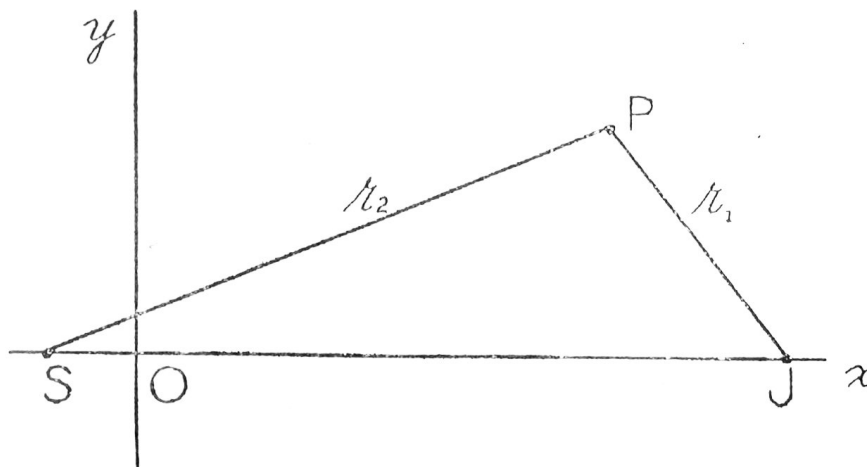


## Birkhoff: The Restricted Problem Of Three Bodies (1914)

### Ein Überblick

Meilenstein auf dem Weg zum KAM, neben weiteren Veröffentlichungen in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts von Sundman, Levi-Civita, Poincaré und Whittaker. Beginn der modernen Mathematik in den USA, noch heute gebräuchliche Methoden. In 21 Kapiteln analysiert Birkhoff Eigenschaften eines Systems aus 2 gravitierenden Körpern und einer Testmasse, bzw. mögliche Bahnen um die beiden Massen.



*Scan aus dem Originalpaper*

#### Methoden und Werkzeuge:

- Verschiedene Transformationen im physikalischen und Phasenraum, die es möglich machen, Eigenschaften des Systems leicht zu erkennen.
- Assoziation mit Komplexer Ebene, in der die Werkzeuge der Funktionalanalysis für die Untersuchungen eingesetzt werden können.
- Geometrisierung des Problems und Assoziation mit Stromlinien in idealer Flüssigkeit. Auch hier wieder: Untersuchungen im Phasenraum und im physikalischen Raum.
- Finden von Bahneigenschaften, verbotenen/erlaubten Regionen der Bewegung usw. durch Variation der Konstanten  $\mu$ ,  $1-\mu$  (die beiden Massen, bzw. ihre Koordinaten) und  $C$  (Jacobikonstante, Flächen konstanter Energie). Die für das Problem unwesentlichen Konstanten werden  $= 1$  gesetzt.
- andere

Im Folgenden ein grober und unvollständiger Überblick

## Part I: The Differential Equations Of The Problem

### § 1 Die übliche Form der Bewegungsgleichungen

Wie auch schon in der Vorlesung gezeigt, sind die üblichen DGLn des Problems:

$$\frac{dx^2}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = \Omega_x(x, y), \quad \frac{dy^2}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = \Omega_y(x, y), \quad (1)$$

die schliesslich auf die Bahngeschwindigkeit führen:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C \quad (2)$$

Die Bahngeschwindigkeit muss natürlich positiv sein. 2 singuläre Bereiche existieren also an den Rändern, wo  $\vec{v} = 0$  ('Kurve der Nullgeschwindigkeit') oder  $\vec{v} = \infty$  (an den Punkten J und S, Kollision). Die Gesamtheit der Bewegungen korrespondiert mit den Stromlinien einer inkompressiblen Flüssigkeit, wenn die Zeit aus den Gleichungen eliminiert und das Problem so geometrisiert wird:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{d\Phi}{d\phi} \quad \text{mit} \quad \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{d\phi}{dt} = \Omega, \quad (3)$$

### § 2 Transformation von verallgemeinerten Differentialgleichungen in die komplexe Ebene

In diesem sehr umfangreichen Kapitel wird ein System von DGLn betrachtet, das eine Verallgemeinerung von (1) darstellt, wobei  $U = 2\Omega - C$  (verallgemeinertes Potential). Dabei werden prinzipielle Eigenschaften solcher DGLn diskutiert. Durch eine Transformation  $z = f(w)$  der Bewegungsgleichungen in die Komplexe Ebene ( $x, y \rightarrow u, v$ ) sind die Werkzeuge der Funktionentheorie für weitere Untersuchungen nutzbar. Die Transformation selbst, singuläre Punkte, sowie Eigenschaften der Kurven werden analysiert. Die Transformation wird wie in der Funktionentheorie üblich mit  $|f'(w)|$  (Stichwort Jacobi-Matrix-Elemente) beschrieben.

### § 3 Die Gleichungen der normalen und tangentialen Ersetzung

In diesem Kapitel transformiert er die Gleichungen auf das System eines begleitenden Dreibein und beweist weitere Eigenschaften. Er geht dabei von den transformierten Bewegungsgleichungen der Form

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dn}{d\tau}\right)^2 = 2F(s, n) - C, \quad \text{mit} \quad F(s, n) = \left[\Omega(x, y) - \frac{1}{2}C\right] |f'(w)| \quad (4)$$

aus

### § 4 Levi-Cevitas From der Bewegungsgleichungen

Mit weiteren Transformationen zeigt er die Äquivalenz zu den Gleichungen, die Levi-Cevita fand. Dazu benutzt er eine einfache Variablentransformation:  $x - \mu = x^2 - p^2, \quad y = 2pq, \quad dt = 4(p^2 + q^2)d\tau$  und anschliessener Transformation in die komplexe Ebene.

## § 5 Neue Formen der Bewegungsgleichungen

Mit einer weiteren Transformation lassen sich die Singularitäten an den Punkten J und S entfernen. Umfangreiche Untersuchungen schliessen sich an.

## Part II: Anlysis Situs Of The Manifolds Of States Of Motion

### § 6 Geometrische Repräsentation

In diesem Kapitel greift Birkhoff wieder die Interpretation des geometrisierten Problems als Stromlinien auf. Die 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten der Bewegungszustände sind ohne Singularitäten, es sei denn, C hat 5 bestimmte Werte. Mit entsprechend transformierten Bewegungsgleichungen findet er 5 Punkte an denen C in diesem Falle verschwindet. Weiter stellt er fest, daß jeder Punkt aus der Mannigfaltigkeit mit genau einer (analytischen) Kurve der Bewegung korrespondiert.

### § 7 Regionen der Bewegung

In diesem Kapitel wird die Natur der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten der Bewegungszustände bestimmt. Dafür werden die Ovale der 0-Geschwindigkeit (für die  $\Omega(x, y) - \frac{1}{2}C \geq 0$  gilt), sowie die verbotenen und erlaubten Bereiche betrachtet. Dabei beschreibt er die Transformation in die komplexe Ebene mit der Riemannschen Blätterung, wobei J und S Verzweigungspunkte darstellen. Ein paar Symmetriebetrachtungen schliessen sich an.

### § 8 Weitere Topologie-Untersuchungen

Eines der umfangreichsten Kapitel. Die Überlegungen aus dem vorhergehenden Kapitel werden vertieft und anhand dessen 6 mögliche Bewegungszustände untersucht.

## Part III: Investigation Of Poincaré's Ring Transformation

Birkhoff reduziert das eingeschränkte 3-Körper-Problem auf eine Ringtransformation T. Die Ringtransformation und einige Ideen von Birkhoff wurden auch in der Vorlesung behandelt.

### § 9 Bewegungszustände für $\mu = 0$

Zunächst wird der Fall  $\mu = 0$  betrachtet, der in das integrable 2-Körperproblem übergeht. Mit den =1 gesetzten 'unwesentlichen' Konstanten (Winkelgeschwindigkeit, Abstand, Gravitationskonstante, Gesamtmasse des Systems) werden die DGLn und das Jacobi-Integral zu:

$$\frac{dx^2}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = x\left(1 - \frac{1}{r^3}\right), \quad \frac{dy^2}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = y\left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \quad \text{und} \quad v^2 = U(r) \equiv r^2 + \frac{r}{2} - C \quad (5)$$

Wobei nur Fälle mit  $C < 3$  berücksichtigt werden. Als Ergebnis finden sich zwei Kreisbahnen  $r_1 < 1$  und  $r_2 > 1$ , auf denen die Geschwindigkeit Null wird. Die Testmasse kann nur innerhalb von  $r_1$  oder

ausserhalb von  $r_2$  sein. Betrachtet wird im Folgenden der erste Fall.

Eine Transformation auf die elliptischen Koordinaten  $a$  (grosse Halbachse),  $e$  (Exzentrizität),  $\theta$  (Winkel zwischen der Strecke  $\overline{JP}$  und der x-Achse) in der (a,b)-Ebene führt zu Bewegungsgleichungen, anhand derer man retrograde und direkte Umläufe bestimmen kann. Die Bewegungen entsprechen dabei Bahnen in/auf einem Hohlzylinder mit dem Durchmesser  $a_{min}$  bzw.  $a_{max}$ , die den retrograden, bzw. direkten Orbits entsprechen. Neben  $\theta$ , der dem Rotationswinkel entspricht, wird der Winkel  $\psi$  als Steigungswinkel (pitch) definiert. Die zeitliche Änderung kann dann:

$$a = a_0, \quad \theta = \theta_0 - t, \quad \psi = a_0^{-\frac{3}{2}} t + \psi_0 \quad (6)$$

geschrieben werden. Der Exponent  $\frac{3}{2}$  leitet sich aus KeplerIII ab.  $\psi + \theta$  sind Spiralen und stellen die Bewegungszustände dar.

## § 10 Ringtransformation für $\mu = 0$

In diesem Kapitel werden periodische Bewegungen, die innerhalb des Radius  $a_{min} < \frac{k}{l} < a_{max}$  möglich sind betrachtet. Die Grösse  $\frac{k}{l}$  stellt dabei die Winkelgeschwindigkeit dar, wobei  $k$  die Periodenzahl ist und  $l$  die vollen Umdrehungen der Ellipse zählt. Weitere Untersuchungen schliessen sich an, u.a. nutzt er auch die Methode der tangentialen Hilfskreise.

## § 11 Analytische Fortsetzung von Kreisbahnen

Jetzt wird der Fall  $\mu \neq 0$  mittels analytischer Fortsetzung betrachtet. Dabei werden für diesen Fall noch einmal die Ergebnisse der letzten Kapitel wiederholt und angepasst.

## § 12 Weitere Eigenschaften der direkten und retrograden Orbits

Die Behauptung, daß für  $C \geq C_1 > \sqrt[3]{32}$  die analytische Fortsetzung der direkten und retrograden Orbits unter der Voraussetzung, daß  $\mu$  hinreichend klein und unabhängig von  $C$  ist, wird bewiesen. Der Fall  $\mu \neq 0$  wird dabei als Störung des Systems betrachtet. Für die Untersuchung nutzt er u.a. modifizierte Polarkoordinaten mit dem Radiusvektor  $\rho^2$  (statt wie üblich einfach nur  $r$  - hier zusätzliche Skalierung).

## § 13 Ringtransformation für $\mu \neq 0$

Analyse der Ringtransformation für  $\mu \neq 0$  auf dieselbe Weise wie 3 Kapitel zuvor für  $\mu = 0$  mit tangentialen Hilfskreisen. Sehr umfangreiches Kapitel.

## § 14 Zwei Eigenschaften der Transformation T

Hier werden 2 besondere Eigenschaften der Ringtransformation bewiesen. Zum einen die Invarianz des Flächenintegral  $\iint \Phi(\rho, \theta) d\rho d\theta$  unter der Transformation und zum anderen die Möglichkeit, die Transformation T als Produkt von 2 Transformationen R und U zu schreiben. R ist die Reflektion an der x-Achse und U hat die Eigenschaft  $RT = U$  und  $RU = T$ .

## § 15 Zur Existenz der Transformation T

Auf 3 Seiten wird die Existenz der Transformation T und eines Ringes mit den begrenzenden Orbits N, M bewiesen.

## Part IV: Periodic Orbits

Die Behandlung genereller Orbits, also auch nichtperoidische, kündigt er für später an...

## § 16 Die Existenz retrograder Orbits, Hill

Die Existenz periodischer Orbits für bliebigere Werte von  $\mu$  und C wird auf 8 Seiten bewiesen. Unter anderem wird dafür Hill's Mondtheorie untersucht. Dazu gab es bereits einen Vortrag, weswegen ich nicht weiter drauf eingehe.

## § 17 Einige Eigenschaften der Kurven

Verallgemeinerung der Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels und Untersuchung der Natur der Kurven  $\Omega_x(x, y) = 0$  und  $\Omega_y(x, y) = 0$ , die um J liegen. Wendepunkte und andere Bahnparameter werden diskutiert.

## § 18 Existenz retrograder Orbits. Allgemeiner Fall

Die Existenz retrograder Orbits für den allgemeinsten Fall des eingeschränkten 3-Körper-Problems wird bewiesen.

## § 19 Direkte Orbits und eine alternative Form der Transformation

Für die Betrachtung direkter Orbits wird auf von der Ringtransformation auf die Transformation einer Scheibe übergegangen, wobei mit einer Scheibe eine beliebige, 2-dimensionale deformierbare Region mit Rand gemeint ist. Zuerst wird der Fall  $\mu = 0$  betrachtet, um dann zu  $\mu \neq 0$  überzugehen. Die zuvor verwendeten Koordinaten  $a, \theta, \psi$  in einem Zylinder mit  $a_1 \leq a \leq a_2$  werden nun noch einmal modifiziert, um später einige Eigenschaften besser sichtbar zu machen:

$$\bar{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a_2}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\psi} = \psi - 0$$

Der Bereich, der die Bewegungen repräsentiert, lässt sich nun  $\bar{a} \leq \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}$  schreiben, für die Winkel gilt weiterhin  $0 \leq \bar{\psi} \leq 2\pi$ .

Im  $(a, \theta, \psi)$ -Zylinder entsprechen die innere und äußere Oberfläche ( $a_{min}, a_{max}$ ) direkten, bzw. retrograden Orbits. Die Spiralen  $\theta + \psi$  und  $\theta - \psi$  entsprechen den jeweiligen Bewegungszuständen.

Im  $(\bar{a}, \bar{\theta}, \bar{\psi})$ -Zylinder entspricht die äußere Oberfläche retrograden Orbits und die Achse  $\bar{a} = 0$  direkten Orbits. Den Bewegungszuständen entsprechen hier  $\bar{a} = 0$  und  $\bar{\psi} = \text{const}$ . In der zeitlichen Entwicklung ändert sich der Anstiegswinkel:  $\bar{\psi} = \left( \left( \frac{a_2 a_0 + 1}{a_2} \right)^{\frac{3}{2}} + 1 \right) t + \psi_0$ . Im Laufe der Zeit wandert jeder Punkt

im Zylinder nach oben ( $\lim \bar{\psi} = \infty$ ).

Im Folgenden wird der Übergang zu  $\mu \neq 0$  (im erlaubten Gebiet um J) vollzogen, sowie eine Beziehung zwischen den Fällen  $\mu = 0$  und  $\mu \neq 0$  hergestellt, so daß die retrograden Orbits für beide Fälle korrespondieren. Für eine Deformation des erlaubten Bereiches (Oval) durch  $\mu \neq 0$  in der Weise, daß eine kleine Umgebung von J unverändert bleibt und das Oval für  $\mu = 0$  zum Kreis wird (also aus retrograden Orbit bei  $\mu \neq 0$  wird retrograde Kreisbahn bei  $\mu = 0$ ), existiert eine stetige Abbildung zwischen den beiden Fällen. Weiterhin gelten die Formeln für den Fall  $\mu = 0$  auch hier. Für den Beweis definiert er den "direkten periodischen Orbit einfachen Typs" als beliebige Orbits, die (in der  $x, y$ )-Ebene mindestens einmal um J herum führen, sowie alle, die durch Deformation daraus hervorgehen.

Am Ende des Kapitels folgt nach einer nochmaligen Gegenüberstellung beider Fälle die Feststellung, daß für wachsende  $\mu$  die direkten Orbits instabil werden und Vereinigungen mit anderen stattfinden können. Für die Transformation würde das bedeuten, daß zwei invariante Punkte zusammen fallen würden. Für instabile Orbits würde dann die Poincaré-Transformation aufhören zu existieren.

## § 20 Symmetrische periodische Orbits

In diesem Kapitel wird bewiesen, daß unendlich viele symmetrische Orbits existieren, die die  $x$ -Achse im rechten Winkel schneiden. Dafür werden die Begriffe der 1. und 2. charakteristischen Zahl eingeführt. Die 1. charakteristische Zahl ist die Zahl der Umläufe, bis ein Orbit geschlossen ist. Die 2. charakteristische Zahl zählt die Umläufe eines Punktes um den Ring, während der Umläufe um den Orbit. Sehr umfangreiches Kapitel - wird für Vortrag nicht weiter ausgeführt. Wäre ein gutes Thema für einen weiteren Kurzvortrag.

## § 21 Einige geometrische Konsequenzen

Im letzten Kapitel beweist Birkhoff noch einige Schlussfolgerungen des geometrischen Modells. Dabei geht es um Stromlinien, die ein von einer geschlossenen Kurve umgebenes Gebiet durchqueren.

---

Am Ende noch ein kurzer Verweis auf aktuelle Arbeiten auf dem Gebiet, z.B.: "FROM THE RESTRICTED TO THE FULL THREE-BODY PROBLEM" von Meyer und Schmidt (2000). Nur ein paar Sätze (Ansatz mit harmon. Oszillator und simplektische Skalierung, Übergang vom "eingeschränkten 3-Körperproblem" auf das "reduzierte 3-Körperproblem" durch einen zusätzlich gegebenen Freiheitsgrad usw.)