

Übungsaufgaben zur theoretischen Mechanik²

20 Punkte

1. Teilchenschwarm im Phasenraum

5 Punkte

Bei $t = 0$ soll der Zustand einer Punktmasse m im Bereich $[0, 1] \times [0, 1]$ des qp -Phasenraums liegen. Was ist aus diesem Quadrat von Anfangszuständen bei $t = 1$ geworden, (a) bei kräftefreier Bewegung und (b) bei freiem vertikalen Fall? Bitte zeichnen Sie dies für $m = g = 1$ und für Längeneinheit = Zeiteinheit.

2. Satz von Liouville für spezielle Fälle

6 Punkte

- Zeigen Sie, dass das Phasenraumvolumen beim schiefen Stoß eines Teilchens mit der Wand erhalten bleibt!
- Zeigen Sie, dass das Phasenraumvolumen beim harmonischen Oszillator erhalten bleibt!

3. Liouville'scher Satz und vertikaler freier Fall

5 Punkte

Gegeben sei die Bewegung im homogenen Gravitationsfeld. Betrachten Sie die Bewegung einer Teilchenschar im Phasenraum. Zeichnen Sie dazu mehrere Phasenraum-bahnen in das Phasenraumdiagramm, die sich um z_0 unterscheiden. Betrachten Sie eine Fläche, die durch zwei Wurzelkurvenssegmente und zwei Geradenstücke $\dot{z} = \text{const}$ berandet ist.

Wie entwickelt sich diese Fläche im Lauf der Zeit beim freien Fall? Sie bleibt nach dem Satz von Liouville konstant! Zeigen Sie das für das gegebene Beispiel!

4. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

4 Punkte

Der eindimensionale harmonische Oszillator besitzt die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (1)$$

- Bestimmen Sie $q(t)$ und $p(t)$ explizit als Funktion von $q(0)$ und $p(0)$.
- Fassen Sie die Abbildung

$$(q, p) = (q(t), p(t)) \rightarrow (Q, P) = (q(0), p(0)) \quad (2)$$

als kanonische Transformation auf. Konstruieren Sie eine Funktion $F_2(q, P)$, die diese Transformation erzeugt.

Hinweis: Drücken Sie zunächst Q und p als Funktion von q und P aus.

¹udo.schwarz@uni-potsdam.de

²<http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/2020SSMechanik.html>
<http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/>