# Übungsblatt 6

**(Ausgabe 22.06.2009, Abgabe 02.07.2009)**

**1. Aufgabe** *Neutronenstern* (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie näherungsweise den Radius eines Neutronensterns mit $M = 1.4\,\mathrm{M}_\odot$ unter der Annahme, er bestünde nur aus Neutronen der Masse $m_\mathrm{n} = 1.675 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, die sich wie ein entartetes nichtrelativistisches Fermi-Gas verhalten. Der Druck eines vollständig entarteten Fermi-Gases ist, ähnlich wie beim idealen Gas, gegeben durch

$$P_\mathrm{f} = \frac{2}{3} N \bar{E} = \frac{2}{5} N E_\mathrm{f} \tag{1}$$

$$\text{mit der Fermi-Energie } E_\mathrm{f} = \frac{\hbar^2}{2m_\mathrm{n}} (3\pi^2 N)^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

$$\text{und der Neutronenanzahldichte } N = \frac{\varrho}{m_\mathrm{n}}. \tag{3}$$

mit konstanter Dichte $\varrho = \dfrac{3}{4}\dfrac{M}{\pi R^3}$. Durch Gleichsetzen von $P_\mathrm{f}$ mit dem effektiven Druck in einer homogenen Kugel ($\varrho =$ const., s. Aufgabe b):

$$P_\mathrm{g} = \frac{3}{20} \frac{GM^2}{\pi R^4} \tag{4}$$

erhält man eine Abschätzung für $R$. Berechnen Sie auch die entsprechende Dichte $\varrho$ und interpretieren Sie den Wert. Wie skaliert $R$ mit $M$? (4 Punkte)

(b) Leiten Sie Gleichung (4) her. Verwenden Sie dafür das Gravitationspotenzial einer Kugel mit Radius $R$:

$$V_\mathrm{g} = -\int_0^R \frac{GM(r)}{r} dm = -\int_0^R \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho \left(\frac{G}{r}\right) 4\pi r^2 \varrho dr \tag{5}$$

mit einer konstanten Dichte $\varrho$. Bei radialer Expansion ändert sich $R$ um $dR$, sodass das Gas eine Arbeit

$$dW = PdV = 4\pi P R^2 dR \tag{6}$$

gegen das Gravitationsfeld leistet. Daher gilt $dW = -dV_\mathrm{g}$. Aus dieser Relation erhält man den effektiven Druck $P_\mathrm{g}$, welcher die Arbeit gegen das Gravitationsfeld beschreibt. (2 Punkte)

(c) Wie groß wäre die Rotationsfrequenz der Sonne, wenn sie unter Drehimpulserhaltung zu einem Neutronenstern von 10 km Radius zusammenfiele? Die Sonne hat eine Rotationsperiode von 27 Tagen; es soll starre Rotation und homologe Kontraktion angenommen werden.
Welche maximale Rotationsfrequenz könnte ein solcher Neutronenstern haben, ohne durch die Zentrifugalkraft am Äquator Masse zu verlieren? (2 Punkte)

(d) Neben dem Drehimpuls ist auch der Magnetische Fluss

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{7}$$

eine Erhaltungsgröße. Nehmen Sie also an, dass die Sonne ($B \approx 10^{-4}\,\mathrm{T}$) zu einem Neutronenstern mit $R = 10\,\mathrm{km}$ kollabieren könnte. Wie groß wäre in etwa das Magnetfeld des entstandenen Neutronensterns an der Oberfläche? (2 Punkte)

**2. Zusatzaufgabe** *Chemische Komposition von Wolf-Rayet-Sternen* (+2 Punkte)
Wolf-Rayet-Sterne sind massereiche Sterne in einem späten Entwicklungsstadium, die durch strahlungsgetriebene Sternwinde ihre äußeren Hüllen mit prozessierten Material abstoßen und so das Interstellare Medium (ISM) und auch das Intergalaktische Medium (IGM) chemisch anreichern. Berechnen Sie die chemische Komposition der Winde eines WN-Sterns in der Milchstraße und in der Großen Magellanschen Wolke (Large Magellanic Cloud, LMC) als Massenbruchteil!

1. Annahme: WN-Sterne haben ihre wasserstoffreichen Hüllen bereits in frühren Entwicklungsstadien abgeworfen, an der Sternoberfläche liegt jetzt eine Schale, die den CNO-Zyklus durchlaufen hat.
2. Annahme: Im CNO-Zyklus wird aller Wasserstoff (H) in Helium (He) umgewandelt, zwischen dem bereits vorhanden Kohlenstoff (C), Stickstoff (N) und Sauerstoff (O) bildet sich ein neues Gleichgewichtsverhältnis von C:N:O = 1:60:1.

Die chemische Komposition des Sternes vor den Kernfusionen entspricht der des umgebenden ISM bzw. in der Sonnenumgebung der der Sonnenoberfläche. Chemische Häufigkeiten werden in spektrospopischen Arbeiten manchmal gegeben als

$$C = 12 + \log \frac{N_\mathrm{C}}{N_\mathrm{H}} \tag{8}$$

dabei Sind $N_\mathrm{C}$ und $N_\mathrm{H}$ Teilchenzahlen. Die Gleichung ist analog für N und O. Die Massenbruchteile vom Wasserstoff betragen 0.74 für die Sonnenumgebung und 0.75 für das ISM der LMC.

| Element | Sonne | LMC ISM |
|---|---|---|
| C | 8.39 | 7.81 |
| N | 7.78 | 6.92 |
| O | 8.66 | 8.37 |