alpha = 2$:

$$\xi = \left(1 + 8\ln\frac{3}{4}\right)^{-1} \left(-\frac{3w}{1+w} + 8\ln(1+w)\right),$$
$$x_s = -\frac{1}{2}\left(1 + 8\ln\frac{3}{4}\right)\frac{v_{\rm pre}^{-1}}{A\,\rho_{\rm pre}}. \tag{A1.3}$$

Hierin ist $\xi = x/x_s$ der normierte Ort, $w = v/v_{\rm pre}$ ist die normierte Geschwindigkeit, x_s ist die Schockposition, mit $x = 0$ dem Ort der Wand. $\rho_{\rm pre}$ und $v_{\rm pre}$ sind *preshock*

Dichte und Geschwindigkeit. Wir folgen hier der Konvention von CI, daß $v_{\rm pre}$ eine *positive* Größe ist, wohingegen die Geschwindigkeit v selbst eine negative Größe ist. Somit ist w immer negativ.

Dieselben Abhängigkeiten (bei den jeweiligen α) der Kühlungslänge x_s von Kühlungskonstante A und *preshock* Dichte und Geschwindigkeit erhält man auch aus der Abschätzung der Kühlungslänge

$$L_{\rm cool} \approx -\frac{e}{\dot{e}} v_{\rm post}, \tag{A1.4}$$

mit $e = p/(\gamma-1)$ die thermische Energiedichte eines idealen Gases. Die Kühlungslängen gemäß (3) und (4) sind von derselben Größenordnung.

Die größte Einschränkung an die Verwendbarkeit obiger Lösungen in stellaren Winden ist *Stationarität*. Um stationäre radiative Kühlung zu haben, muß die Kühlungszeit (sehr) kurz sein gegenüber der dynamischen Zeitskala (Strömungszeit). Dieses Kriterium ist sogar schon hinreichend: Da $v_{\rm post} \leq v$, ist mit kurzer Kühlungszeit auch die Kühlungslänge kurz gegenüber typischen Längenskalen der Strömung:

$$\begin{aligned} t_{\rm cool} < t_{\rm dyn} \Longrightarrow \\ L_{\rm cool} \approx t_{\rm cool} \cdot v_{\rm post} < t_{\rm dyn} \cdot v \approx L_{\rm dyn}. \end{aligned} \tag{A1.5}$$

Andererseits reicht eine kurze Kühlungslänge im Wind *nicht* aus, um Stationarität der Kühlungszone sicherzustellen, da immer noch $t_{\rm cool} > t_{\rm dyn}$ sein kann.

Anhang 2: Radiative Kühlungslängen in Sternwinden

Die gesamte radiative Kühlungslänge der analytischen Lösung von Chevalier & Imamura (1982) (CI im folgenden) aus Anhang 1 soll für den Wind eines typischen O-Überriesen berechnet werden.
Die von CI verwendete Energiegleichung mit Strahlungskühlung ist (dort allerdings 1d planar)

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{div})e = -p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \rho^2 A_{\rm CI}\left(\frac{p}{\rho}\right)^{\alpha}, \tag{A2.1}$$

mit $e = \rho\epsilon$ die thermische Energiedichte, $\epsilon = \frac{kT}{\mu(\gamma-1)} = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$.
Wir verwenden im Wind die Energiegleichung in der Form

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{div})e = -p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - N_{\rm e}N_{\rm H}A_{\rm RS}\,T^{\alpha}, \tag{A2.2}$$

mit der Kühlungskonstanten $A_{\rm RS}$ der Raymond & Smith (1977) Kühlfunktion. Also ist

$$A_{\rm CI} = \frac{N_{\rm e}N_{\rm H}}{\rho^2}\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\alpha} A_{\rm RS}. \tag{A2.3}$$

Wir berechnen $N_{\rm e}N_{\rm H}/\rho^2$ für ein H/He Gas. Sind die Ionisationsgrade $I_{\rm H}, I_{\rm He}$ von Wasserstoff und Helium konstant, so ist auch $N_{\rm e}N_{\rm H}/\rho^2$ eine *Konstante*. Sei $Y = N_{\rm He}/N_{\rm H}$ die Heliumhäufigkeit; dann ist das mittlere Atomgewicht μ (unter der Annahme verschwindender Elektronenmasse)

$$\mu = \frac{\sum \mu_i N_i}{N} = \frac{1+4Y}{1+I_{\rm H}+Y(1+I_{\rm He})}\mu_{\rm H}, \tag{A2.4}$$

mit $N = \sum N_i$. Damit ist

$$\frac{N_{\rm H}N_{\rm e}}{\rho^2} = \frac{N_{\rm H}N_{\rm H}(I_{\rm H}+I_{\rm He}Y)}{(\mu N)^2} = \frac{I_{\rm H}+I_{\rm He}Y}{(1+4Y)^2}\mu_{\rm H}^{-2}. \tag{A2.5}$$

Wir wollen uns auf den Fall eines Kühlungsexponenten $\alpha = -1/2$ beschränken, was für die in Schocks in Sternwinden zu erwartenden Temperaturen eine gute Näherung ist. Die Behandlung anderer α geschieht analog. Die gesamte Kühlungslänge für einen stationären radiativen Schock mit Machzahl $\mathrm{Ma} \to \infty$ in einem $\gamma = 5/3$ Gas für $\alpha = -1/2$ wurde in Anhang 1 angegeben,

$$L_{\rm cool}^{\rm tot} = \frac{1}{32}\left(\frac{93\sqrt{3}}{320} - \frac{\pi}{8}\right)\frac{v_{\rm pre}^4}{A_{\rm CI}\,\rho_{\rm pre}} = 3{,}46\cdot 10^{-3}\frac{v_{\rm pre}^4}{A_{\rm CI}\,\rho_{\rm pre}}. \tag{A2.6}$$

An einem $\mathrm{Ma} \to \infty$, $\gamma = 5/3$ Schock ist

$$T_{\rm post} = \frac{3}{16}\frac{\mu}{k}v_{\rm pre}^2,$$

womit in der Kühlungslänge dann $v_{\rm pre}$ durch das besser bekannte $T_{\rm post}$ ersetzt werden kann. Eine kurze Rechnung führt auf

$$\left(\frac{k}{\mu}\right)^2 \frac{1}{A_{\rm CI}} = k^{3/2}\mu_{\rm H}^{1/2}\frac{(1+I_{\rm H}+Y(1+I_{\rm He}))^{3/2}(1+4Y)^{1/2}}{I_{\rm H}+I_{\rm He}Y}\frac{1}{A_{\rm RS}} \equiv k^{3/2}\mu_{\rm H}^{1/2}\frac{C}{A_{\rm RS}}, \tag{A2.7}$$

wobei zur Abkürzung die Konstante C eingeführt wurde. Die Kühlungslänge ist damit, in Einheiten des Sternradius (alle anderen Größen in cgs-Einheiten),

$$\frac{L_{\rm cool}^{\rm tot}}{R_*} = 2,06\cdot 10^{-37}\frac{C}{A_{\rm RS}}\frac{T_{\rm eff}^2}{\rho_{\rm CAK}R_*}\frac{(T_{\rm post}/T_{\rm eff})^2}{\rho_{\rm pre}/\rho_{\rm CAK}}, \tag{A2.8}$$

wobei die CAKsche Dichte und die Effektivtemperatur als Bezugsgrößen verwendet wurden. Aus einem $\alpha = -1/2$ Fit an die Kühlungsfunktion von Raymond & Smith (1977) erhält man

$$A_{\rm RS} = 1,64\cdot 10^{-19}\,{\rm erg\,cm^3 s^{-1} K^{1/2}}. \tag{A2.9}$$

Die Dichte kann mit der Kontinuitätsgleichung geschrieben werden als

$$\rho_{\rm CAK} = \dot{M}_{\rm CAK}/4\pi v_{\rm CAK} r^2. \tag{A2.10}$$

Für ein β-Geschwindigkeitsfeld mit $\beta = 1$,

$$v_{\rm CAK} = v_\infty\left(1-\frac{R_*}{r}\right), \tag{A2.11}$$

ist somit

$$\frac{L_{\rm cool}^{\rm tot}}{R_*} = 1,55\cdot 10^{-17}\,C\,\frac{T_{\rm eff}^2 v_\infty R_*}{\dot{M}}\left(\frac{r}{R_*}-1\right)\frac{r}{R_*}\frac{(T_{\rm post}/T_{\rm eff})^2}{\rho_{\rm pre}/\rho_{\rm CAK}}, \tag{A2.12}$$

bzw. in typischen Einheiten eines O-Sterns ausgedrückt,

$$\frac{L_{\rm cool}^{\rm tot}}{R_*} = 1,72\cdot 10^{-10}\,C\left(\frac{T_{\rm eff}}{10.000\,{\rm K}}\right)^2\frac{v_\infty}{1.000\,{\rm km\,s^{-1}}}\frac{R_*}{r_\odot}\left(\frac{\dot{M}}{10^{-6}M_\odot{\rm yr}^{-1}}\right)^{-1}$$
$$\left(\frac{r}{R_*}-1\right)\frac{r}{R_*}\frac{(T_{\rm post}/T_{\rm eff})^2}{\rho_{\rm pre}/\rho_{\rm CAK}}. \tag{A2.13}$$

Um typische Werte für die Konstante $C = (1+I_{\rm H}+Y(1+I_{\rm He}))^{3/2}(1+4Y)^{1/2}/(I_{\rm H}+I_{\rm He}Y)$ anzugeben, seien Ionisationsgrade $I_{\rm H} = 1$ und $I_{\rm He} = 2$ angenommen. Es ist dann

Y	C
0,01	2,90
0,05	3,14
0,1	3,44
0,15	3,73
0,2	4,02

Diese *gesamte* Kühlungslänge soll verglichen werden mit der oft verwendeten Abschätzung

$$L_{\rm cool} = v_{\rm post}\cdot t_{\rm cool}, \tag{A2.14a}$$

mit Kühlungszeit

$$t_{\rm cool} = -\left(\frac{e}{\dot{e}}\right)_{\rm post}. \tag{A2.14b}$$

Hierin sind $\dot{e}$ die Energieverluste *allein* aufgrund von Strahlungskühlung.
Dies soll in dieselbe Form wie die CI-Kühlungslänge (6) gebracht werden. Es ist (wiederum für Ma $\to\infty$, $\gamma = 5/3$)

$$\begin{aligned} v_{\rm post} &= \frac{1}{4}v_{\rm pre},\\ e &= \frac{3}{2}p,\\ \dot{e} &= -\rho^2 A_{\rm CI}\left(\frac{p}{\rho}\right)^{-1/2},\\ p_{\rm post} &= \frac{3}{4}\rho_{\rm pre}v_{\rm pre}^2. \end{aligned} \tag{A2.15}$$

Einsetzen führt auf

$$L_{\rm cool} = \frac{9\sqrt{3}}{2048}\frac{v_{\rm pre}^4}{A_{\rm CI}\rho_{\rm pre}} = 7,61\cdot 10^{-3}\frac{v_{\rm pre}^4}{A_{\rm CI}\rho_{\rm pre}}, \tag{A2.16}$$

was einen Faktor 2,2 *größer* ist als die *gesamte* CI-Kühlungslänge (6). Der Grund hierfür ist, daß in dieser Abschätzung ein wesentlicher Effekt nicht berücksichtigt wurde: Der *postshock* Bereich ist subsonisch, weshalb es zum Ausgleich von Druckgradienten kommen kann, und über die gesamte Kühlungszone hinweg herrscht in sehr guter Näherung Druckkonstanz. Dies bedingt einen Kühlungs*runaway* bzw. eine *lokale* Kühlungsinstabilität: Kühlendes Material wird dichter – und kann damit wiederum besser kühlen. Wie in Abschnitt 8.4 gezeigt wurde, ist dies für $\alpha < 2$ der Fall.

Anhang 3: Strahlungskühlung innerhalb der viskosen Schockfront

Die viskose Übergangsschicht eines starken Schocks ist einige mittlere freie Weglängen der stoßenden Teilchen breit. Andererseits ist die Längenskala, über die hinweg Strahlungsenergieaustausch im Schock eine Rolle spielt, durch die größere bzw. viel größere mittlere freie Weglänge eines Photons festgelegt (siehe Zeldovich & Raizer, 1967, Vol. II, Kap. VII, §14). Damit ist der viskose Übergangsbereich eines Schocks sehr viel schmaler als die radiative Kühlungszone, über die hinweg das stoßaufgeheizte Gas seine Energie durch Abstrahlung wieder verliert.
Ein *numerischer* Schock andererseits ist, vermittels der numerischen oder künstlichen Viskosität, einige Gitterabstände breit. Was geschieht daher, wenn die radiative Kühlungslänge (die physikalische oder die numerische) kürzer ist als die numerische Schockbreite?
Diese Fragestellung ist insbesondere von Interesse im Zusammenhang mit der von Owocki aufgeworfenen Idee der verstärkten Strahlungskühlung aufgrund von advektiver Diffusion, siehe Abschnitt 8.2. Das Grundproblem ist folgendes: Im numerischen Schock kommt es über einige Gitterpunkte hinweg zu *mittleren* Temperaturen zwischen *pre-* und *postshock* Temperatur. Für einen hinreichend kleinen Kühlungsexponenten α (siehe weiter unten) kann dieses Material *besser* kühlen als Materie bei der *postshock* Temperatur, die Kühlungslänge bei den mittleren Temperaturen ist kleiner als die der *postshock* Temperatur entsprechende. Kann es damit, wenn die Kühlungslänge bei den *mittleren* Temperaturen in dieselbe Größenordnung kommt wie der Schockübergang selbst, zu einer rein numerisch bedingten Verfälschung des Schocks, mitsamt der anschließenden Kühlungszone, kommen?

Wir zeigen in diesem Anhang: Für einen Kühlungsexponenten $\alpha = -1/2$ (wie in den Windrechnungen in Kapitel 9 verwendet) wird für eine Kühlungslänge (gemeint ist die *physikalische* Kühlungslänge bei der *postshock* Temperatur), die größer als die numerische Schockbreite ist, *keine* merkliche Kühlung innerhalb des viskosen Übergangs stattfinden. Die „mittleren" Temperaturen haben also *keinen* Einfluß auf die Schockstruktur (weder des viskosen, noch des gesamten radiativen Schocks).

Sei $\tau_{\mathrm{c,is}}$ die *lokale* Kühlungszeit eines hydrodynamischen Teilchens an einem bestimmten Ort *innerhalb* des Schocks, entsprechend der an diesem Ort herrschenden Temperatur. (Wir verwenden folgende Bezeichnungsweise: „po" für *postshock*, „pre" für *preshock* Größen und „is" für Größen innerhalb eines Schocks, d. h. im viskosen Übergangsbereich.) Sei $\langle\tau_{\mathrm{c,is}}\rangle$ die über die Teilchentrajektorie durch den Schock gemittelte Kühlungszeit. Und schließlich sei τ_{po} die der *postshock* Temperatur entsprechende Kühlungszeit. Es ist nach dem Verhältnis $\kappa_c = \langle\tau_{\mathrm{c,is}}\rangle/\tau_{\mathrm{po}}$ gefragt:
Denn sei t_{cross} die Zeit, die ein Teilchen zum Passieren des Schocks benötigt, dann wird für

$$\frac{\langle\tau_{\mathrm{c,is}}\rangle}{t_{\mathrm{cross}}} = \kappa_c \frac{\tau_{\mathrm{c,po}}}{t_{\mathrm{cross}}} \leq F, \tag{A3.1}$$

mit F einer Zahl der Ordnung 1, Kühlung innerhalb des Schocks das Aussehen des gesamten radiativen Schocks verändern.

Mihalas & Mihalas (1984), S. 243, geben den Temperaturverlauf $T(v)$ innerhalb eines viskosen Schocks an,

$$\frac{T(v)}{T_{\mathrm{pre}}} = 1 + (\gamma-1)\frac{v_h - v}{v_h} + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\Big(\frac{v_h - v}{a_{\mathrm{pre}}}\Big)^2, \tag{A3.2a}$$

wobei v_h die *upstream* Geschwindigkeit ist, d. h. die hohe Geschwindigkeit am Schock; a_{pre} ist die Schallgeschwindigkeit des Materials vor dem Schock. Für starke Schocks $\mathrm{Ma} \to \infty$ in einem $\gamma = 5/3$ Gas erhält man aus (2a) (wobei v_{is} die Geschwindigkeit *relativ* zur Schockfront sein soll),

$$T = \frac{1}{3}\frac{\mu}{k}(v_h - v)^2 = \frac{1}{3}\frac{\mu}{k}(v_{\mathrm{pre}} - v_{\mathrm{is}})^2. \tag{A3.2b}$$

Auf der *postshock* Seite erhält man hieraus die bekannte Beziehung

$$T_{\mathrm{po}} = \frac{1}{3}\frac{\mu}{k}v_{\mathrm{jump}}^2.$$

Da wir Strahlungskühlung über den Schock hinweg erlauben, ist der Schock kein rein viskoser mehr, und Gleichung (2a) ist nur als in erster Ordnung gültig anzusehen.

Wir nehmen an, daß der Geschwindigkeitsverlauf im Schock *linear* ist. Dies ist für reale wie für numerische Schocks eine gute Näherung. Damit kann die Durchflußzeit eines Teilchens durch einen Schock leicht bestimmt werden. Sei δ die Dicke des viskosen Schockübergangs. Dann ist

$$t_{\mathrm{cross}} = \int_0^\delta \frac{dx}{|\,v - v_s\,|} = \int_0^\delta \frac{dx}{v_{\mathrm{pre}}(1 - \frac{3}{4}\frac{x}{\delta})} = \frac{\delta}{v_{\mathrm{jump}}}\ln 4, \tag{A3.3}$$

wobei $v_{\mathrm{po}} = \frac{1}{4}v_{\mathrm{pre}} = \frac{1}{3}v_{\mathrm{jump}}$ an einem $\mathrm{Ma} \to \infty$, $\gamma = 5/3$ Schock verwendet wurde.
Wir setzen voraus, daß die Schockdurchflußzeit kurz ist und können damit Stationarität und Planarität im Schocksystem annehmen,

$$\frac{\rho_{\mathrm{is}}}{\rho_{\mathrm{po}}} = \frac{v_{\mathrm{po}}}{v_{\mathrm{is}}}. \tag{A3.4}$$

Die (lokale) Kühlungszeit sei definiert als (mit e die thermische Energiedichte)

$$\tau_c \equiv \frac{e}{\dot{e}} = \frac{3}{2}\frac{k}{\mu}\frac{T^{1-\alpha}}{A\,\rho}, \tag{A3.5}$$

womit wir für das Verhältnis von lokaler Kühlungszeit innerhalb des Schocks zur *postshock* Kühlungszeit erhalten

$$\frac{\tau_{\rm c,is}}{\tau_{\rm c,po}} = \left(\frac{T_{\rm is}}{T_{\rm po}}\right)^{1-\alpha} \frac{\rho_{\rm po}}{\rho_{\rm is}}. \qquad \text{(A3.6)}$$

Fassen wir also zusammen, so ist

$$\kappa_{\rm c} = \frac{1}{t_{\rm cross}} \int_0^{t_{\rm cross}} \frac{\tau_{\rm c,is}(t)}{\tau_{\rm c,po}}\, dt = \frac{1}{t_{\rm cross}} \int_0^{\delta} \left(\frac{v_{\rm pre} - v_{\rm is}}{v_{\rm jump}}\right)^{2-2\alpha} \frac{v_{\rm is}}{v_{\rm po}} \frac{dx}{v_{\rm is}} = \frac{3}{\ln 4} \frac{1}{3-2\alpha}. \qquad \text{(A3.7a)}$$

Hierbei wurde $\alpha < 3/2$ vorausgesetzt: Für größere Werte von α divergiert das Integral, weil die mittlere Kühlungszeit innerhalb des Schocks gegen ∞ geht. Aus (7a) folgt, daß nur für $\alpha < \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{\ln 4}) \approx 0.418$ gilt $\kappa_c < 1$: Nur für solche α ist die gemittelte Kühlungszeit im Schock kürzer als die *postshock* Kühlungszeit.
Für einen Kühlungsexponenten $\alpha = -1/2$ erhält man

$$\kappa_{\rm c} \approx 0.541, \qquad \text{(A3.7b)}$$

d. h. $\alpha = -1/2$ verhält sich nicht so kritisch wie erwartet: Bei den mittleren Temperaturen innerhalb des Schocks ist die Kühlungszeit im Mittel nur einen Faktor $\approx 0{,}5$ kürzer als die (physikalisch einzig relevante) *postshock* Kühlungszeit.

Aus (1) haben wir (im Falle $\alpha = -1/2$), daß für

$$\tau_{\rm c,po} \leq 2.56\, F\, \frac{\delta}{v_{\rm jump}} \qquad \text{(A3.8)}$$

Kühlung innerhalb des Schocks die Struktur des (gesamten radiativen) Schocks verändern kann.

Die *postshock* Kühlungslänge ist von der Größenordnung

$$L_{\rm c,po} = \tau_{\rm c,po} \cdot v_{\rm po}. \qquad \text{(A3.9)}$$

Schocks mit einer radiativen Kühlungszone der Ausdehnung

$$\frac{L_{\rm c,po}}{\delta} \leq 0.86\, F \qquad \text{(A3.10)}$$

können durch Strahlungskühlung über den viskosen Übergang hinweg numerisch verfälscht sein. Da $F \approx 1$, ist dies im eigentlichen Sinne *gar keine* Einschränkung: Verstärkte Strahlungskühlung aufgrund mittlerer Schocktemperaturen sollte für alle durch das numerische Gitter *prinzipiell auflösbaren* Kühlungszonen keine Rolle spielen.

Anhang 4: Auflösbarkeit des radiativen Schocks

In einer radiativen Kühlungszone wird es im allgemeinen zu Fields (1965) lokaler thermischer Instabilität kommen: Der subsonische *postshock* Bereich ist nahezu isobar (da jeder Druckgradient durch Schallwellen schnell ausgeglichen wird), mit jeder Kühlung geht also eine entsprechende Kompression einher. Wie in Abschnitt 8.4 gezeigt, kühlt Material *isobar* für einen Exponenten $\alpha < 2$ der Kühlungsfunktion um so besser, je kälter es bereits ist. Es kommt also zu einem *runaway* in der Dichte. Diese *lokale* kondensatorische Instabilität ist zu unterscheiden von der *globalen* oszillatorischen Instabilität von Langer et al. (1981), die in Abschnitt 8.5 diskutiert wurde.

In diesem Anhang interessiert uns daher der Bereich der stationären radiativen Kühlungszone, unmittelbar *bevor* das Material vollständig abgekühlt ist (in stellaren Winden: auf $T_{\rm eff}$) und daher wieder rein adiabatisch geworden ist (womit alle weiteren Änderungen in seinen Eigenschaften nurmehr auf der langsamen hydrodynamischen Skala stattfinden).
Hier haben aufgrund des Dichte*runaway* die stationären CI-Lösungen aus Anhang 1 einen unendlichen Dichtegradienten, womit große Anforderungen an das räumliche numerische Gitter gestellt werden. – Dieser Ort sei im folgenden mit „ce" (für „cold edge") bezeichnet.

Wir fordern dann, mit i dem räumlichen Gitterindex, daß

$$\frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\rho_i}\,|_{\rm ce} \;\approx\; \frac{\rho_i' \cdot (x_{i+1} - x_i)}{\rho_i}\,|_{\rm ce} \;\leq\; F, \qquad \text{(A4.1)}$$

wobei F eine Zahl von der Größenordnung 1 bis 10 sein wird.
Stationarität der planaren Gasströmung heißt

$$\frac{d}{dx}(\rho v) = 0, \qquad \text{(A4.2)}$$

also

$$\frac{\rho'}{\rho}\,|_{\rm ce} = \frac{v'}{v}\,|_{\rm ce}, \qquad \text{(A4.3)}$$

wobei ein Minuszeichen weggelassen wurde, welches im folgenden ohne Bedeutung ist. Mit den normierten Variablen der CI-Lösungen aus Anhang 1 ist

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d(wv_{\rm pre})}{d(\xi L_{\rm c})} = \frac{v_{\rm pre}}{L_{\rm c}} \left(\frac{d\xi}{dw}\right)^{-1}, \qquad \text{(A4.4)}$$

wobei L_c als gebräuchlicheres Symbol zur Bezeichnung der Kühlungslänge anstelle von x_s verwendet wurde. $d\xi/dw$ in (4) kann nun aus den *impliziten* CI-Lösungen $\xi = \xi(w)$ berechnet werden. Da für starke Schocks

$$w_{\rm ce} \to 0, \qquad \text{(A4.5)}$$

gilt, nehmen wir nur die Terme niedrigster Ordnung in w mit, und erhalten (wieder unter Verzicht auf globale Vorzeichen)

$$\frac{d\xi}{dw}\,|_{w\to 0} \;=\; C\,w^{2-\alpha}, \tag{A4.6}$$

wobei

α	C
-2	12136
-1	1873,2
$-1/2$	722,82
0	274,29
1/2	101,74
1	36,509
2	3,8418

(Man muß beim Differenzieren von $\xi(w)$ sorgfältig vorgehen. Bei $\alpha = -1/2$ beispielsweise heben sich 3 Ordnungen in w heraus.)
Wir haben dann

$$\Delta x_{\rm ce} \le \frac{F\rho_{\rm ce}}{\rho'_{\rm ce}} = \frac{Fv_{\rm ce}}{v'_{\rm ce}} = \frac{Fv_{\rm ce}L_c}{v_{\rm pre}}\,\frac{d\xi}{dw}\,|_{\rm ce}\,. \tag{A4.7}$$

Der *gesamte* radiative Schock = adiabatischer Schock + Kühlungszone kann als *isothermer* Schock (besser: Sprung) betrachtet werden, also

$$\frac{\rho_{\rm ce}}{\rho_{\rm pre}} = {\rm Ma}^2_{\rm iso} = \frac{v_{\rm pre}}{v_{\rm ce}} = w_{\rm ce}^{-1}, \tag{A4.8}$$

und damit

$$\Delta x_{\rm ce} \le \frac{FL_cC}{{\rm Ma}^{6-2\alpha}_{\rm iso}}. \tag{A4.9}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für die notwendige Gitterauflösung.

Hierin haben wir die Kühlungslänge L_c als freien Parameter behandelt. Für einen Wind mit *preshock* Temperatur $T_{\rm eff}$ ist aber gemäß Anhang 1

$$L_c \sim \frac{v_{\rm pre}^{3-2\alpha}}{A\rho_{\rm pre}} \sim \frac{{\rm Ma}_{\rm adi}^{3-2\alpha}T_{\rm eff}^{3-2\alpha/2}}{A\rho_{\rm pre}}. \tag{A4.10}$$

Mit ${\rm Ma}_{\rm adi} \sim {\rm Ma}_{\rm iso}$ ist also

$$\Delta x_{\rm ce} \sim \frac{FCT_{\rm eff}^{3-2\alpha/2}}{A\rho_{\rm pre}{\rm Ma}^3_{\rm iso}}, \tag{A4.11}$$

und damit ist die Abhängigkeit von der Machzahl ggf. um eine große Potenz reduziert: Im Fall $\alpha = -1/2$ von $\sim {\rm Ma}^{-7}$ auf $\sim {\rm Ma}^{-3}$.

Es ist jedoch Gleichung (9), welche die Machzahlabhängigkeit richtig beschreibt: Gleichung (10) täuscht eine Abhängigkeit der Kühlungslänge von der Machzahl nur vor. Insbesondere sind die *endlichen* Kühlungslängen der CI-Lösungen unter der Voraussetzung ${\rm Ma} \to \infty$ gewonnen worden!

Um einen Eindruck von der erforderlichen Gitterpunktzahl in stellaren Windrechnungen zu erhalten, setzen wir folgende Zahlen in (9) ein:

$$F = 10, \qquad L_c = 0.1\,r_\star, \qquad \alpha = -1/2, \qquad C = 723.$$

Für ein äquidistantes numerisches Gitter von 1 bis 5 Sternradien bräuchte man dann die folgende Zahl ig von Gitterpunkten, um den starken Dichteanstieg im Randbereich kurz vor dem vollständig abgekühlten Material auflösen zu können:
Für ${\rm Ma}_{\rm iso} = 10$: $ig = 5,5 \cdot 10^4$;
für ${\rm Ma}_{\rm iso} = 30$: $ig = 1,2 \cdot 10^8$.
Diese Zahlen sind in tatsächlichen Rechnungen unerreichbar.

Daß (9) tatsächlich richtige Größenordnungen für die Zahl benötigter Gitterpunkte liefert, soll noch durch folgendes Beispiel gezeigt werden. Für den in Abschnitt 3.10, Abb. 19 durchgeführten Vergleich von numerisch berechneten mit analytischen Kühlungszonen erhalten wir, mit einem Exponenten $\alpha = 1$, einer Kühlungslänge $L_c = 1$, einer isothermen Machzahl von $\sqrt{50}$ (vgl. den dortigen Dichtesprung) und einem räumlichen Intervall von $x = 0$ bis $x = 2$, daß insgesamt $ig = 14$ Punkte eine Auflösung des Bereiches steiler Gradienten garantieren! Tatsächlich wurden in dieser Rechnung 100 Punkte verwendet. (F=10 in obiger Abschätzung stellt tatsächlich bereits eine obere Grenze dar.)

Wir müssen schließen, in radiativen Kühlungszonen im Wind nicht in der Lage zu sein, den Bereich steiler Dichtegradienten kurz vor der adiabatischen Kante auflösen zu können.

Andererseits ist das numerische Schema in der Lage, mit praktisch beliebig wenig Gitterpunkten innerhalb der radiativen Kühlungszone (und damit beliebig schlechter Auflösung des Bereiches steiler Gradienten) den *Sprung* in den hydrodynamischen Größen sehr genau zu reproduzieren. Genauer gesagt, die Sprünge in Dichte und Geschwindigkeit, wohingegen der Drucksprung maximal um einen Faktor 4/3 falsch wird, der Temperatursprung aber beliebig falsch. Der Grund hierfür ist, daß *ohne* Gitterpunkte in der Kühlungszone der radiative Schock als *echter numerischer isothermer* Schock gehandhabt wird. Die korrekten Sprünge resultieren aus der Verwendung der *konservativen* Formulierung der hydrodynamischen Gleichungen. Bezüglich des Temperatursprungs geschieht folgendes: Wird die Kühlungszone kleiner als die Schockbreite, so tritt signifikante Kühlung bereits über den Schock hinweg ein. Auf diese Weise wird aus dem adiabatischen Schock ein isothermer Schock (siehe hierzu auch Anhang 3).

Die folgende Abbildung 1 zeigt 4 Fälle geringer werdender Gitterauflösung für obigen $\alpha = 1$ CI-Test. Im letzten der gezeigten Fälle ist die gesamte Kühlungszone nurmehr

durch zwei Punkte „aufgelöst“ (während der Schock selbst schon über drei Punkte verschmiert wird). Man sieht, wie gering selbst bei dieser extrem schlechten Auflösung die Kühlung über den Schock hinweg ist: Der Temperatursprung ist immer noch ungefähr 3/4 des korrekten Wertes.

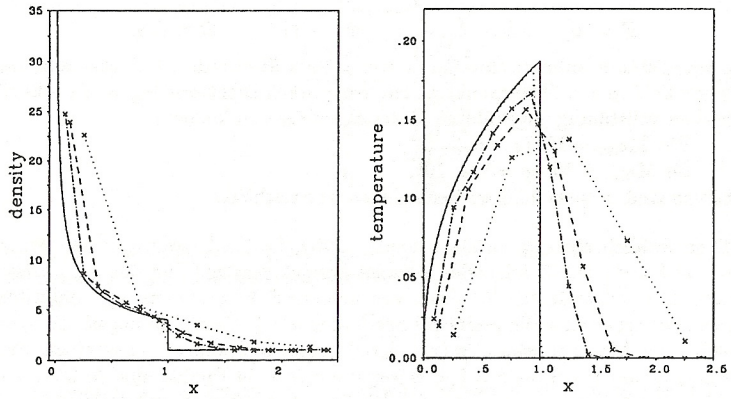


Abb. A4.1. $\alpha = 1$ CI-Test mit 4 verschiedenen Gitterauflösungen. Durchgezogen: analytische Lösung

Anhang 5: Numerische Behandlung der Strahlungskühlung

Es sollen drei numerische Verfahren dargestellt werden, die Strahlungskühlung in der Energiegleichung zeitlich zu integrieren, nämlich

- explizit
- integriert
- implizit.

Die Energiegleichung für die thermische Energiedichte e lautet (ohne künstliche Viskosität)

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\, e) = -p \operatorname{div}\mathbf{v} - A\,\rho^2\, T^\alpha,$$

wobei der letzte Term die (parametrisierte) Strahlungskühlung darstellt. Die einzelnen Terme der Energiegleichung werden gemäß dem *Operatorsplitting* Schema behandelt (siehe Abschnitt 2.2). Die Strahlungskühlungsgleichung im numerischen Schema lautet damit

$$\frac{de}{dt} = -A\,\rho^2\, T^\alpha. \tag{A5.1}$$

Die *Kontinuitäts*gleichung wird zu Beginn des numerischen Zeitschrittes integriert (vgl. Abschnitt 2.2 über *Operatorsplitting*), d. h. neue Dichten werden berechnet. Über den Rest des numerischen Zeitschritts hinweg bleibt die Dichte unverändert, kann also insbesondere in (1) vor das Differential gezogen werden, $d_t e \equiv \rho d_t \epsilon$. Dies widerspricht *nicht* der bereits mehrfach erwähnten Tatsache, daß hinter Schocks die Strahlungskühlung nahezu isobar verläuft, und damit mit jeder Absenkung der Temperatur eine Kompression einhergeht – denn dies wird, als rein adiabatischer Vorgang, über die Druck- und Transportterme in den hydrodynamischen Gleichungen gesteuert und hat (primär) nichts mit der Strahlungskühlung zu tun.
Mittels der kinetischen Gleichung $\epsilon = kT/(\mu(\gamma-1))$ lautet die Strahlungskühlungsgleichung (1)

$$\frac{dT}{dt} = -B\,T^\alpha, \tag{A5.2a}$$

$$B = \frac{\mu(\gamma-1)}{k}\,A\,\rho. \tag{A5.2b}$$

Hierbei wurde die Dichte mit in die *Konstante* B gezogen, da sie bezüglich der Kühlungsgleichung selbst keine weitere Bedeutung hat. Gleichung (2a) hat, trotz ihrer einfachen Form, einige interessante Eigenschaften bezüglich der numerischen Formulierung.

Zeitexplizites Verfahren

Die linke Seite von (2a) wird diskretisiert als

$$\frac{dT}{dt} \to \frac{T_n - T_a}{t_n - t_a}, \tag{A5.3}$$

wobei Indizes „n" und „a" für Werte zum neuen und alten Zeitpunkt stehen: Wir weichen hier von unserer sonst üblichen Schreibweise von hochgestellten Indizes „$n+1$" und „n" für neuen und alten Zeitschritt ab. Zeit*explizit* heißt, auf der rechten Seite von (2a) die Temperatur zum „alten" Zeitpunkt zu nehmen, $T \to T_a$. Auflösen der Gleichung nach der gesuchten Temperatur gibt dann

$$T_n = T_a\,(1 - B\,T_a^{\alpha-1}\,\Delta t), \tag{A5.4}$$

mit $\Delta t = t_n - t_a$. Wir begegnen hier einem Phänomen, das im folgenden immer wieder auftritt: Die diskretisierte Gleichung (4) wird für zu große Zeitschritte *physikalisch falsch*; für

$$\Delta t > \frac{T_a^{1-\alpha}}{B} \tag{A5.5}$$

kommt es zu *negativen* Temperaturen. (5) kann noch in einer aussagekräftigeren Form geschrieben werden. Hierzu wird die Kühlungszeitskala τ eingeführt,

$$\tau = -\frac{T}{\dot{T}}, \tag{A5.6a}$$

womit

$$\tau_a = \frac{T_a^{1-\alpha}}{B}. \tag{A5.6b}$$

Gemäß (5) ist das zeitexplizite Verfahren physikalisch richtig nur für Zeitschritte

$$\Delta t \le \tau_a. \tag{A5.7}$$

Dieses Zeitschrittkriterium ist strikt zu unterscheiden von einer Zeitschrittbegrenzung aufgrund von Stabilitätsbetrachtungen (entsprechend beispielsweise dem Courantschen Zeitschritt). Im folgenden Anhang wird gezeigt, daß eine von Neumannsche Stabilitätsanalyse der Strahlungskühlungsgleichung für $\alpha = 1$ auf

$$\Delta t \le 2\tau_a$$

führt – also einen größeren erlaubten Zeitschritt als (7)!

Zeitintegriertes Verfahren

Hierzu werden in Gleichung (2a) beide Seiten über das Zeitintervall von t_a bis t_n integriert. Dies führt auf

$$T_n = T_a\,\left[1 - (1-\alpha)\frac{\Delta t}{\tau_a}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{A5.8}$$

Diese Gleichung bleibt richtig für $\alpha = 1$, wenn man $\exp(x) = \lim_{\epsilon\to 0}(1+\epsilon x)^{1/\epsilon}$ verwendet.
Die Zeitschrittbegrenzung ist nun daraus abzuleiten, daß der Term in eckigen Klammern größer als 0 sein soll. (Für bestimmte α ist die rechte Seite von (8) *immer* positiv; jedoch sind dies *formale* Ausnahmefälle; die *physikalische* Grenze des Zeitschritts ist durch das vorherige Kriterium gegeben.) Es muß sein

$$\Delta t \le \frac{\tau_a}{1-\alpha} \qquad \text{für} \qquad \alpha < 1; \tag{A5.9}$$

für $\alpha \ge 1$ gibt es *keine* Zeitschrittbegrenzung. Für $\alpha > 0$ ist somit ein größerer Zeitschritt erlaubt als beim zeitexpliziten Verfahren, für $\alpha < 0$ jedoch nur ein kleinerer.

Zeitimplizites Verfahren

Hierbei wird die linke Seite von (2a) diskretisiert wie beim zeitexpliziten Verfahren. Für ein *vollständig implizites* Verfahren wird auf der rechten Seite von (2a) die (unbekannte) Temperatur T_n zur neuen Zeit verwendet. (Ein semi-implizites Verfahren würde auf der rechten Seite $\frac{1}{2}(T_a + T_n)$ verwenden; dies wird im folgenden nur für einen Fall betrachtet.) Da Gleichung (2a) dann eine (nichtlineare) algebraische Gleichung in T_n ist, kann eine allgemeine Lösung für beliebige α nicht mehr angegeben werden. Die Gleichung kann dann entweder für beliebige α durch ein numerisches Iterationsverfahren gelöst werden oder analytisch für bestimmte α.
Einige solcher Lösungen sollen hier zusammengestellt werden. Die aufgeführten α führen auf einfache algebraische Gleichungen; der besonders interessierende Fall $\alpha = -1/2$ führt auf eine Gleichung dritten Grades, ebenso $\alpha = -2$.
Es ist für ein *vollständig implizites* Verfahren

$$\begin{array}{lll}
\alpha = 2: & T_n = T_a\,\frac{\sqrt{1+4\Delta t/\tau_a}-1}{2\Delta t/\tau_a}, & \Delta t \text{ beliebig} \\
\alpha = 1: & T_n = \frac{T_a}{1+\Delta t/\tau_a}, & \Delta t \text{ beliebig} \\
\alpha = \frac{1}{2}: & T_n = \frac{1}{4}\,T_a\,\left(\frac{\Delta t}{\tau_a}\right)^2\,\left[\sqrt{1+4\left(\frac{\tau_a}{\Delta t}\right)^2}-1\right]^2, & \Delta t \text{ beliebig} \\
\alpha = 0: & T_n = T_a\left(1-\frac{\Delta t}{\tau_a}\right), & \Delta t \le \tau_a \\
\alpha = -\frac{1}{2}: & T_n = \frac{4}{3}\,T_a\,\cos^2\left[\frac{1}{3}\,\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{\Delta t}{\tau_a}\right)\right], & \Delta t \le \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\tau_a \\
\alpha = -1: & T_n = \frac{1}{2}T_a\left[1+\sqrt{1-4\frac{\Delta t}{\tau_a}}\right], & \Delta t \le \frac{1}{4}\tau_a \\
\alpha = -2: & & \Delta t \le \frac{4}{27}\tau_a
\end{array} \tag{A5.10}$$

Wir haben somit im Fall $\alpha = -1/2$ für die verschiedenen Verfahren die folgenden Zeitschrittbegrenzungen erhalten (hier einschließlich des semi-impliziten Verfahrens)

explizit	$\Delta t \leq \tau_a$
halb implizit	$\Delta t \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}\tau_a \approx 0,77\ \tau_a$
integriert	$\Delta t \leq \frac{1}{1-\alpha}\tau_a \approx 0,67\ \tau_a$
voll implizit	$\Delta t \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}\tau_a \approx 0,39\ \tau_a$.

Für fast alle Rechnungen in vorliegender Arbeit wurde das zeit*integrierte* Verfahren verwendet, welches gemäß dieser Liste das zweitstrengste (und damit vielleicht auch zweitzuverlässigste) sein sollte. Erstaunlich ist, daß beide impliziten Verfahren strengere Zeitschrittbeschränkungen haben als das zeitexplizite. Das ist im Gegensatz zum üblichen Ergebnis von numerischen *Stabilitäts*analysen, wo implizite Verfahren größere Zeitschritte (bzw. $\Delta t \equiv \infty$) erlauben als explizite Verfahren.

Anhang 6: Stabilitätsanalyse der Strahlungskühlungsgleichung

Im vorigen Anhang 5 wurde eine Begrenzung des numerischen Zeitschrittes für die Strahlungskühlungsgleichung abgeleitet aus der Forderung nach *reellen, positiven Temperaturen*. Hier nun soll eine *Stabilitäts*analyse der Gleichung durchgeführt werden, um eventuelle weitere Begrenzungen des Zeitschrittes zu erhalten.
Das Ergebnis dieses gesamten Anhangs ist negativ. Die Gleichung erlaubt aufgrund ihrer Nichtlinearität nur wenige allgemeine Aussagen aus Stabilitätsbetrachtungen.

Die Strahlungskühlungsgleichung lautet im numerischen Schema (siehe (A5.2))

$$\frac{dT}{dt} = -BT^{\alpha}. \tag{A6.1}$$

In der *Stabilitäts*analyse wird eine kleine Störung in eine *stationäre* Lösung eingeführt und deren weitere Entwicklung untersucht. (1) hat als einzige stationäre Lösung $T = 0$. Jedoch kommt dies der physikalischen Situation entgegen: Für $\alpha < 0$ ist die Kühlungsfunktion T^{α} um so größer, je kleiner die Temperatur ist; mit abnehmender Temperatur wird also die Kühlungszeit kleiner, und damit sollte auch der erlaubte numerische Zeitschritt kleiner werden. Es liegt daher nahe, daß Beschränkungen an diesen von niedrigen Temperaturen her stammen (für hinreichend kleine α).

Wir setzen $T = 0$ in (1) und stören dies durch eine Temperaturschwankung ϵ. Die so erhaltene Gleichung ist identisch mit (1), wenn dort T durch ϵ ersetzt wird. Es wird zuerst das zeitexplizite Schema betrachtet, mit Diskretisierung $d\epsilon/dt = (\epsilon_n - \epsilon_a)/\Delta t$ und $\epsilon(t) \to \epsilon_a$. Die Stabilitätsforderung ist, daß die Störung *ausstirbt*,

$$\left|\frac{\epsilon_n}{\epsilon_a}\right| < 1. \tag{A6.2}$$

Dies gibt nur im Falle $\epsilon_a > 0$, $\epsilon_n < 0$ eine Begrenzung des Zeitschrittes, nämlich

$$\Delta t < 2\frac{\epsilon_a^{1-\alpha}}{B} \equiv 2\tau_a(\epsilon), \tag{A6.3}$$

wobei $\tau_a(\epsilon)$ die Kühlungszeit bei der Temperatur ϵ ist, siehe (A5.6).

Der maximal erlaubte Zeitschritt hängt somit von der jeweiligen Störung ab, die in numerischen Rechnungen natürlich unbekannt ist. Nur für $\alpha = 1$ ist, da die Kühlungszeit von der Temperatur unabhängig ist, eine allgemeine Zeitschrittbegrenzung ableitbar,

$$\Delta t < 2B^{-1}. \tag{A6.4}$$

Dies ist doppelt so groß wie der entsprechende Zeitschritt aus Anhang 5, der aus der Forderung nach positiver Temperatur gefunden wurde.

Wir stellen für den Kühlungsexponenten $\alpha = 1$ die sich ergebenden Zeitschrittbegrenzungen für die verschiedenen Verfahren der zeitlichen Integration zusammen. Zum Vergleich sind die entsprechenden Werte aus Anhang 5 angeführt.

	Stabilität	posivitive Temp.
explizit	$\Delta t < 2B^{-1}$	$\Delta t < B^{-1}$
halb implizit	Δt beliebig	$\Delta t < 2B^{-1}$
integriert	Δt beliebig	Δt beliebig
voll implizit	Δt beliebig	Δt beliebig

Interessant ist, daß alle impliziten Verfahren (wozu auch das zeit*integrierte* zu zählen ist) im Fall der linearen Kühlungsgleichung mit $\alpha = 1$ *keine* Zeitschrittbegrenzung aufgrund der Stabilitätsforderung erfahren. Dies ist das übliche Verhalten von impliziten Verfahren. Dies gilt jedoch *nicht* mehr allgemein für $\alpha < 1$.
Man kann noch einige allgemeine Aussagen für $\alpha > 1$ machen:

- Für das zeitexplizite Verfahren gibt es für $\alpha > 1$ eine Zeitschrittgrenze aus Stabilitätsgründen.
- Für das zeitintegrierte Verfahren gibt es für $\alpha > 1$ *keine* Zeitschrittbegrenzung mehr! Dies stimmt überein mit den in Anhang 5 gefundenen Resultaten.
- Für das vollständig zeitimplizite Verfahren und $\alpha = 2$ gibt es *keine* Zeitschrittbegrenzung, wiederum wie in Anhang 5.

Wir verzichten hier auf die Wiedergabe der einfachen Rechnungen. Man kann diese Liste bezüglich des voll und des halb impliziten Verfahrens und bestimmter $\alpha > 1$ Werte fortsetzen. Auch hierauf sei verzichtet.

Da die wenigen hier aus einer Stabilitätsbetrachtung erhaltenen Zeitschrittbegrenzungen $\Delta t_{\max}$ alle weniger streng sind als die entsprechenden in Anhang 5 erhaltenen, verbleibt die Hoffnung, daß die dortigen $\Delta t_{\max}$ schon gute Schranken auch hinsichtlich Stabilität darstellen.

Anhang 7: Sprungbedingungen am starken Schock

Da in den meisten Lehrbüchern die Sprungbedingungen am Schock für *beliebige* Machzahlen abgeleitet werden, wobei man in der erforderlichen Algebra leicht den Überblick verliert, sollen hier die einfacheren Sprungbedingungen an einem *starken* Schock hergeleitet werden.
Für die in Kapitel 6 und 9 betrachteten instabilen Winde mit Machzahlen von 20 und größer sind diese hinreichend.

Da der Schockübergang sehr dünn ist (von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge), kann der Schock als stationär und planar angenommen werden. Integriert man die adiabatischen hydrodynamischen Gleichungen in konservativer Form über ein schmales Volumen, welches den Schockübergang enthält, so erhält man die Sprungbedingungen (im Schocksystem)

$$\begin{aligned} [\rho v] &= 0, \\ [\rho v^2 + p] &= 0, \\ \left[\frac{1}{2}\rho v^3 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v\right] &= 0, \end{aligned} \tag{A7.1}$$

wobei $[A] \equiv A_{\text{pre}} - A_{\text{post}}$ ist.

Die zentrale Voraussetzung im weiteren ist, daß der Schockübergang stark sein soll, $\text{Ma} \to \infty$. Dies wird realisiert durch Vernachlässigung des *preshock* Druckes. Aus der Eulergleichung erhält man unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$v_{\text{post}} = v_{\text{pre}} - \frac{p_{\text{post}}}{\rho_{\text{pre}} v_{\text{pre}}},$$

und aus der Energiegleichung

$$\frac{p_{\text{post}}}{\rho_{\text{pre}} v_{\text{pre}}} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\left[\frac{v_{\text{pre}}^2}{v_{\text{post}}} - v_{\text{post}}\right].$$

Dies in die vorige Gleichung eingesetzt gibt eine quadratische Gleichung für v_{post},

$$(\gamma + 1) v_{\text{post}}^2 - 2\gamma v_{\text{post}} v_{\text{pre}} + (\gamma - 1) v_{\text{pre}}^2 = 0,$$

mit den Lösungen

$$v_{\text{post}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_{\text{pre}} \qquad \text{oder} \qquad v_{\text{post}} = v_{\text{pre}}. \tag{A7.2a}$$

$v_{\rm post} = v_{\rm pre}$ entspricht einer beliebigen stetigen Stelle in der Strömung. Für den Fall eines einatomigen Gases mit $\gamma = 5/3$ ist am Schock

$$v_{\rm post} = \frac{1}{4} v_{\rm pre}. \tag{A7.2b}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt hiermit

$$\rho_{\rm post} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\rho_{\rm pre}, \tag{A7.3a}$$

also für $\gamma = 5/3$

$$\rho_{\rm post} = 4\,\rho_{\rm pre}. \tag{A7.3b}$$

Für den Druck erhält man

$$p_{\rm post} = \frac{2}{\gamma+1}\rho_{\rm pre} v_{\rm pre}^2, \tag{A7.4a}$$

und für $\gamma = 5/3$

$$p_{\rm post} = \frac{3}{4}\rho_{\rm pre} v_{\rm pre}^2. \tag{A7.4b}$$

Die Temperatur ergibt sich aus der Zustandsgleichung; für ein ideales Gas

$$T_{\rm post} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\frac{\mu}{k}\,v_{\rm post}^2, \tag{A7.5a}$$

und für $\gamma = 5/3$

$$T_{\rm post} = \frac{3}{16}\,\frac{\mu}{k} v_{\rm post}^2. \tag{A7.5b}$$

Diese Sprungbedingungen gelten für einen starken *adiabatischen* Schock. Einen *isothermen* Schock erhält man daraus mittels $\gamma = 1$, womit jedoch der Dichtesprung unendlich wird. Um ein konkreteres Ergebnis zu erhalten, muß man den *preshock* Druck mitnehmen. Die Erhaltungssätze am Schock lauten dann

$$\begin{aligned} \rho_{\rm pre} v_{\rm pre} &= \rho_{\rm post} v_{\rm post}, \\ \rho_{\rm pre}\left(v_{\rm pre}^2 + a^2\right) &= \rho_{\rm post}\left(v_{\rm post}^2 + a^2\right), \end{aligned} \tag{A7.6}$$

mit der isothermen Schallgeschwindigkeit a. Man erhält

$$\begin{aligned} v_{\rm post} v_{\rm pre} &= a^2, \\ \frac{\rho_{\rm post}}{\rho_{\rm pre}} &= \left(\frac{v_{\rm pre}}{a}\right)^2 = {\rm Ma}^2. \end{aligned} \tag{A7.7}$$

Der Temperatursprung am adiabatischen Schock kann auch anschaulich verstanden werden. Man geht dazu ins Bezugssystem des *postshock* Materials (bzgl. dieses Systems

vgl. Zeldovich & Raizer (1967), Vol. II, Kap. 1, §1). Ein Beobachter in diesem System sieht Material der Geschwindigkeit $v_{\rm pre} - v_{\rm post} = \frac{2}{\gamma+1} v_{\rm post}$ auf sich zukommen und durch den Schock zur Ruhe gebracht werden. Die dieser Geschwindigkeit entsprechende kinetische Energie des Materials wird also in thermische Energie umgewandelt. Für einen starken Schock kann man die ursprüngliche thermische Energie des Gases vernachlässigen gegen die schockerzeugte thermische Energie und hat

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^2 v^2 = \tilde{\epsilon} = \frac{k\tilde{T}}{(\gamma-1)},$$

was wieder auf (5) führt.

Die *pre-* und *postshock* Geschwindigkeit, in welche die oftmals unbekannte Schockgeschwindigkeit eingeht, können noch durch die i. a. besser bekannte *Sprung*geschwindigkeit v_j am Schock ausgedrückt werden. Es ist (mit v_h und v_l die hohe und niedrige Geschwindigkeit am Schock in *irgendeinem* Bezugssystem)

$$v_j = v_h - v_l = v_{\rm pre} - v_{\rm post} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) v_{\rm pre} = \frac{2}{\gamma+1} v_{\rm pre},$$

und somit an starken Schocks

$$v_{\rm pre} = \frac{\gamma+1}{2} v_j, \qquad v_{\rm post} = \frac{\gamma-1}{2} v_j, \tag{A7.8a}$$

also für $\gamma = 5/3$,

$$v_{\rm pre} = \frac{4}{3} v_j, \qquad v_{\rm post} = \frac{1}{3} v_j, \tag{A7.8b}$$

und an isothermen Schocks,

$$v_{\rm pre} = v_j, \qquad v_{\rm post} = 0. \tag{A7.8c}$$

Aufgrund $v_{\rm post} = 0$ an starken isothermen Schocks sind die dichten Schalen in isothermen Windrechnungen sehr schmal: *reverse* Schock, geschocktes Material und *forward* Schock laufen alle mit derselben Geschwindigkeit.

Schließlich können noch die Schockgeschwindigkeiten angegeben werden. Wie in Abschnitt 3.9 sei beim *reverse* Schock der *preshock* Bereich links (im Sternwind: sternwärts), beim *forward* Schock dagegen rechts (im Wind: beobachterseitig).
Da der Massenstrom ρv auf beiden Seiten eines Schocks dasselbe *Vorzeichen* hat, muß ein Schock entweder *langsamer* sein als hohe und niedrige Geschwindigkeit am Sprung (→ *reverse* Schock) oder *schneller* sein als beide (→ *forward* Schock). Die Schockgeschwindigkeit kann nicht *zwischen* der hohen und niedrigen Geschwindigkeit am Sprung liegen (wie man intuitiv vielleicht annehmen könnte).

An einem starken *reverse* Schock ist dann

$$v_{\rm pre} = v_h - v_s,$$
$$v_{\rm post} = v_l - v_s,$$

was mit (2) auf

$$v_s = v_l - \frac{\gamma - 1}{2} v_j \qquad \text{(A7.9)}$$

führt; an einem *forward* Schock ist

$$v_{\rm pre} = v_s - v_l,$$
$$v_{\rm post} = v_s - v_h,$$

und damit

$$v_s = v_h + \frac{\gamma - 1}{2} v_j. \qquad \text{(A7.10)}$$

Anhang 8: Ort des Schallpunktes im Wind

Bis zum Schallpunkt kann man als gute Näherung für den Dichteverlauf im Wind eine isotherme barometrische Schichtung annehmen (siehe CAK); der Grund hierfür ist die Dominanz der Druckkraft über die (noch) geringe Strahlungskraft. Da der Schallpunkt für OB-Überriesen sehr nahe am Stern liegt (dies wird im folgenden *a posteriori* gezeigt), kann man weiterhin *Planarität* annehmen. Für einen stationären Wind ist also im subsonischen Bereich (mit H die isotherme barometrische Skalenhöhe, „$*$" ≡ Photosphäre)

$$\rho(z) = \rho_* \exp(-z/H),$$
$$v(z) = v_* \exp(z/H), \qquad \text{(A8.1)}$$

wobei

$$4\pi \rho_* v_* R_*^2 = \dot{M}.$$

Die Photosphäre R_* sei definiert als der Ort mit optischer Tiefe 1 bzgl. der Thomsonschen Elektronenstreuung,

$$1 = \tau_e = \sigma_e \int_0^\infty \rho_* \exp(-z/H) dz = \sigma_e H \rho_*, \qquad \text{(A8.2)}$$

und es folgt (a die isotherme Schallgeschwindigkeit)

$$v_* = \frac{\sigma_e H \dot{M}}{4\pi R_*^2}, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{v_*}{a} = \frac{\sigma_e \dot{M} a}{4\pi G M (1-\Gamma)}, \qquad \text{(A8.3)}$$

wobei in der letzten Gleichung $H = a^2/g_*$ und $g_* = GM(1-\Gamma)/R_*^2$ verwendet wurde. Den Schallpunkt z_a findet man damit aus dem exponentiellen Geschwindigkeitsgesetz zu

$$\frac{z_a}{H} = -\ln \frac{v_*}{a}. \qquad \text{(A8.4)}$$

Wir führen den Massenabsorptionskoeffizienten σ_e (Einheit g/cm^2) in den Thomson-Streukoeffizienten $\hat{\sigma}_e$ pro freies Elektron, d. h. den Streuquerschnitt eines Elektrons (Einheit cm^2) über,

$$d\tau_e = \sigma_e \rho dz \equiv \hat{\sigma}_e N_e dz, \qquad \text{(A8.5)}$$

mit Elektronendichte $N_e = (I_{\rm H} + I_{\rm He} Y) N_{\rm H}$ und $\hat{\sigma}_e = 6{,}65 \cdot 10^{-25}\,{\rm cm}^2$ (siehe Mihalas, 1978, S. 106). Somit

$$\sigma_e = \frac{\hat{\sigma}_e}{\mu_{\rm H}} \frac{I_{\rm H} + I_{\rm He} Y}{1 + 4Y}. \qquad \text{(A8.6)}$$

Für typische Verhältnisse in Photosphärennähe bei OB-Sternen, nämlich $I_{\rm H} = 1$, $I_{\rm He} = 2$, $Y = 0{,}1$ ist $\sigma_e = 0{,}34\,{\rm cm}^2{\rm g}^{-1}$ (bzw. $= 0{,}40$ für $Y = 0$ und $= 0{,}31$ für $Y = 0{,}2$). Die Thomsonbeschleunigung in der Photosphäre ist (siehe Abschnitt 4.1)

$$g_{\rm Th} = \sigma_e \frac{F_*}{c} = \frac{\sigma_e}{c} \frac{L}{4\pi R_*^2}, \qquad \text{(A8.7)}$$

also ist das Verhältnis von Thomsonbeschleunigung zur Gravitationsbeschleunigung

$$\Gamma = \frac{\sigma_e}{4\pi c G}\frac{L}{M} = 0,520 \left(\frac{\sigma_e}{0,34\,\mathrm{cm^2\,g^{-1}}}\right)\left(\frac{L}{10^6\,M_\odot}\right)\left(\frac{M}{50\,M_\odot}\right)^{-1}. \qquad \text{(A8.8)}$$

Für ζ Pup erhält man beispielsweise mit den in Tabelle 1, Kapitel 6 angegebenen stellaren Parametern

$$\sigma_e = 0,32\,\mathrm{cm^2\,g^{-1}}, \qquad \Gamma = 0,59,$$

und damit (Massenverlustrate, Schallgeschwindigkeit sowie Skalenhöhe wiederum aus Tabelle 1, Kapitel 6)

$$\frac{v_*}{a} = \frac{1}{210}, \qquad \frac{z_a}{H} = 5,4. \qquad \text{(A8.9)}$$

Mit $H/R_* = 0,0031$ ist somit der sonische Punkt von ζ Pup in dieser Abschätzung knapp unterhalb von $1,017\,R_*$.

Literaturverzeichnis

Abbott, D.C., 1979, The Domain of Radiatively Driven Mass Loss in the H-R Diagram, in: Mass Loss and Evolution of O-Type Stars, eds.: P.S. Conti, C.W.H. de Loore, IAU Symp. 83, pp. 237-240

Abbott, D.C., 1980, The Theory of Radiatively Driven Stellar Winds. I. A Physical Interpretation, *Ap. J.* **242**, 1183-1207

Abbott, D.C., 1982, The Theory of Radiatively Driven Stellar Winds. II. The Line Acceleration, *Ap. J.* **259**, 282-301

Abbott, D.C., Bieging, J.H., Churchwell, E., 1984, The Detection of Variable, Nonthermal Radio Emission from Two O Type Stars, *Ap. J.* **280**, 671-678

Auer, L.H., Van Blerkom, D., 1972, Electron Scattering in Spherically Expanding Envelopes, *Ap. J.* **178**, 175-181

Axford, W.I., Leer, E., Skadron, G., 1977, Paper presented at 15th International Cosmic-Ray Conf., Plovdiv, Bulgaria

Baade, D., Lucy, L.B., 1987, A Search for Coronal Line Emission from Early-Type Stars. I. Zeta Puppis, *A &A* **178**, 213-220

Bell, A.R., 1977, Proper Motions and Temporal Flux Changes of Compact Features in Cassiopeia A at 5 GHz, *M.N.R.A.S.* **179**, 573-585

Bell, A.R., 1978a, The Acceleration of Cosmic Rays in Shock Fronts – I, *M.N.R.A.S.* **182**, 147-156

Bell, A.R., 1978b, The Acceleration of Cosmic Rays in Shock Fronts – II, *M.N.R.A.S.* **182**, 443-455

Berger, M.J., Oliger, J., 1984, Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations, *J. Comp. Phys.* **53**, 484-512

Bers, A., 1983, Space-Time Evolution of Plasma Instabilities - Absolute and Convective, in: Handbook of Plasma Physics, Vol. 1: Basic Plasma Physics I, eds.: A.A. Galeev, R.N. Sudan, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 451-517

Bertschinger, E., 1986, On the Structure and Stability of Radiative Shock Waves, *Ap. J.* **304**, 154-177

Blondin, J.M., Fryxell, B.A., Königl, A., 1990, The Structure and Evolution of Radiatively Cooling Jets, *Ap. J.* **360**, 370-386

Bondi, H., 1952, On Spherically Symmetric Accretion, *M.N.R.A.S.* **112**, 195-204

Boris, J.P., Book, D.L., 1973, *J. Comp. Phys.* **11**, 38

Bowen, G.H., 1988, The Mechanism of Mass Loss from Pulsating Cool Stars, in: Pulsation and Mass Loss in Stars, eds.: R. Stalio, L.A. Willson, Kluwer, Dordrecht, pp. 3-25

Buchler, J.R., Perdang, J.M., Spiegel, E.A. (eds.), 1985, Chaos in Astrophysics, Reidel, Dordrecht

Burgers, J.M., 1974, The Non-Linear Diffusion Equation, Reidel, Dordrecht

Burkert, A., Hensler, G., 1988, Anisotropic Models of Galactic Evolution, *A &A* **199**, 131-145

Carlberg, R.G., 1980, The Instability of Radiation-Driven Stellar Winds, *Ap. J.* **241**, 1131-1140

Cassinelli, J.P., 1985, in: The Origin of Nonthermal Heating/Momentum in Hot Stars, eds.: A.B. Underhill, A.G. Michalitsionos, NASA Publ. 2358, p. 2

Cassinelli, J.P., 1992, Winds, in: The Astronomy and Astrophysics Encyclopedia, ed.: S. P. Maran, Cambridge University Press, pp. 809–812

Cassinelli, J.P., Hartmann, L., 1977, The Effects of Winds and Coronae of Hot Stars on the Infrared and Continua, *Ap. J.* **212**, 488-493

Cassinelli, J.P., Olson, G.L., 1979, The Effects of Coronal Regions on the X-Ray Flux and Ionization Conditions in the Winds of OB Supergiants and Of Stars, *Ap. J.* **229**, 304-317

Cassinelli, J.P., Olson, G.L., Stalio, R., 1978, The Structure of the Winds and Coronae of O Stars Derived From Hα Line-Profile Analyses, *Ap. J.* **220**, 573-581

Cassinelli, J.P., Swank, J.H., 1983, X-Ray Spectra of Orion OB Supergiants, *Ap. J.* **271**, 681-690

Cassinelli, J.P., Waldron, W.L., Sanders, W.T., Harnden, F.R., Rosner, R., Vaiana, G.S., 1981, X-Ray Emission from Of Stars and OB Supergiants, *Ap. J.* **250**, 677-686

Castor, J.I., 1970, Spectral Line Formation in Wolf-Rayet Envelopes, *M.N.R.A.S.* **149**, 111-127

Castor, J.I., 1974, On the Force Associated with Absorption of Spectral Line Radiation, *M.N.R.A.S.* **169**, 279-306

Castor, J.I., 1987, Shock Waves in Luminous Early-Type Stars, in: Instabilities in Luminous Early Type Stars, eds.: H.J.G.L.M. Lamers, C.W.H. de Loore, Reidel, Dordrecht, pp. 159-174

Castor, J.I., Abbott, D.C., Klein, R.I., 1975, Radiation-Driven Winds in Of Stars, *Ap. J.* **195**, 157-174

Castor, J.I., Abbott, D.C., Klein, R.I., 1976, Radiation-Driven Stellar Winds, in: Physique des Mouvements dans les Atmospheres Stellaires, eds.: R. Cayrel, M. Steinberg, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, pp. 363-393

Castor, J.I., Lamers, H.J.G.L.M., 1979, An Atlas of Theoretical P Cygni Profiles, *Ap. J. Suppl.* **39**, 481-511

Chandrasekhar, S., 1950, Radiative Transfer, Dover (reprint, 1960), New York

Chandrasekhar, S., 1961, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Dover (reprint, 1981), New York

Chen, W., White, R.L., 1991a, Nonthermal X-Ray Emission from Winds of OB Supergiants, *Ap. J.* **366**, 512-528

Chen, W., White, R.L., 1991b, Inverse-Compton Gamma-Ray Emission from Chaotic, Early-Type Stellar Winds and its Detectability by Gamma Ray Observatory, *Ap. J.* **381**, L63-L66

Chevalier, R.A., 1982, Self-Similar Solutions for the Interaction of Stellar Ejecta with an External Medium, *Ap. J.* **258**, 790-797

Chevalier, R.A., Imamura, J.N., 1982, Linear Analysis of an Oscillatory Instability of Radiative Shock Waves, *Ap. J.* **261**, 543-549

Chlebowski, T., Garmany, C.D., 1991, On Winds and X-Rays of O-Type Stars, *Ap. J.* **368**, 241-251

Chlebowski, T., Harnden, F.R., Sciortino, S., 1989, The Einstein X-Ray Observatory Catalog of O-Type Stars, *Ap. J.* **341**, 427-455

Chorin, A.J., Marsden, J.E., 1990, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verlag, New York

Colella, P., Woodward, R.P., 1984, The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations, *J. Comp. Phys.* **54**, 174-201

Collura, A., Sciortino, S., Serio, S., Vaiana, G.S., Harnden, F.R., Rosner, R., 1989, Variability of X-Ray Emission from OB Stars, *Ap. J.* **338**, 296-307

Cooper, R.G., 1993, Dissertation, University of Delaware, *in preparation*

Cooper, R.G., Owocki, S.P., 1992, Time-Dependent Model of X-Ray Emission from Shocks in Radiatively Driven Stellar Winds, in: Nonisotropic and Variable Outflows from Stars, eds.: L. Drissen, C. Leitherer, A. Nota, ASP Conference Series

Courant, R., Friedrichs, K.O., 1948, Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers, London

Courant, R., Friedrichs, K.O., Lewy, H., 1928, Über die Partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik, *Mathematische Annalen* **100**, pp. 32-74

Cox, D.P., 1972a, Theoretical Structure and Spectrum of a Shock Wave in the Interstellar Medium: The Cygnus Loop, *Ap. J.* **178**, 143-157

Cox, D.P., 1972b, Cooling and Evolution of a Supernova Remnant, *Ap. J.* **178**, 159-168

Cox, D.P., 1972c, An Evolutionary Model for the Cygnus Loop, *Ap. J.* **178**, 169-173

Cox, D.P., Daltabuit, E., 1971, Radiative Cooling of a Low-Density Plasma, *Ap. J.* **167**, 113-117

Cox, D.P., Tucker, W.H., 1969, Ionization Equilibrium and Radiative Cooling of a Low-Density Plasma, *Ap. J.* **157**, 1157-1167

Dalgarno, A., McCray, R.A., 1972, Heating and Ionization of HI Regions, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **10**, 375

Deardorff, J.W., 1970, A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers, *J. Fluid Mech.* **41**, 453-480

Deardorff, J.W., 1971, On the Magnitude of the Subgrid Scale Eddy Coefficient, *J. Comp. Phys.* **7**, 120-133

Dorfi, E.A., Drury, L.O'C, 1987, Simple Adaptive Grids for 1-D Initial Value Problems, *J. Comp. Phys.* **69**, 175-195

Drazin, P.G., Reid, W.H., 1981, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press

Ebbets, D., 1982, The Structure and Variability of Hα Emission in Early-Type Supergiants, *Ap. J. Suppl.* **48**, 399-414

Falle, S.A.E.G., 1975, Numerical Calculation of Thin Shell Formation in Supernova Remnants, *M.N.R.A.S.* **172**, 55-84

Falle, S.A.E.G., 1981, Catastrophic Cooling in Supernova Remnants, *M.N.R.A.S.* **195**, 1011-1028

Fesen, R.A., Kwitter, K.B., Downes, R.A., 1992, Hα Images of the Cygnus Loop: A new Look at Shock-Wave Dynamics in an old Supernova Remnant, *Astron. J.* **104**, 719-724, plates 85-89

Friend, D.B., Abbott, D.C., 1986, The Theory of Radiatively Driven Stellar Winds. III. Wind Models with Finite Disk Correction and Rotation, *Ap. J.* **311**, 701-707

Fullerton, A.W., 1991, Absorption Line Profile Variations among the O Stars, in: Rapid Variability of OB-Stars: Nature and Diagnostic Value, ed.: D. Baade, ESO Conference and Workshop Proceedings No. 36, Munich, pp. 3-19

Fullerton, A.W., Gies, D.R., Bolton, C.T., 1992, Propagating Absorption Enhancements in the Wind of the Extreme Of Supergiant HD 151804, *Ap. J.* **390**, 650-660

Fullerton, A.W., Owocki, S.P., 1992, Variability of Wind Features in Optical Spectra of O-Type Stars, in: Nonisotropic and Variable Outflows from Stars, eds.: L. Drissen, C. Leitherer, A. Nota, ASP Conference Series

Gaetz, T.J., Edgar, R.J., Chevalier, R.A., 1988, Stability of Radiative Shocks with Time-Dependent Cooling, *Ap. J.* **329**, 927-942

Geisel, T., 1985, Chaos and Noise, in: Chaos in Astrophysics, eds.: J.R. Buchler, J.M. Perdang, E.A. Spiegel, Reidel, Dordrecht, pp. 165-183

Hamann, W.R., 1980, The Expanding Envelope of Zeta Puppis: A Detailed UV-Line Fit, *A &A* **84**, 342-349

Hamann, W.R., 1985, Computed He II Spectra for Wolf-Rayet Stars, *A &A* **145**, 443-448

Hammer, R., 1988, The Winds from Cool Stars Including the Sun, in: Pulsation and Mass Loss in Stars, eds.: R. Stalio, L.A. Willson, Kluwer, Dordrecht, pp. 51-72

Harnden, F.R., Branduardi, G., Elvis, M., Gorenstein, P., Grindlay, J., Pye, J.P., Rosner, R., Topka, K., Vaiana, G.S., 1979, Discovery of an X-Ray Star Association in VI Cygni (Cyg OB 2), *Ap. J.* **234**, L51-54

Hawley, J.F., Smarr, L.L., Wilson, J.R., 1984, A Numerical Study of Nonspherical Black Hole Accretion. II. Finite Differencing and Code Calibration, *Ap. J. Suppl.* **55**, 211-246

Hearn, A.G., 1972, Chromospheric Heating of very Hot Stars by Radiation Driven Sound Waves, *A &A* **19**, 417-426

Hearn, A.G., 1973, Chromospheric Heating of very Hot Stars by Radiation Driven Sound Waves. II. *A &A* **23**, 97-103

Hearn, A.G., 1975, The Mass-Loss from the O9.5 Ib Supergiant ζ Orionis, Derived from the Hα Profile, *A &A* **40**, 277-283

Hedstrom, G.W., 1979, Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems, *J. Comp. Phys.* **30**, 222-237

Henrichs, H.F., 1988, Intrinsic Variability in Ultraviolet Spectra of Early-Type Stars: The Discrete Absorption Lines, in: O Stars and Wolf-Rayet Stars, eds.: P.S. Conti, A.B. Underhill, NASA SP–497, pp. 199-235

Henrichs, H.F., 1991, Why Are Winds of O Stars Variable?, in: Rapid Variability of OB-Stars: Nature and Diagnostic Value, ed.: D. Baade, ESO Conference and Workshop Proceedings No. 36, Munich, pp. 199-210

Henrichs, H.F., Hammerschlag-Hensberge, G., Lamers, H.J.G.L.M., 1980, in: Second European IUE Conference, ESA SP–157, p. 147

Henrichs, H.F., Kaper, L., Zwarthoed, G.A.A., 1988, Rapid Variability in O Star Winds, in: 10th IUE Meeting, Goddard Space Flight Center, ESA SP

Hillier, D.J., 1991, The Effects of Electron Scattering and Wind Clumping for Early Emission Line Stars, *A &A* **247**, 455-468

Hillier, D.J., Kudritzki, R.P., Pauldrach, A.W.A., Baade, D., Cassinelli, J.P., Puls, J., Schmitt, J.H.M.M., 1993, The 0.1 – 2.5 keV X-Ray spectrum of the O4f star ζ Pup, *A &A , in print*

Hogan, C.J., 1991, Self-Organization of Cosmic Radiation Pressure Instability, *Ap. J.* **369**, 300-307

Hogan, C.J., Woods, J., 1992, Self-Organization of Cosmic Radiation Pressure Instability. II. One-Dimensional Simulations, *Ap. J.* **384**, 111-114

Holzer, T.E., 1977, Effects of Rapidly Diverging Flow, Heat Addition, and Momentum Addition in the Solar Wind and Stellar Winds, *J. Geophys. Res.* **82**, 23-35

Howarth, I.D., 1984, An Analysis of V861 Sco – II. The Stellar Wind, *M.N.R.A.S.* **211**, 167-194

Howarth, I.D., 1992, Intrinsic Stellar-Wind Variability, in: Nonisotropic and Variable Outflows from Stars, eds.: L. Drissen, C. Leitherer, A. Nota, ASP Conference Series

Howarth, I.D., Prinja, R.K., 1989, The Stellar Winds of 203 Galactic O-Stars: A Quantitative Ultraviolet Survey, *Ap. J. Suppl.* **69**, 527-592

Imamura, J.N., Wolff, M.T., Durisen, R.H., 1984, A Numerical Study of the Stability of Radiative Shocks, *Ap. J.* **276**, 667-676

Innes, D.E., Giddings, J.R., Falle, S.A.E.G., 1987a, Dynamical Models of Radiative Shocks - I. Steady Shocks, *M.N.R.A.S.* **224**, 179-192

Innes, D.E., Giddings, J.R., Falle, S.A.E.G., 1987b, Dynamical Models of Radiative Shocks - II. Unsteady Shocks, *M.N.R.A.S.* **226**, 67-93

Kafatos, M.C., 1973, Time-Dependent Radiative Cooling of a Hot Low-Density Cosmic Gas, *Ap. J.* **182**, 433-447

Kafatos, M.C., Morrison, P., 1971, Fossil Strömgen Spheres from Supernova Explosions, *Ap. J.* **168**, 195-201

Kaper, L., Henrichs, H.F., Nichols-Bohlin, J., 1992, Wind-Variabilty of O-Type Stars, in: Variable Stars and Galaxies, ed.: B. Warner, PASP Conference Series

Kinwah Wu, Chanmugam, G., Shaviv, G., 1992, Properties of Quasi-Periodic Oscillations in Accreting Magnetic White Dwarfs, *Ap. J.* **397**, 232-241

Kley, W., Hensler, G., 1987, Two-Dimensional Numerical Models of the Boundary Layer of Accretion Disks in Cataclysmic Variables, *A &A* **172**, 124-142

Kofman, L., Raga, A.C., 1992, Modeling Structures of Knots in Jet Flows with the Burgers Equation, *Ap. J.* **390**, 359-364

Krolik, J.H., Raymond, J.C., 1985, Radiation Pressure-Driven Shocks in Winds from Hot Stars, *Ap. J.* **298**, 660-675

Kudritzki, R.P., Hillier, D.J., 1992, Radiation Driven Winds and X-Ray Emission from O Stars, in: Advances in Stellar & Coronal Physics, eds.: J. Linski, S. Serio, *in press*

Kudritzki, R.P., Hummer, D.G., 1990, Quantitative Spectroscopy of Hot Stars, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **28**, 303-345

Kudritzki, R.P., Simon, K.P., Hamann, W.R., 1983, Non-LTE Analysis of Massive O-Stars II. The O4 Star ζ Puppis, *A &A* **118**, 245-254

Kudritzki, R.P., Hummer, D.G., Pauldrach, A.W.A., Puls, J., Najarro, F., Imhoff, J., 1992, Radiation-driven winds of hot luminous stars X. The Determination of Stellar Masses, Radii and Distances from Terminal Velocities and Mass-loss Rates, *A &A* **257**, 655-662

Kylafis, N.D., Lamb, D.Q., 1979, X-Ray and UV Radiation from Accreting Nonmagnetic Degenerate Dwarfs, *Ap. J.* **228**, L105-L110

Lamb, H., 1932, Hydrodynamics, Dover (reprint, 1945), New York

Lamers, H.J.G.L.M., Morton, D.C., 1976, Mass Ejection from the O4 f Star ζ Puppis, *Ap. J. Suppl.* **32**, 715-736

Lamers, H.J.G.L.M., Waters, L.B.F.M., 1984, The Infrared and Radio Spectrum of Early-Type Stars with Mass Loss. III. The Effect of Coronae, Hot Blobs and Clumping on the IR and Radio Spectrum, *A &A* **138**, 25-35

Lamers, H.J.G.L.M., Gathier, R., Snow, T.P., 1982, Narrow Components in the Profiles of Ultraviolet Resonance Lines, *Ap. J.* **258**, 186-200

Lamers, H.J.G.L.M., Water, L.B.F.M., Wesselius, P.R., 1984, The IRAS Infrared Spectrum of ζ Puppis (O4If), *A &A* **134**, L17-L20

Landau, L.D., Lifschitz, E.M., 1991, Hydrodynamik, Lehrbuch der theoretischen Physik VI, Akademie-Verlag, Berlin

Landau, L.D., Lifschitz, E.M., 1986, Physikalische Kinetik, Lehrbuch der theoretischen Physik X, Akademie-Verlag, Berlin

Langer, S.H., Chanmugam, G., Shaviv, G. 1981, Thermal Instability in Accretion Flows onto Degenerate Dwarfs, *Ap. J.* **245**, L23-L26

Langer, S.H., Chanmugam, G., Shaviv, G., 1982, Time-Dependent Accretion onto Magnetized White Dwarfs, *Ap. J.* **258**, 289-305

Long, K.S., White, R.L., 1980, A Survey of Soft X-Ray Emission from Hot Stars, *Ap. J.* **239**, L65-L68

Lucy, L.B., 1982a, The Formation of Resonance Lines in Locally Nonmonotonic Winds, *Ap. J.* **255**, 278-285

Lucy, L.B., 1982b, X-Ray Emission from the Winds of Hot Stars. II., *Ap. J.* **255**, 286-292

Lucy, L.B., 1983, The Formation of Resonance Lines in Locally Nonmonotonic Winds. II. An Amplitude Diagnostic, *Ap. J.* **274**, 372-379 *Ap. J.* **283**, 303-312

Lucy, L.B., 1984, Wave Amplification in Line-Driven Windes, *Ap. J.* **284**, 351-356

Lucy, L.B., Solomon, P.M., 1970, Mass Loss by Hot Stars, *Ap. J.* **159**, 879-893

Lucy, L.B., White, R.L., 1980, X-Ray Emission From the Winds of Hot Stars, *Ap. J.* **241**, 300-305

Mönchmeyer, R., Müller, E., 1989, A Conservative Second-Order Difference Scheme for Curvilinear Coordinates, *A &A* **217**, 351-367

MacFarlane, J.J., Cassinelli, J.P., 1989, Shock-Generated X-Ray Emission in Radiatively Driven Winds: A Model for Tau Scorpii, *Ap. J.* **347**, 1090-1099

MacGregor, K.B., Hartmann, L., Raymond, J.C., 1979, Radiative Amplification of Sound Waves in the Winds of O and B Stars, *Ap. J.* **231**, 514-523

Mair, G., Müller, E., Hillebrandt, W., Arnold, C.N., 1988, Hydrodynamics of the Interstellar Gas in Colliding Galaxies. I. Head-on-collisions, *A &A* **199**, 114-126

Malagoli, A., Rosner, R., Fryxell, B., 1990, Numerical Simulations of Thermal Instabilities in Stratified Gases, *M.N.R.A.S.* **247**, 367-376

McCray, R., Stein, R.F., Kafatos, M., 1975, Thermal Instability in Supernova Shells, *Ap. J.* **196**, 565-570

McKee, C.F., 1974, X-Ray Emission from an Inward-Propagating Shock in Young Supernova Remnants, *Ap. J.* **188**, 335-339

McKee, C.F., Hollenbach, D.J., 1980, Interstellar Shock Waves, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **18**, 219-262

Mihalas, D., 1978, Stellar Atmospheres, Freeman, San Francisco

Mihalas, D., 1979, Curves of Growth and Line Profiles in Expanding and Rotating Atmospheres, *M.N.R.A.S.* **189**, 671-699

Mihalas, D., Mihalas, B.W., 1984, Foundations of Radiation Hydrodynamics, Oxford University Press, New York

Milne, E.A., 1926, On the Possibility of the Emission of High-Speed Atoms from the Sun and Stars, *M.N.R.A.S.* **86**, 459

Morton, D.C., 1967, The Far-Ultraviolet Spectra of Six Stars in Orion, *Ap. J.* **147**, 1017-1024

Morton, D.C., 1976, P Cygni Profiles in Zeta Ophiuchi and Zeta Puppis, *Ap. J.* **203**, 386-398

Mullan, D.J., 1984, Corotating Interaction Regions in Stellar Winds, *Ap. J.* **283**, 303-312

Noh, W.F., 1987, Errors for Calculations of Strong Shocks Using an Artificial Viscosity and Artificial Heat Flux, *J. Comp. Phys.* **72**, 78-120

Norman, M.L., Wilson, J.R., R.T. Barton, 1980, A New Calculation on Rotating Protostar Collapse, *Ap. J.* **239**, 968-981

Norman, M.L., Winkler, K.-H.A., 1986, 2-D Eulerian Hydrodynamics with Fluid Interfaces, Self-Gravity and Rotation, in: Astrophysical Radiation Hydrodynamics, eds.: K.-H.A. Winkler and M.L. Norman, Reidel, Dordrecht, pp. 187-221

Olson, G.L., Castor, J.I., 1981, Detailed Empirical Models for the Winds of Early-Type Stars, *Ap. J.* **244**, 179-198

Owocki, S.P., 1990, Smooth Source Function Approximation for the Diffuse Radiative Force, *draft notes*

Owocki, S.P., 1991, A Smooth Source Function Method for Including Scattering in Radiatively Driven Wind Simulations, in: Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models, eds.: L. Crivellari, I. Hubeny, D.G. Hummer, Kluwer, Dordrecht, pp. 235-246

Owocki, S.P., 1992, Instabilities in Hot-Star Winds: Basic Physics and Recent Developments, in: Atmospheres of Early-Type Stars, eds.: U. Heber, S. Jeffery, Springer-Verlag, Heidelberg

Owocki, S.P., Rybicki, G.B., 1984, Instabilities in Line-Driven Stellar Winds. I. Dependence on Perturbation Wavelength, *Ap. J.* **284**, 337-350

Owocki, S.P., Rybicki, G.B., 1985, Instabilities in Line-Driven Stellar Winds. II. Effect of Scattering, *Ap. J.* **299**, 265-276

Owocki, S.P., Rybicki, G.B., 1986, Instabilities in Line-Driven Stellar Winds. III. Wave Propagation in the Case of Pure Line Absorption, *Ap. J.* **309**, 127-140

Owocki, S.P., Rybicki, G.B., 1991, Instabilities in Line-Driven Stellar Winds. V. Effect of an Optically Thick Continuum, *Ap. J.* **368**, 261-263

Owocki, S.P., Castor, J.I., Rybicki, G.B., 1988, Time-Dependent Models of Radiatively Driven Stellar Winds. I. Nonlinear Evolution of Instabilities for a Pure Absorption Model, *Ap. J.* **335**, 914-930

Pallavicini, R., Golub, L., Rosner, R., et al., 1981, Pulsations among Stellar X-Ray Emission Observed from *EINSTEIN*, Stellar Rotation and Bolometric Luminosity, *Ap. J.* **248**, 279-290

Panagia, N., Felli, M., 1975, The Spectrum of Free-Free Radiation from Extended Envelopes, *A &A* **39**, 1-5

Parker, E.N., 1953, Instability of Thermal Fields, *Ap. J.* **117**, 431-436

Parker, E.N., 1958, Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields, *Ap. J.* **128**, 664-676

Parker, E.N., 1960a, The Hydrodynamic Treatment of the Expanding Solar Corona, *Ap. J.* **132**, 175-183

Parker, E.N., 1960b, The Hydrodynamic Theory of Solar Corpuscular Radiation and Stellar Winds, *Ap. J.* **132**, 821-866

Parker, E.N., 1966, Dynamical Properties of Stellar Coronas and Stellar Winds. V. Stability and Wave Propagation, *Ap. J.* **143**, 32-37

Pauldrach, A.W.A., 1987, Radiation Driven Winds of Hot Luminous Stars. III. Detailed Statistical Equilibrium Calculations for Hydrogen to Zinc, *A &A* **183**, 295-313

Pauldrach, A.W.A., Puls, J., 1990, Radiation-driven Winds of Hot Luminous Stars VIII. The Bistable Wind of the Luminous Blue Variable P Cygni (B1 Ia^+), *A &A* **237**, 409-424

Pauldrach, A.W.A., Puls, J., Kudritzki, R.P., 1986, Radiation-driven Winds of Hot Luminous Stars. Improvement of the Theory and First Results, *A &A* **164**, 86-100

Pauldrach, A.W.A., Kudritzki, R.P., Puls, J., Butler, K., 1990, Radiation-driven Winds of Hot Luminous Stars VII. The Evolution of Massive Stars and the Morphology of Stellar Wind Spectra, *A &A* **228**, 125-154

Pauldrach, A.W.A., Kudritzki, R.P., Puls, J., Butler, K., Hunsinger, J., 1993, Radiation Driven Winds of Hot Luminous Stars, XII. A First Step toward Detailed UV Line Diagnostics of O-Stars, *in print*

Pauldrach, A.W.A., Puls, J., Kudritzki, R.P., Méndez, R.H., Heap, S.R., 1988, Radiation-driven Winds of Hot Stars V. Wind Models for Central Stars of Planetary Nebulae, *A &A* **207**, 123-131

Poe, C.H., Owocki, S.P., Castor, J.I., 1990, The Steady State Solutions of Radiatively Driven Stellar Winds for a Non-Sobolev, Pure Absorption Model, *Ap. J.* **358**, 199-213

Pollock, A.M.T., 1987, New Evidence at X-Ray and COS-B γ-Ray Frequencies for Non-Thermal Phenomena in Wolf-Rayet Stars, *A &A* **171**, 135-139

Prinja, R.K., 1988, Evidence for Rotationally Modulated Variability in O Star Winds, *M.N.R.A.S.* **231**, 21p-24p

Prinja, R.K., 1992, UV P Cygni Profile Variability in O Stars, in: Nonisotropic and Variable Outflows from Stars, eds.: L. Drissen, C. Leitherer, A. Nota, ASP Conference Series

Prinja, R.K., Howarth, I.D., 1986, Narrow Absorption Components and Variability in Ultraviolet P Cygni Profiles of Early-Type Stars, *Ap. J. Suppl.* **61**, 357-418

Prinja, R.K., Howarth, I.D., 1988, Opacity Enhancements in the Stellar Wind of 68 Cygni – not 'Shells' or 'Puffs', *M.N.R.A.S.* **233**, 123-156

Prinja, R.K., Howarth, I.D., Henrichs, H.F., 1987, Ultraviolet Observation of Extensive Variability in the Stellar Wind of χ Persei, *Ap. J.* **317**, 389-411

Prinja, R.K., Balona, L.A., Bolton, C.T., Crowe, R.A., Fieldus, M.S., Fullerton, A.W., Gies, D.R., Howarth, I.D., McDavid, D., Reid, A.H.N., 1992, Time Series Observations of O Stars. I. IUE Observations of Variability in the Stellar Wind of ζ Puppis, *Ap. J.* **390**, 266-272

Puls, J., 1987, Radiation-driven Winds of Hot Luminous Stars IV. The Influence of Multi-Line Effects, *A &A* **184**, 227-248

Puls, J., 1993, Winde Heißer, Massereicher Sterne – Theoretische Ansätze und Diagnostische Methoden, Habilitation, Universität München

Puls, J., Hummer, D.G., 1988, The Sobolev Approximation for the Line Force and Line Source Function in a Spherically-Symmetrical Stellar Wind with Continuum Opacity, *A &A* **191**, 87-98

Puls, J., Owocki, S.P., Fullerton, A.W., 1993, On the Synthesis of Resonance Lines in Dynamical Models of Structured Hot-Star Winds, *A &A , in print*

Puls, J., Pauldrach, A.W.A., Kudritzki, R.P., Owocki, S.P., Najarro, F., 1993, Radiation Driven Winds of Hot Stars – Some Remarks on Stationary Models and Spectrum Synthesis in Time-Dependent Simulations, in: Reviews in Modern Astronomy 6, ed.: G. Klare, Springer-Verlag, Heidelberg, p. 271

Raymond, J.C., Cox, D.P., Smith, B.W., 1976, Radiative Cooling of a Low-Density Plasma, *Ap. J.* **204**, 290-292

Raymond, J.C., Smith, B.W., 1977, Soft X-Ray Spectrum of a Hot Plasma, *Ap. J. Suppl.* **35**, 419-439

Reale, F., Rosner, R., Malagoli, A., Peres, G., Serio, S., 1991, Numerical Simulations of Thermal Instabilities in Stratified Gases - II. Exploration of the Parameter Space, *M.N.R.A.S.* **251**, 379-390

Reile, C., 1993, Dissertation, Universität München, in Vorbereitung

Reile, C., Gehren, T., 1991, Numerical Simulation of Photospheric Convection in Solar-type Stars. I. Hydrodynamical Test Calculations, *A &A* **242**, 142-174

Richtmyer, R.D., Morton, K.W., 1967, Difference Methods for Initial-Value Problems, John Wiley & Sons, New York

Roache, P.J., 1982, Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque

Rosner, R., Tucker, W.H., Vaiana, G.S., 1978, Dynamic of the Quiescent Solar Corona, *Ap. J.* **220**, 643-665

Rózyczka, M., 1985, Two-Dimensional Models of Stellar Wind Bubbles. I. Numerical

Methods and their Application to the Investigation of Outer Shell Instabilities, *A &A* **143**, 59-71

Ruelle, D., Takens, F., 1971, On the Nature of Turbulence, *Comm. Math. Phys.* **20**, 167-192

Rybicki, G.B., Hummer, D.G., 1978, A Generalization of the Sobolev Method for Flows with Nonlocal Radiative Coupling, *Ap. J.* **219**, 654-675

Rybicki, G.B., Owocki, S.P., Castor, J.I., 1990, Instabilities in Line-Driven Stellar Winds. IV. Linear Perturbations in Three Dimensions, *Ap. J.* **349**, 274-285

Sagdeev, R.Z., Kennel, C.F., 1991, Collisionless Shock Waves, *Scientific American*, April 1991, 40-47

Schulz, W.D., 1964, Tensor Artificial Viscosity for Numerical Hydrodynamics, *J. Math. Phys.* **5**, 133-138

Schuster, A., 1905, Radiation through a Foggy Atmosphere, *Ap. J.* **21**, 1-22

Schuster, H.G., 1989, Deterministic Chaos, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim

Scuderi, S., Panagia, N., 1992, Hα Observations of Early-Type Stars, *Ap. J.* **392**, 201-208

Serrin, J., 1959, Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics, in: Handbuch der Physik, Vol. VIII/1: Strömungsmechanik I, ed. S. Flügge, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 125-263

Seward, F.D., Forman, W.R., Giacconi, R., Griffiths, R.E., Harnden, F.R., Jones, C., Pye, J.P., 1979, X-Rays from Eta Carinae and the Surrounding Nebula, *Ap. J.* **234**, L55-L58

Simon, M., Axford, W.I., 1966, Shock Waves in the Interplanetary Medium, *Planet. Space Sci.* **14**, 901-908

Smirnov, W.I., 1989, Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Lehrgang der höheren Mathematik Teil IV/2, VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin

Snow, T.P., 1977, Long-Term Changes in Ultraviolet P Cygni Profiles Observed with *COPERNICUS*, *Ap. J.* **217**, 760-770

Sobolev, V.V., 1957, *Soviet Astr. J.* **1**, 678

Sobolev, V.V., 1960, Moving Envelopes of Stars, Harvard University Press, Cambridge

Sod, G.A., 1978, A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, *J. Comp. Phys.* **27**, 1-31

Sommerfeld, A., 1948, Mechanik der Deformierbaren Medien, Vorlesungen über Theoretische Physik Band II, Harri Deutsch (Reprint, 1978), Frankfurt M.

Sonett, C.P., Colburn, D.S., 1965, The Si+Si− Pair and Interplanetary Forward-Reverse Shock Ensembles, *Planet. Space Sci.* **13**, 675-692

Spitzer, L., 1962, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York

Springmann, U., 1991, Diplomarbeit, Universität München

Springmann, U.W.E., Pauldrach, A.W.A., 1992, Radiation Driven Winds of Hot Luminous Stars, XI. Frictional Heating in a Multicomponent Stellar Wind Plasma and Decoupling of Radiatively Accelerated Ions, *A &A* **262**, 515-522

Steger, J.L., Warming, R.F., 1981, Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods, *J. Comp. Phys.* **40**, 263-293

Stone, J.M., Mihalas, D., Norman, M.L., 1992, Zeus-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. III. The Radiation Hydrodynamic Algorithms and Tests, *Ap. J. Suppl.* **80**, 819-845

Stone, J.M., Norman, M.L., 1992a, Zeus-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. I. The Hydrodynamic Algorithms and Tests, *Ap. J. Suppl.* **80**, 753-790

Stone, J.M., Norman, M.L., 1992b, Zeus-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II. The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests, *Ap. J. Suppl.* **80**, 791-818

Sturrock, P.A., 1958, *Phys. Rev.* **112**, 1488

Sturrock, P.A., Spreiter, J.R., 1965, Shock Waves in the Solar Wind and Geomagnetic Storms, *J. Geophys. Res.* **70**, 5345-5351

Takens, F., 1981, Lecture Notes in Math. 898, Springer, Heidelberg

Thompson, K.W., 1987, Time-Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, *J. Comp. Phys.* **68**, 1-24

Thompson, K.W., 1990, Time-Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, II, *J. Comp. Phys.* **89**, 439-461

Trulio, J.F., Trigger, K.R., 1961, *unpublished*

Twiss, R.Q., 1951, On Oscillations in Electron Streams, *Proc. Phys. Soc.* LXIV, 654-665

Ulmschneider, P., Kalkofen, W., Nowak, T., Bohn, U., 1977, Acoustic Waves in the Solar Atmosphere I, The Hydrodynamic Code, *A &A* **54**, 61-70

Van Leer, B., 1977, Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection, *J. Comp. Phys.* **23**, 276-299

Van Leer, B., 1982, Flux-Vector Splitting for the Euler Equations, in: Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, ed.: E. Krause, Lecture Notes in Physics 170, Springer-Verlag, Heidelberg

Van Leer, B., 1990, Splitting of Inviscid Fluxes for Real Gases, *J. Comp. Phys.* **87**, 1-24

von Neumann, J., Richtmyer, R.D., 1950, A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks, *J. Applied Physics* **21**, 232-257

Walborn, N.R., Panek, R.J., 1984, Ultraviolet Spectral Morphology of the O-Stars: The Remarkable Luminosity Dependence of the Si IV Stellar Wind Effect, *Ap. J.* **280**, L27-L30

Waldron, W.L., 1984, Recombination Stellar Wind Model for the Coronae of Early-Type Stars, *Ap. J.* **282**, 256-266

Waldron, W.L., 1991, Direct Evidence for Stellar Wind X-Ray Absorption in O Stars, *Ap. J.* **382**, 603-605

Waldron, W.L., Klein, L., Altner, B., 1992, Time Evolution of Solitary Density Waves in the Stellar Winds of Early-Type Stars: A Simple Explanation of DAC Behavior, in: Nonisotropic and Variable Outflows from Stars, eds.: L. Drissen, C. Leitherer, A. Nota, ASP Conference Series

Waldron, W.L., Klein, L., Altner, B., 1993, Evolution of Solitary Density Waves in Stellar Winds of Early-Type Stars: A Simple Explanation of DAC Behavior, *preprint*

Weaver, R., McCray, R., Castor, J., Shapiro, P., Moore, R., 1977, Interstellar Bubbles. II. Structure and Evolution, *Ap. J.* **218**, 377-395

White, R.L., 1985, Synchrotron Emission from Chaotic Stellar Winds, *Ap. J.* **289**, 698-708
White, R.L., Chen, W., 1992a, π^0-Decay Gamma-Ray Emission from Winds of Massive Stars, *Ap. J.* **387**, L81-L84
White, R.L., Chen, W., 1992b, Non-Thermal Emissions from Hot Stars, in: Nonisotropic and Variable Outflows from Stars, eds.: L. Drissen, C. Leitherer, A. Nota, ASP Conference Series
White, R.L., Long, K.S., 1986, X-Ray Emission from Wolf-Rayet Stars, *Ap. J.* **310**, 832-837
Winkler, K.-H.A., 1976, Über ein Numerisches Verfahren zur Berechnung Instationärer Sphärischer Stoßfronten mit Strahlung, Dissertation, Universität Göttingen, Max-Planck-Institut Preprint MPI-PAE/Astro 90, Garching
Winkler, K.-H.A., Norman, M.L., 1986, WH80s: Numerical Radiation Hydrodynamics, in: Astrophysical Radiation Hydrodynamics, eds.: K.-H.A. Winkler and M.L. Norman, Reidel, Dordrecht, pp. 71-139
Winkler, K.-H.A., Norman, M.L., Newman, M.J., 1983, Adaptive Mesh Techniques for Fronts in Star Formation, Max-Planck-Institut Preprint, Garching
Wolfire, M.G., Waldron, W.L., Cassinelli, J.P., 1985, Comment on the IRAS Infrared Spectrum of Zeta Puppis (O4 If), *A &A* **142**, L25-L28
Woodward, R.P., Colella, P., 1984, The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks, *J. Comp. Phys.* **54**, 115-173
Wright, A.E., Barlow, M.J., 1975, The Radio and Infrared Spectrum of Early Type Stars Undergoing Mass-Loss, *M.N.R.A.S.* **170**, 41-51
Zanstra, H. 1955, On the Formation of Condensations in a Gaseous Nebula, in: Vistas in Astronomy 1, ed.: A. Beer, Pergamon Press, New York, pp. 256-268
Zeldovich, Ya.B., Raizer, Yu.P., 1966, Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, Vol. I, Academic Press, New York
Zeldovich, Ya.B., Raizer, Yu.P., 1967, Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, Vol. II, Academic Press, New York

Danksagung

Herrn Prof. Dr. R.-P. Kudritzki danke ich für die Aufgabenstellung dieser Arbeit, das stetige Interesse am Fortgang derselben sowie deren Förderung durch ein zweijähriges Stipendium des Max-Planck-Instituts für Astrophysik in Garching. Besonderer Dank gilt ihm auch für seine mit großer Beharrlichkeit an mich gerichtete Aufforderung, die Energiegleichung zu berücksichtigen.

Herrn Priv. Doz. Dr. A. W. A. Pauldrach danke ich ebenfalls für die Anregung der hier behandelten Themenstellung sowie für die finanzielle Förderung dieser Arbeit im Rahmen seines DFG-Forschungsprojektes – dies um so mehr, als er sicherlich kein Verfechter der extrem zeitabhängigen Winde ist, wie sie in dieser Arbeit behandelt werden.

Herrn Dr. J. Puls danke ich für zahlreiche, oftmals frühmorgendliche Diskussionen – und das hiermit schon zum Ausdruck gebrachte Interesse an zeitabhängigen Winden, aus dem sich inzwischen eine anregende Zusammenarbeit entwickelt hat.

Herrn C. Reile sei gedankt für viele Diskussionen über (numerische) Hydrodynamik. Seine über die Jahre gewonnene Erfahrung auf diesem Gebiet haben erst den problemlosen Einstieg in die hier behandelte Thematik ermöglicht.

Indem ich mit den drei letztgenannten ein Büro teilte, sei ihnen hier gemeinschaftlich gedankt für die unnachahmliche Atmosphäre in diesem, die, wie chaotisch es auch immer hergehen mochte – drei gleichzeitige Diskussionen im Raum waren keine Seltenheit –, doch immer von großem Unterhaltungswert war.

Den Herren U. Springmann und S. Haser sei gedankt für viele Diskussionen und Gespräche.

Für das Korrekturlesen vorliegender Arbeit geht mein Dank an Prof. Kudritzki („Enten fliegen in Formation, aber es gibt keine Linienformation"), Dr. Puls (der mir in den hektischen Tagen vor der Abgabe zur Seite stand) und Frau B. Klonowski (für das anstrengende grammatikalische Korrekturlesen).

Schließlich bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. S. P. Owocki in Newark, Delaware (USA) für die freundliche und kollegiale Aufnahme in einem Arbeitsgebiet, dessen Entwicklung er maßgeblich mitgeprägt hat.

Lebenslauf

Name	Achim Heinz Georg Feldmeier
Geboren am	12.1.60
in	Krefeld
Eltern	Franz Feldmeier, geb. 3.12.46
	Beruf: techn. Angestellter
	Renate Feldmeier, geb. 2.1.37
	Beruf: Hausfrau
Familienstand	ledig

Berufsausbildung

1966-68	Grundschule Krefeld
1968-69	Grundschule Murnau
1969-72	Hauptschule Peiting
1972-76	Realschule Schongau
1976-78	Fachoberschule Weilheim
1978-79	Fachhochschule München, Vorprüfung in techn. Physik
1979-80	Bundeswehr (15 Monate)
1980-87	Studium der Physik an der Universität München mit Abschluß Diplom, Diplomarbeit bei Prof. H. Salecker
1987/88	Zivildienst (5 Monate)
1988-90	Wissenschaftliche Hilfskraft an der LMU, Arbeit am Lehrstuhl Prof. Salecker
seit Juni 1990	an der Universitätssternwarte München