

# Lagrange I. Art

1) für Newton  $F=ma$   
 $m_i \ddot{x}_i = F_i \quad i=1, \dots, n$   
 aber manche  $x_i$  hängen  
 untereinander zusammen,  
 z.B.  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \text{const}$   $\uparrow$  Zwang

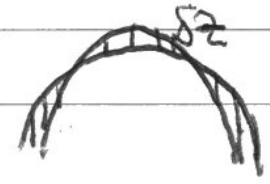
Wir können oder wollen nicht  
 auflösen nach abh./unabh.

2) PdVA: Summe der Arbeit  
 aller Zwangskräfte = 0

Bilde Summe  $\downarrow$  Zwangskraft

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^n (F_i + \cancel{F_i}) \delta x_i(t)$$

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + F_i'$$



virtuelle  
 verrückung  
 = echte Bahn

damit  $\sum_{i=1}^n (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0$  (1)

geometrie der  
 Zwänge

m Zwänge  $g_j(x_1, \dots, x_n) = 0$

3)  $\rightarrow \delta g_j = 0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \delta x_i$

sind m Nullen. Mache eine

$$0 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \delta x_i$$
 (2)

(2) in (1)

$$\sum_{i=1}^n \left( m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i \stackrel{(1)}{=} 0$$
 (3)

Ausgangsgleichung

# Lag I in Lag II

$$0 = \delta S = \delta \int dt \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

$$= \int dt \delta \mathcal{L}$$

$$= \int dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right)$$

$$0 \stackrel{\dots}{=} \int dt \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\delta \mathcal{L}} \delta q_i(t)$$

$$0 = \int dt \sum_{i=1}^n \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} \delta q_i(t) \quad (1)$$

wieder Problem: Zwänge

$$f_j(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad j=1, \dots, m$$

Lagrange-Mull: wenn  $g_j = 0$  auf gesamter Bahn dann

$$\delta g_j = 0 \quad \rightarrow \quad -$$

$$\text{d.h.} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

$$\text{also auch} \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

in (1)

$$0 = \int dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

usw., gibt wieder für  $i=1, \dots, n$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0 \quad \checkmark$$

Lag I

$$g_j = 0, \quad j=1, \dots, m$$

4) Es gibt  $n-m$  unabhängige und  $m$  abhängige  $\delta x_i$  seien  $x_1, \dots, x_m$  abhängig und  $x_{m+1}, \dots, x_n$  unabhängig

a) Die  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  seien so gewählt, dass

$$m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0$$

~~~~~ für  $i=1, \dots, m$   
Vektorlänge  $m$

$$\sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \lambda_j = \underbrace{F_i - m_i \ddot{x}_i}_{\neq 0}$$

ist lösbar wenn  $\det \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \neq 0$

Annahme = 0. Dann  $\exists$  Lin. Kombi von Zeilen  $\sum_k \lambda_k g_k = g_m$  abhängig d.h. Zwänge sind untereinander  $\Leftrightarrow$

b) damit wird (3) zu

$$\sum_{i=m+1}^n (m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}) \delta x_i = 0$$

aber die  $x_{m+1}, \dots, x_n$  waren unabhängige Bahnorte, also sind in jedem Bahnpunkt die  $\delta x_{m+1}, \dots, \delta x_n$  lin. unabh. d.h.

$$m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0$$

und für  $i=m+1, \dots, n$

c) d.h.  ~~$\lambda_j = 0$~~   $\lambda_j = 0, j=1, \dots, m$  Lag I

$$m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \text{ für } i=1, \dots, n$$