Lag I Zwänge: geometrisch

$g(x, y, z) = 0$

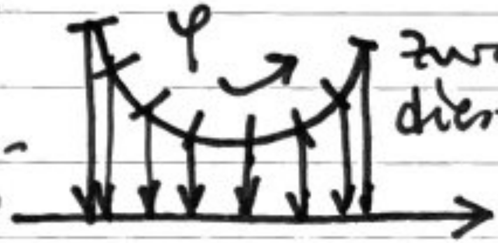
z.B. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

Lag I mit q_i: später

jetzt kartesisch

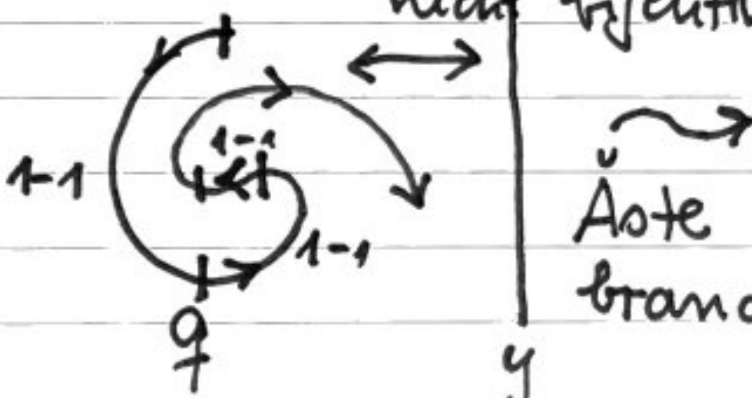
aber jeder Zwang (wenn nicht doof simpel wie $y=0$) macht doch nichtkartesische Bahn

Lag.:



nicht bijektiv

aber:

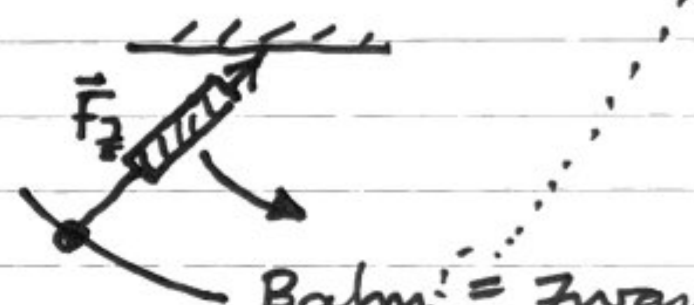


Riemann < Blätter / sheets

①

beschreibe komplizierte (und nur mit q_i einfache) Bahn stückweise kartesisch

Idee: $\boxed{\vec{F}_Z = \lambda \nabla g}$ Führungs-Kraft



$\vec{\delta r}_{Bahn} \cdot \vec{F}_{Zwang} \stackrel{!}{=} 0$

Verallgemeinert als PdvA:

$(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}) \cdot \vec{\delta r} = \vec{F}_z \cdot \vec{\delta r} = 0$

PdvA: $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (m_i \ddot{x}_i - F_i)\,\delta x_i = 0} \quad (1)$$

hier stecken die Zwänge, nämlich in der echten Bahn

$\delta r_i \equiv$ virtuelle Verrückung

$$0 = \delta g_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}\,\delta x_i$$

echte Bahn

Mathe

Lagrange $$\boxed{0 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}\,\delta x_i} \quad (2)$$

(2) in (1)

$$\boxed{0 = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i - m\ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right) \cdot \delta x_i} \quad (3)$$

2 Schritte für $\left\langle \begin{matrix}\text{abh.}\\ \text{unabh.}\end{matrix} \right\rangle$ Koordinaten

die auf dieselben Glgen führen, also $\langle\ \rangle$ gar nicht nötig

1. Schritt. Es gibt $n-m$ unabhängige Koordinaten, also auch eine Wahl $\underbrace{x_1,\dots,x_m}_{m \text{ abhängige}},\ \underbrace{x_{m+1},\dots,x_n}_{(n-m) \text{ unabhängige}}$

Betrachte die abhängigen zuerst

TRICK: wähle die $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ so dass ... Wunschkontext

Die λ_1 bis λ_m werden so gewählt, dass für $x_1, \dots, x_m$ individuell gilt

$$0 = F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \lambda_k \quad (3)$$

für $i = 1, \dots, m$

Das geht, weil setze

$b_i = F_i - m_i \ddot{x}_i$

$A_{ki} = \partial g_k / \partial x_i$

~~Damit löst sich (3)~~ Wir fordern also

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_{ki} = b_i \text{ für } i = 1, \dots, m$$

ist lineares Glg.system mit Vektoren/Tupeln $\lambda_k = \lambda_1, \dots, \lambda_m$

$b_i = b_1, \dots, b_m$

A_{ki} ist quadratische Matrix

alle Zwänge $g_1, \dots, g_m$ — nur abhängige Koord. $x_1, \dots, x_m$

$\overleftrightarrow{A} \cdot \vec{\lambda} = \vec{b}$

quadr.

Mathe: ist lösbar nach $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, indem man A^{-1} findet

$$\vec{\lambda} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Jah, geht wenn $\det A \neq 0$

Ja, A ist invertierbar, denn

$A \overset{!}{=} (\partial g_k / \partial x_i)$

$\det \neq 0 \Leftrightarrow$ Zeilen oder Spalten sind lin. unabhängig

Die Zwänge $g_1, \ldots, g_m$ sind unabhängig, nur die $x_1, \ldots, x_m$ sind abhängig.

Wenn die Zwänge g_k unabh. sind, dann sind ihre Gradienten $\partial g_k / \partial x_i$ linear unabhängig

Achtung: in jeder der m Gleichungen $(i = 1, \ldots, m)$

$$F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}$$

stehen alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$

Schritt 2 Jetzt $x_{m+1}, \ldots, x_n$. (4)

Diese sind per Wahl unabhängig, also sind die $\delta x_{m+1}, \ldots, \delta x_n$ linear unabhängig

$$\sum_i \alpha_i x_i = 0 \leftrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$$

$\in$ VR.

bei uns

vorhin bestimmt

$$0 = \sum_{i=m+1}^{n} \left(F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right) \delta x_i$$

jetzt bestimmt

also müssen wegen lin. unabh. $x_{m+1} - x_n$ die Klammern $(F_i - \ldots)$ individuell verschwinden

Zusammenfassung:

1. Schritt $F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0$

für $i = 1, \ldots, m$
durch Wahl der $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$

2. Schritt $F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0$

für $i = m+1, \ldots, n$:
durch Wahl $x_{m+1}, \ldots, x_n$ als unabhängig

Also, da dieselben Gleichungen entstehen bei Schritt 1 und 2, interessiert diese Schrittaufteilung von nun an nicht weiter:

Lagrangegleichungen 1. Art

$$\boxed{\begin{aligned} & F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \\ & \qquad\qquad i = 1, \ldots, n \\ & g_1(x_i) = \cdots = g_m(x_i) = 0 \end{aligned}}$$

sind $m+n$ Gleichungen
für $x_1, \ldots, x_n$
und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$
also $m+n$ Unbekannte

Lag I für verallg. Koord. q_i

PdkW

$$0 = \delta S = \delta \int dt\, L = \int dt \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \right) \delta q_i$$

Zwänge $g_k = 0$, $k = 1, \dots, m$

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{echte Bahn}}}{\delta g_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

oben einsetzen in $\delta S = 0$

$$0 = \int dt \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

Man <u>kann</u> Indizes so wählen dass $q_1, \dots, q_m$ abhängig, Rest unabh.

1.) Wähle $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ so dass

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdots \right) \text{ für } i = 1, \dots, m$$

individuell verschwindet.

$$\left.\begin{array}{l} (\dots \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_m) \\ + (\dots \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_m) \\ \quad \vdots \\ + (\dots \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_m) \end{array}\right\} m$$

2.) die restlichen Klammern verschwinden eh, weil

$$(\dots)_{m+1} \delta q_{m+1} + \dots + (\dots)_n \delta q_n = 0$$

kann wegen lin. unabh. ... δq_n nur für $(\dots)_{m+1} = \vdots$

$0 = \dots (\vdots)$

damit Lag I für q_i:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} = 0}$$

für $i = 1, \dots, n$

$$g_1 = \dots = g_m = 0$$

$n+m$ Glgen für $q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$

Lag I für nichtholonome Zwänge

= kinematisch & nicht nur geometrisch

$$g_i(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n)$$

Trick: $\tilde{\mathcal{L}}(q, \dot q) = \mathcal{L}(q, \dot q) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(q, \dot q)$

damit wie PdkW

$\delta \tilde{\mathcal{L}} = \dots$ (schreib's hin)

Zauberei:

$$0 = \int dt \, \delta \tilde{\mathcal{L}} \qquad \text{PdkW} + \underbrace{\delta(\text{ZW}) = 0}$$

$$= \int dt \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot q_i} \delta \dot q_i \right]$$

$$= \int dt \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot q_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right]$$

$$\overset{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} \int dt \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot q_i} \right] \delta q_i$$

& wieder Schritt 1 & 2

wähle $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

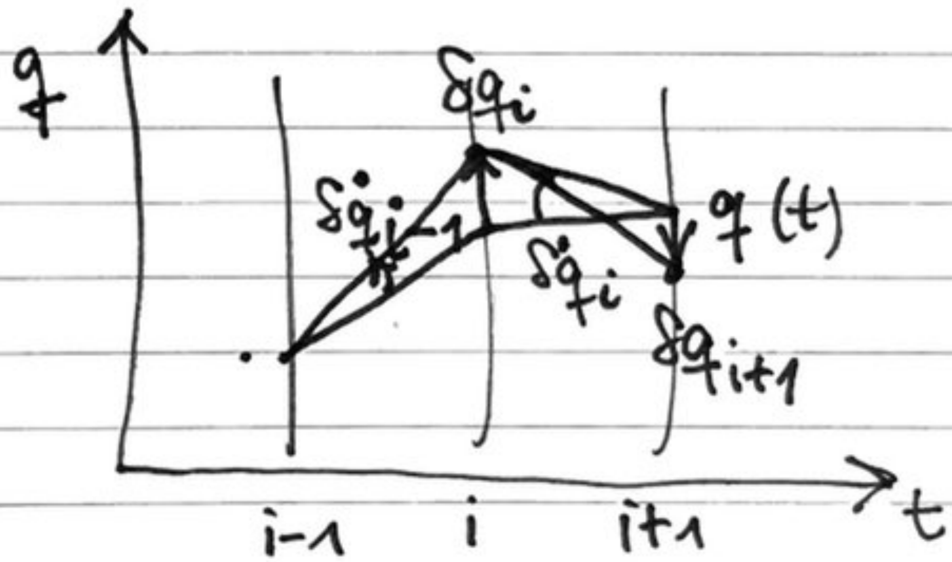
$\delta q_{n-m+1} \dots \delta q_n$ ~~lin unabh.~~

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_i} = 0}\ , \quad i = 1,\dots,n$$

mit $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k$

sowie $g_1 = \dots = g_m = 0$

Euler auch



→ Lag. Lemma

HAMILTON

2n Glg 1. Ordnung (statt) Ham
n Glg 2. Ordnung Lag

Lag II = New II = $(m\ddot x = -kx)$

hm, hieraus kommen
n „verschiedene" Glg. 1. Ordn.
→ symplektische Geometrie

Euklid Sympl.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ Lag. fkt.

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

$$\underset{\text{Euler-Lagrange}}{=} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L}\right) = 0$$

Legendre-Trafo

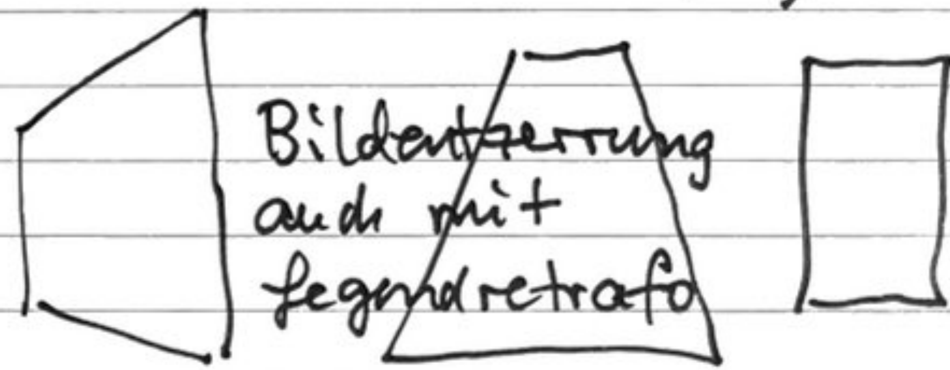
$$\boxed{\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0}$$

Legendre.

was bedeutet

$$f(x) - x\frac{df}{dx} = g(x)$$

nö, sondern $g\left(\frac{df}{dx}\right)$



& Maxwellquadrat in Thermo

$\mathcal{H}$ = Hamiltonfunktion

Werte von $\mathcal{H}$ sind E = Energie

Führe ein

kanonischen Impuls

$$\boxed{p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}$$

z.B. $\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m v^2$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = mv = p$$

Hamiltongleichungen

E-L $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}(q,\dot{q})$$ (10)

$$= p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q,\dot{q})$$

also $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i - 0$

Legendre $\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}}$ $\quad i = 1, \ldots, n$

und $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ also Newton II

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}}$$

Achtung: $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ und $\mathcal{H}(q,p)$ sind jeweils unab. Variablen $\quad i=1,\ldots,n$

Ü: zeige $d\mathcal{H} = \ldots dq + \ldots dp + \ldots \cancel{d\dot{q}}$