Lagrange I. Art

1) für Newton $F = ma$

$$m_i \ddot{x}_i = F_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

aber manche x_i hängen untereinander zusammen,

z.B. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{const}$ ↑ Zwang

Wir können oder wollen nicht auflösen nach abh. / unabh.

2) PdvA: Summe der Arbeit aller Zwangskräfte $= 0$

Bilde Summe

Zwangskraft ↓

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (F_i + \cancel{F_i'})\, \underbrace{\delta x_i}(t)$$

virtuelle Verrückung ≠ echte Bahn

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + F_i'$$

somit
$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \ddot{x}_i - F_i)\, \delta x_i = 0 \quad (1)$$

↑ Geometrie der Zwänge

m Zwänge $g_j(x_1, \dots, x_n) = 0$

3) → $$\delta g_j = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \delta x_i$$

sind m Nullen. Mache eine

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \delta x_i \quad (2)$$

(2) in (1)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i^{(t)} = 0 \quad (3)$$

Ausgangsgleichung

Lag I in Lag II

$$0 = \delta S = \delta \int dt\, \mathcal{L}(q, \dot q)$$

$$= \int dt\, \delta \mathcal{L}$$

$$= \int dt \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} \delta \dot q_i \right)$$

$$0 \overset{\dots}{=} \int dt \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} \right)} \delta q_i(t)$$

$$0 = \int dt \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} \delta q_i(t) \qquad (1)$$

wieder Problem: Zwänge

$$g_j(q_1, \dots, q_n) = 0\ , \ j = 1, \dots m$$

Lagrange-Null: wenn $g_j = 0$ auf gesamte Bahn dann

$$\delta g_j = 0 \qquad - \text{"} -$$

d.h. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0$

also auch $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0$

in (1)

$$0 = \int dt \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

usw., gibt wieder für $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0 \checkmark$$

Lag I

$$g_j = 0, \ j = 1, \dots, m$$

4) Es gibt $n-m$ unabhängige und m abhängige δx_i
Seien $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m$ abhängig und $x_{m+1}, \dots, x_n$ unabhängig

a) Die $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ seien so gewählt, dass

$$\underbrace{m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}}\quad = 0 \qquad \text{für } i = 1, \dots, m$$

Vektorlänge m

$$\sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \lambda_j = \underbrace{F_i - m_i \ddot{x}_i}_{\neq 0}$$

ist lösbar wenn $\det \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \neq 0$

Annahme $= 0$. Dann $\exists$ Lin. kombi von Zeilen $\sum \lambda_k g_k = g_m$ abhängig
d.h. Zwänge sind untereinander ↯

b) damit wird (3) zu

$$\sum_{i=m+1}^{n} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0$$

aber die $x_{m+1}, \dots, x_n$ waren unabhängige Bahnorte, also sind in jedem Bahnpunkt die $\delta x_{m+1}, \dots, \delta x_n$ lin. unabh.
d.h.

$$m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0$$

und für $i = m+1, \dots, n$

c) d.h. $g_j = 0$, $j = 1, \dots, m$ Lag I

$$\boxed{m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n}$$