

Übungsblatt 5

(Ausgabe 19.06.2015, Abgabe 02.07.2015)

1. Aufgabe Masse-Leuchtkraft-Relation (45 Punkte)

Mithilfe einiger Näherungen soll die empirisch gefundene Masse-Leuchtkraft-Relation $L \sim M^k$ plausibel gemacht werden.

- (a) Finden Sie zunächst eine Relation der Form $L \sim f(R, T, \varrho)$ unter Verwendung der Gleichung für den radiativen Temperaturgradienten

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{64\pi\sigma_S} \frac{\kappa\varrho(r)}{r^2 T^3(r)} L(r), \quad (1)$$

mit der mittleren Rosseland-Opazität κ und der Schalenleuchtkraft $L(r)$. Nehmen Sie ein konstantes κ und einen linearen Temperaturverlauf an. Für die Herleitung, verwenden Sie die Temperatur im Zentrum des Sternes T_C . Werten Sie Gl. (1) an der Stelle $r = R/2$. Man definiere: $T(R/2) := T$, $L(R/2) = L(R) := L$, und $\rho(R/2) := \rho$. Drücken Sie schließlich T_C durch T aus und schreiben Sie Ihr Ergebniss als eine Proportionalitätsrelation. Warum darf man $L(R/2) = L(R)$ annehmen? (15 Punkte)

- (b) Ersetzen Sie nun T durch P , wobei $P := P(R/2)$. Nutzen Sie hierfür die allgemeine Gasgleichung. (10 Punkte)
- (c) Mithilfe der hydrostatischen Gleichung

$$\frac{dP}{dr} = -g \cdot \varrho \quad (2)$$

kann nun P eliminiert werden. Verwenden Sie dafür ähnliche Näherungen wie in (1a). Nähen Sie ferner $M(R/2) \approx M(R) := M$. Warum ist diese Näherung plausibel? (10 Punkte)

- (d) Ersetzen Sie jetzt ϱ durch einen geeigneten Mittelwert $\bar{\varrho}$, so erhalten Sie die gesuchte Masse-Leuchtkraft-Relation. Vergleichen Sie diese auch mit der empirisch gefundenen. (10 Punkt)

2. Aufgabe Eddington-Limit (35 Punkte)

Angenommen, die äußere Schicht eines Sternes besteht aus ionisiertem Wasserstoff und die Opazität dieser Schicht wird durch Elektronenstreuung (Thomsonquerschnitt σ_e) verursacht. Die resultierende Kraft durch den Strahlungsdruck ist dann gegeben durch

$$F_{\text{rad}} = \frac{L\sigma_e}{4\pi R^2 c}. \quad (3)$$

Dem wirkt die Gravitationskraft entgegen, die das Wasserstoff-Plasma in Richtung des Massenzentrums beschleunigt. Ist die Strahlungskraft größer als die Gravitationskraft, so ist der Stern instabil (Eddington-Limit).

- (a) Drücken Sie das Verhältnis

$$\Gamma_e := \frac{g_{\text{rad}}}{g} = \frac{F_{\text{rad}}}{F_G} \quad (4)$$

in Einheiten von $L_\odot$ und $M_\odot$ aus. (10 Punkte)

- (b) Was ist gemäß dem Eddington-Limit die maximale Masse für stabile Hauptreihensterne, falls die Masse-Leuchtkraft Relation dort gültig bleibt? (15 Punkte)
- (c) Drücken Sie nun Γ_e mithilfe von T_{eff} und g anstelle von $L_\odot$ von $M_\odot$ aus. Wie sieht das durch diese Bedingung gegebene Eddington-Limit im $\log g$ - $\log T_{\text{eff}}$ -Diagramm aus? (10 Punkte)

3. Aufgabe *Masse-Lebensdauer-Relation* (20 Punkte)

Die Lebensdauer von Hauptreihensternen wird durch die nukleare Zeitskala bestimmt. Entwickeln sie unter Verwendung der Masse-Leuchtkraft-Relation eine Abschätzung für die Lebensdauer von Hauptreihensternen in Abhängigkeit von ihrer Anfangsmasse M in $M_\odot$. Während des Hauptreihenstadiums wird nur etwa 10 % des stellaren Wasserstoffs in Helium umgesetzt.

Wie lange leben demzufolge Sterne von 0.1, 10, 20, 50, 100 $M_\odot$?