

Übungsblatt 2.4

(Ausgabe 22.05.2015, Abgabe 3.06.2015)

1. Aufgabe Adaptive Optik (AO) (50 Punkte)

Das Seeing hängt von der Beobachtungswellenlänge λ und dem sogenannten Fried-Parameter r_0 ab, der eine charakteristische Größe der Turbulenzzellen über dem Teleskop darstellt. Es gilt $r_0 \sim \lambda^{6/5}$ und, für die seeingbegrenzte Halbwertsbreite einer Punktquelle, $\text{FWHM}_S = \lambda/r_0$. Die Halbwertsbreite entspricht dem Auflösungsvermögen des Teleskopes.

- Der Seeingmonitor misst ein Seeing von $\text{FWHM}_S = 0.8''$ bei $\lambda_1 = 0.5 \mu\text{m}$. Wie groß wird dann das seeingbegrenzte Auflösungsvermögen an einem 8m-Teleskop bei $\lambda_2 = 2.2 \mu\text{m}$ sein? Wie groß ist das beugungsbegrenzte Auflösungsvermögen an diesem Teleskop? Ist das 8m-Teleskop also seeing-begrenzt oder beugungsbegrenzt? (15 Punkte)
- Beantworten Sie die letzte Frage auch für den Fall, dass die Beobachtung an einem 50cm-Teleskop bei $\lambda_2 = 2.2 \mu\text{m}$ durchgeführt wird. (15 Punkte)
- Der Seeingmonitor misst nun ein Seeing von $\text{FWHM}_S = 0.5''$. Ohne Adaptive Optik schafft das 8m-Teleskop bei $\lambda_2 = 2.2 \mu\text{m}$ Punktquellen mit Helligkeiten bis zu $m_{\text{max}} = 22$ mag bei realistischen Belichtungszeiten und vernünftigen relativen Fehlern zu detektieren. Bis zu welcher Helligkeit $m_{\text{max,AO}}$ könnte das Teleskop eine Punktquelle nachweisen, wenn eine Adaptive Optik mit einer Performance¹ von $S = 0.5$ eingesetzt wird? (20 Punkte)

Hinweis: Man betrachte hierfür die kleinstmögliche Detektorpixelgröße p ($[p] = \text{Längeneinheit}$), die an die Auflösung des Systems angepasst ist. Ohne AO wird die Bildgröße der Punktquelle durch das Seeing festgelegt und benötigt daher eine entsprechende Pixelgröße p_S . Da die Bildgröße mit AO durch die Beugungsgrenze bestimmt wird, kann nun die Pixelgröße p_{AO} kleiner gemacht werden. Während der gemessene Fluss der Quelle mit AO und ohne AO gleich bleibt, wird aufgrund der kleineren Pixelfläche weniger Hintergrund in der Quelle mitgemessen. Da $\sigma \propto \sqrt{p^2} = p$, ist der Gewinn für das Signal in guter Näherung: $G = S \times p_S / p_{\text{AO}}$. Der Gewinn verrät uns das effektive Verhältnis zwischen dem kleinsten Fluss, den wir ohne AO messen können, zu dem kleinsten Fluss, den wir mit AO messen können.

2. Aufgabe Atmosphärische Refraktion (50 Punkte)

Die scheinbare Zenitdistanz δ_{schein} eines Himmelskörpers weicht wegen der *atmosphärischen Refraktion* von seiner wahren Zenitdistanz δ_{wahr} ab.

Die Dichte ρ der Atmosphäre hängt vom Abstand h zur Erdoberfläche ab und führt dadurch zu einem höhenabhängigen atmosphärischen Brechungsindex $n(h)$ gemäß folgender Näherungsformel:

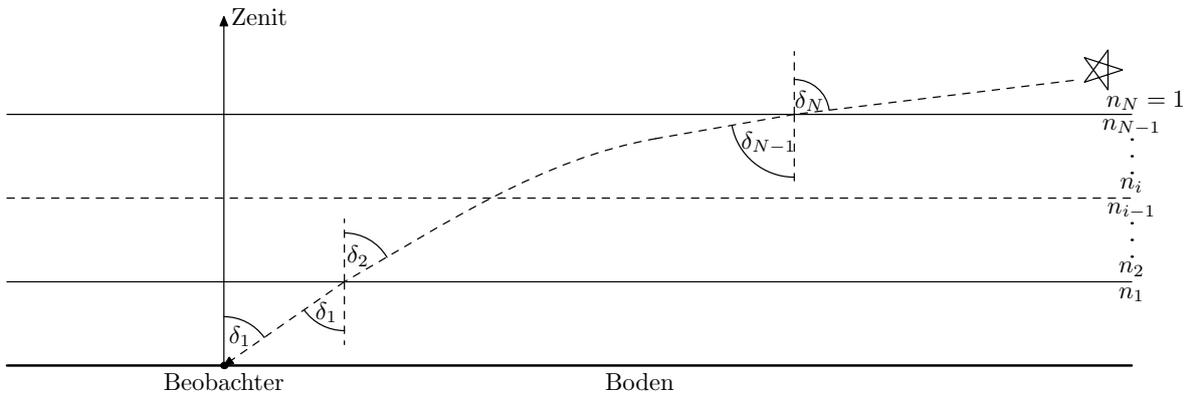
$$n(h) - 1 \propto \rho(h) \quad (1)$$

Der Brechungsindex hängt ferner von der Wellenlängen λ ab. Bei dieser Aufgabe betrachten wir aber nur die Wellenlänge $\lambda = 580 \text{ nm}$. Bei der Temperatur $T_0 = 273 \text{ K}$ und dem Druck $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ ist der Brechungsindex $n_0 = 1.000293$.

Mit $R = \delta_{\text{wahr}} - \delta_{\text{schein}}$ bezeichnet man die Abweichung zwischen den wahren und gemessenen Werten der Zenitdistanz. Um R näherungsweise abschätzen zu können, betrachtet man ein planparalleles Modell der Atmosphärenschichtung. Bei diesem Modell liegen die Schichten verschiedener Dichten parallel zum Boden mit jeweiligem Brechungsindex n_i (siehe Abbildung). Der Brechungsindex des freien Weltraums (N te Schicht) sei n_N . Der Brechungsindex der erdbodennächsten

¹ S , der sog. Strehlwert, ist das Verhältnis zwischen der gemessenen beugungsbegrenzte Peakintensität I_{beugung} zu der "idealen", wahren Peakintensität I_{ideal} , die Man mit idealer Optik messen würde, also $S = I_{\text{beugung}}/I_{\text{ideal}}$.

Schicht sei n_i . Es gilt natürlich $n_N = 1$. Die Einfallswinkel relativ zur Schichtnormalen werden jeweils mit δ_i bezeichnet, wobei $\delta_1 = \delta_{\text{schein}}$ und $\delta_N = \delta_{\text{wahr}}$.



Wieder machen Sie einen Ausflug, um Sterne zu beobachten. Nun aber ist Ihr Ziel, R zu messen. Sie messen die lokalen Werte der Temperatur und des Drucks: $T = 257 \text{ K}$, $p = 102.5 \text{ kPa}$.

- a) Wie hängen die Brechungsindizes n_i und n_{i-1} zweier benachbarten Schichten mit den Einfallswinkeln (relativ zur Schichtnormalen) δ_i und δ_{i-1} zusammen? Wie lautet also der Zusammenhang zwischen n_1 , δ_1 , δ_N ? (15 Punkte)
Hinweis: Snelliussches Gesetz.
- b) Drücken Sie nun R mittels δ_1 und n_1 aus. Zeigen Sie ferner, dass wenn $R \ll 1$, gilt $R \propto n_1 - 1$. (20 Punkte)
- c) Sie messen: $\delta_1 = 80^\circ$. Wie groß ist R ? Berechnen Sie zunächst n_1 unter der Annahme, die Atmosphäre sei ein ideales Gas. (15 Punkte)

3. Aufgabe (Zusatzaufgabe) Sonnenneutrinoproblem (25 Zusatzpunkte)

Das *Homestake-Experiment* zur Messung des ν_e -Flusses der Sonne hat einen um den Faktor $1/3$ zu kleinen Fluss gemessen. Es wurden verschiedene Lösungen dieses Sonnenneutrinoproblems vorgeschlagen. Untersuchen Sie den folgenden Ansatz: Neutrinos haben (abweichend vom Standardmodell) eine Ruhemasse, und die entsprechenden Masseneigenzustände ν_1, ν_2, ν_3 sind nicht genau identisch mit den Eigenzuständen ν_e, ν_μ, ν_τ . Vielmehr sind sie über eine Mischungsmatrix U gekoppelt. Nehmen wir vereinfachend an, es gäbe nur zwei Neutrino-Flavours, dann kann U mithilfe eines Mischungswinkels θ parametrisiert werden, so dass

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- a) Wie schreiben sich dann jeweils die Zustände $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ als Mischungen von $|\nu_e\rangle$ und $|\nu_\mu\rangle$? (5 Punkte)
- b) Ein anfänglich reiner $|\nu_e\rangle$ -Zustand, wie er beim β -Zerfall von ${}^8\text{B}$ in der Sonne entsteht, entwickle sich entsprechend der Schrödingergl. mit der Zeit, wobei gilt:

$$|\nu_{1,2}(t)\rangle = |\nu_{1,2}\rangle e^{-iE_{1,2}t/\hbar} \tag{3}$$

mit den Energien E_1, E_2 für die Masseneigenzustände $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$. Wie sieht also $|\nu_e(t)\rangle$ als Überlagerung der Masseneigenzustände gemäß Gl. (3) und Aufgabe (3a) aus? Wie groß ist demzufolge die Wahrscheinlichkeit, dass $|\nu_e\rangle$ nach der Zeit t wieder als $|\nu_e\rangle$ vorliegt, also

$$P(\nu_e(t) \rightarrow \nu_e) = |\langle \nu_e | \nu_e(t) \rangle|^2 \tag{4}$$

Hinweis: die Antwort lautet:

$$P(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} t \right) \quad (5)$$

Sie werden aber den vollständigen Weg zum Ergebniss zeigen müssen. (10 Punkte)

- c) Da die Neutrinomassen sehr klein sind ($m_\nu c^2 \ll E$), so dass $E_1 \approx E_2 = E$, kann man eine relativistische Näherung benutzen:

$$E_1 - E_2 = \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1 + E_2} \approx \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{2E} = \frac{\Delta m^2 c^4}{2E} \quad (6)$$

Was ist die Zeitperiode T der in der letzten Aufgabe berechneten Wahrscheinlichkeit, ausgedrückt durch die Massendifferenz Δm und Energie E ? Wie lautet dann die Oszillationslänge L , die ein Neutrino in dieser Zeit zurücklegt ($v_{\text{Neutrino}} \approx c$)? Wie groß ist L für eine typische ν -Energie von 1 MeV und einem angenommenen Massendifferenz $\Delta m c^2$ von von 1 eV? Wie würde dies das Sonnenneutrinoproblem lösen? (10 Punkte)