Retardiertes Potential einer Punktladung. I

Ladungs- und Stromdichte eines Elektrons sind

$$\rho(\vec{r},t) = e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)),$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) = e\vec{v}_0(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)).$$

Mit $\vec{r}_0(t), \vec{v}_0(t)$ Teilchentrajektorie und -geschwindigkeit.
Wir zeigen nun, daß hier die retardierten Potentiale

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)| - (\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\cdot\vec{v}_0(\tau)/c},$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t)\vec{v}_0(\tau)/c^2,$$

sind, mit retardierter Zeit

$$\tau = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|}{c}.$$

Achtung: letzteres ist implizite Gleichung.
Das folgende nach Becker-Sauter, Band 2, S. 49.
Retardierte Lsg für Skalarpotential

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Zuerst direkter Integrationsversuch. Für ρ von oben ist

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Integral ausführen heißt, $\vec{r}\,'$ an der Stelle

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)$$

nehmen. Also zirkuläres Ergebnis

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t-|\vec{r}-\vec{r}_0(t-|\vec{r}-\vec{r}_0(t-|\vec{r}-\ldots|/c)|/c)|/c)|}.$$

"…" steht für $\vec{r}\,'$: ist immer wieder neu einzusetzen.
Jetzt mit Trick zu einem (semi-)expliziten Ergebnis:
Führe weitere δ-Fkt ein:

für Zeit, so daß Integral über *alle* Zeiten;
δ-Fkt erledigt Retardierung.

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\int dt'\,\frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta(t'-(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)) \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\int dt'\,\frac{\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\delta(t'-t+|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c) \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int dt'\,\frac{\delta(t'-t+|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}.
\end{aligned}$$

Interessant ist hier explizite Raumintegration im letzten Schritt. Weiter mit Variablensubstitution. Sei

$$u = t'-t+|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|/c.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt'} &= 1+\frac{d}{c\,dt'}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')| \\
&= 1+\frac{d}{c\,dt'}\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))} \\
&= 1+\frac{1}{2\sqrt{\ }}\,2(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\cdot\frac{d}{c\,dt'}(\vec{r}-\vec{r}_0(t')) \\
&= 1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\cdot\vec{v}_0(t')/c}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}.
\end{aligned}$$

Damit Substitution $t'\to u$ im Φ-Integral,

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r},t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int du\,\frac{1}{1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\cdot\vec{v}_0(t')/c}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}}\frac{\delta(u)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int du\,\frac{\delta(u)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|-(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\cdot\vec{v}_0(t')/c} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\cdot\vec{v}_0(\tau)/c},
\end{aligned}$$

wobei τ die Zeit t' für $u=0$ ist (δ-Fkt!),

$$\tau = t-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|/c.$$

Die obige Zirkularität steckt nun in dieser impliziten Glg.
Rechnung für $\vec{A}$ völlig analog.

Retardiertes Potential einer Punktladung. II

Der obige Umweg über $\delta(t)$ erlaubte 1-dim Variablensubstitution.
Hier: direkte 3-dim Substitution im Retardierungsint der Punktldg

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0(t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c))}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

Sei also

$$\vec{s} = \vec{r}\,' - \vec{r}_0(t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c)).$$

Jacobideterminante

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{r}\,'}\right| &= \left|\underline{1} - \vec{v}_0[\;] \otimes \frac{\partial(t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c)}{\partial \vec{r}\,'}\right| \\
&= \left|\underline{1} + \frac{\vec{v}_0[\;]}{c} \otimes \frac{\partial|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{\partial \vec{r}\,'}\right| \\
&= \left|\underline{1} - \frac{\vec{v}_0[\;]}{c} \otimes \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right|.
\end{aligned}$$

Hier ist $\vec{v}_0$ erste Ableitung von $\vec{r}_0$ nach seinem Argument.
Die Rechnung wurde in Dyadenschreibweise durchgeführt.
Übung: mache explizite kartesisch-komponentenweise Rechnung.
In der letzten Zeile benutzt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{\partial \vec{r}\,'} &= \frac{\partial(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\partial \vec{r}\,'} \cdot \frac{\partial|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{\partial(\vec{r} - \vec{r}\,')} \\
&= -\underline{1} \cdot \nabla_q |\vec{q}\,| \\
&= -\underline{1} \cdot \hat{q} \\
&= -\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|},
\end{aligned}$$

mit Abkürzung $\vec{q} = \vec{r} - \vec{r}\,'$.
Determinantentheorie oder kartesische Rechnung gibt

$$\left|\frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{r}\,'}\right| = 1 - \frac{\vec{v}_0[\;] \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{c\,|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

Also

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r},t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int d^3s \left|\frac{\partial \vec{r}\,'}{\partial \vec{s}}\right| \frac{\delta(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int d^3s \frac{\delta(\vec{s})}{\left[1-\frac{\vec{v}_0[\ \ ]\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{c\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|-(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\frac{\vec{v}_0[\ \ ]}{c}}\right|_{\vec{s}=0}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\vec{s} = 0 = \vec{r}\,' - \vec{r}_0(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c),$$

also

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0(\tau),$$

mit

$$\tau = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|}{c}.$$

Das bisher als Leerstelle geschriebene Argument von $\vec{v}_0$ ist

$$\vec{v}_0[\ \ ]|_{\vec{s}=0} = \vec{v}_0(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)|_{\vec{s}=0} = \vec{v}_0(\tau).$$

Also insgesamt genau wie zuvor

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\cdot\vec{v}_0(\tau)/c},$$

mit retardierter Zeit

$$\tau = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|}{c}.$$