Liouville kurz hergeleitet

sei $\vec{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ ≙ Phas.raum

$$\frac{dV}{dt} = \oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \dot{\vec{x}} \quad \left\{ \text{Deformation des Volumens} \right)$$

$$= \int_V dV \, \mathrm{div}\, \dot{\vec{x}} \quad \{ \text{Gauß}$$

$$= \int_V dV \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right)$$

$$= \int_V dV \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

$$= 0$$

$\square$

$\partial/\partial t$ ? siehe auch Kerson Huang

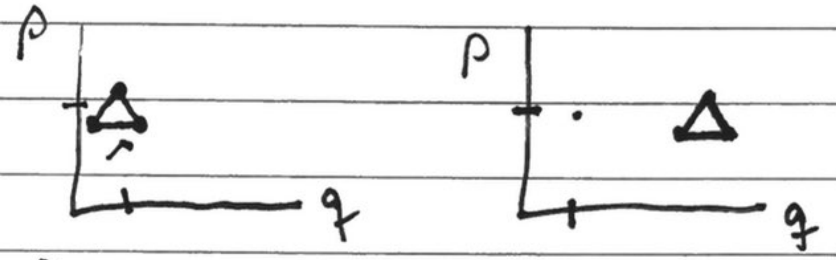
$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial n}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial n}{\partial p}$$

$$= \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial n}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial n}{\partial p}$$

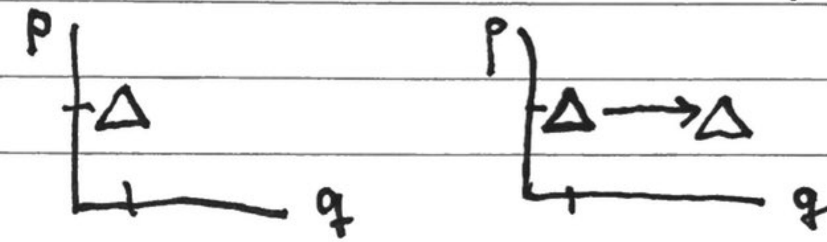
$$= \frac{\partial n}{\partial t} + \{H, n\}$$

$$n = n(t, q, p)$$

d.h. für stationäre Systeme, $\partial n / \partial t \equiv 0$, ist $\boxed{\{H, n\} = 0}$



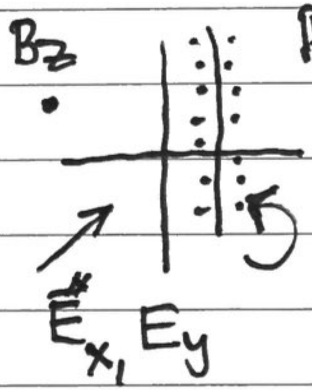

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$$




$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

# DREHUNGEN

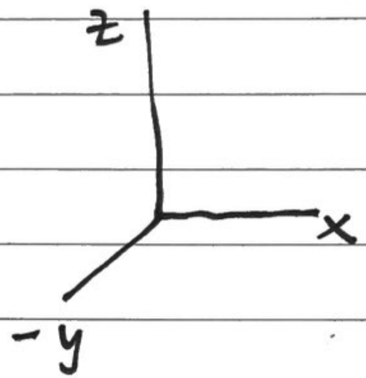
$\mathbb{R}^2$



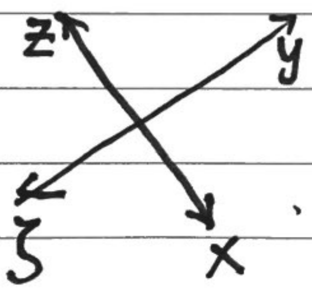

Transl.: 2
Rotation: 1

z.B. Elektrodynamik

$\mathbb{R}^3$




Transl. 3
Rotat. 3




Transl. 4
Rotat. 6

~~5~~

im $\mathbb{R}^n$ gibt es
$\frac{1}{2} n(n-1)$ Rotationsfreiheitsgrade

Schule: „~~Drehungen~~ um Achsen" (A)

man dreht in Ebenen (B)
oder Achsen in Achsen

z.B. bei $x, y, z, \zeta$:

$xy, xz, x\zeta, yz, y\zeta, z\zeta$

im $\mathbb{R}^3$ stimmt (A) & (B) überein

weil es zu jedem Paar von Achsen die ineinander gedreht werden, genau eine ($\mathbb{R}^3$) gibt, „um die" gedreht wird zwei gedrehte Systeme


$$\vec r = x_1\hat i + x_2\hat j + x_3\hat k \quad \Big|\cdot\hat I,\ \cdot\hat J,\ \cdot\hat K$$
$$= X_1\hat I + X_2\hat J + X_3\hat K \quad \Big|\cdot\hat I,\ \cdot\hat J,\ \cdot\hat K$$

$$X_1 = \hat i\cdot\hat I\, x_1 + \hat j\cdot\hat I\, x_2 + \hat k\cdot\hat I\, x_3$$

$$X_2 = \hat i\cdot\hat J\, x_1 + \hat j\cdot\hat J\, x_2 + \hat k\cdot\hat J\, x_3$$

$$X_3 = \hat i\cdot\hat K\, x_1 + \hat j\cdot\hat K\, x_2 + \hat k\cdot\hat K\, x_3$$

$$\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat i\cdot\hat I & \hat j\cdot\hat I & \hat k\cdot\hat I\\ \hat i\cdot\hat J & \hat j\cdot\hat J & \hat k\cdot\hat J\\ \hat i\cdot\hat K & \hat j\cdot\hat K & \hat k\cdot\hat K\end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Richtungscosinus

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat i\cdot\hat I & \hat i\cdot\hat J & \hat i\cdot\hat K\\ \hat j\cdot\hat I & \hat j\cdot\hat J & \hat j\cdot\hat K\\ \hat k\cdot\hat I & \hat k\cdot\hat J & \hat k\cdot\hat K\end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \hat i\cdot\hat I & \hat i\cdot\hat J\ldots\\ \hat j\cdot\hat I & \\ \hat k\cdot\hat I & \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} \hat i\cdot\hat I & \hat j\cdot\hat I & \hat k\cdot\hat I\ldots\\ \hat i\cdot\hat J & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}}_{A^\tau}}_{\mathbb{1}}\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = A^\tau}$$

$$\boxed{A\cdot A^\tau = A^\tau\cdot A = \mathbb{1}}$$

„orthogonale Gruppe"

<u>Satz</u> Sei ~~ist~~ A orthogonal,
d.h. $A^T = A^{-1}$.
Seien $\vec{a}$ & $\vec{b}$ <u>zwei</u> Spalten von A
(nicht dieselbe). Dann ist
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 7 & 1 & y \\ 3 & -3 & z \end{pmatrix}$$

$$x + 7y + 3z = 0$$
$$2x + y - 3z = 0$$

$$3x + 8y = 0$$

$$y = -\frac{3}{8}x \ldots$$

<u>Trägheitstensor</u>
verallgemeinert Punktmasse
angenommen starrer Körper
hat 6 Freiheitsgrade,
n translato- F.G.
$\frac{1}{2}n(n-1)$ drehungs-

Drehung mit <u>Eulerformel</u>

$$\frac{d}{dt}\Big|_i = \frac{d}{dt}\Big|_r + \vec{\omega} \times \quad \vec{r}(t)$$

Operatorgleichung
f

Postulat: $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ (Landau)
$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ (Anschauung)
Betrachte <u>Energie</u>

Lasse Mischglied $\vec{u} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$
weg, wähle System mit $\vec{u} = 0$