

Das eingeschränkte drei Körperproblem nach Jacobi und Hill

Lagrange-Punkte, mögliche Bahnen des Testkörpers

1 Lagrange-Punkte

1.1 Bewegungsgleichung der Testmasse

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \quad (2)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C \quad (3)$$

Für eine gewählte Konstante C (die s.g. Jacobi-Konstante) ergeben sich Hyperflächen im Phasenraum, auf denen sich die Testmasse bewegen kann. Wählt man einen Punkt im Phasenraum $P(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, legt man damit die Hyperfläche und die möglichen Bewegungsformen fest.

1.2 Lage der Singularitäten

1.2.1 Singularitäten an den Zentralkörpern

Um die Singularitäten an den Zentralkörpern bei der Betrachtung zu umgehen, führte Birkhoff eine Transformation ein, die die Koordinaten in die komplexe Ebene abbildet $(x, y) \mapsto (u, v)$. Betrachtungen im komplexen Raum ergeben, dass die Gleichgewichtslagen weit von den Zentralkörpern entfernt sind.

Transformation ist für unsere Betrachtung überflüssig.

1.2.2 Gleichgewichtspunkte

Aus den Bewegungsgleichungen der Testmasse (1), (2) ergeben sich an den Punkten der Singularitäten ($\dot{x} = \dot{y} = \Omega_x = \Omega_y = 0$)

$$\Rightarrow \ddot{x} = \ddot{y} = 0.$$

Wobei bei den Singularitäten sogar gilt, dass jede zeitliche Ableitung verschwindet. Z.B.

$$\ddot{\ddot{x}} = 2\dot{y} + \Omega_{xx}\dot{x} = \Omega_{xy}\dot{y} = 0.$$

Die Singularitäten im Phasenraum liegen also offensichtlich an Gleichgewichtspunkten im mitbewegten System. Setzt man die Testmasse auf einen dieser Punkte, wird sie da für alle Zeiten verharren.

1.2.3 Lage der Lagrange Punkte

Die Gleichungen $\Omega_x = 0$ und $\Omega_y = 0$ ausgeschrieben ergeben

$$x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3} = 0 \quad (4)$$

und

$$y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0. \quad (5)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt fünf Punkte, drei davon auf der x -Achse (kollinear) und zwei, die mit den Zentralkörpern gleichschenklige Dreiecke bilden $\rightarrow r_1 = r_2 = 1$. Damit ergeben sich für die Dreieckspunkte die Koordinaten ($L_4 : +, L_5 : -$)

$$x = \mu - \frac{1}{2} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Für $y = 0$ kann Gl. (4) umgeschrieben werden

$$x + \frac{A}{(x-\mu)^2} + \frac{B}{(x+1-\mu)^2} = 0 \quad (6)$$

was zu einem Bestimmungspolynom 5. Ordnung führt

$$\xi^5 + (3-\mu)\xi^4 + (3-2\mu)\xi^3 - \mu\xi^2 - 2\mu\xi - \mu = 0 \quad (7)$$

Mit der Vorzeichenregel von Descartes kann man sehen, dass für $0 < \mu \leq 1/2$ einen Lagrangepunkt für $x > 0$ gibt (L_3) und die anderen beiden für $x < 0$ (einer zwischen den Zentralkörpern (L_2), einer hinter dem zweiten Zentralkörper (L_1)).

1.3 Descartes-Vorzeichenregel

Die Anzahl aller positiven Nullstellen eines reellen Polynoms ist gleich der Zahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizientenfolge oder um eine gerade natürliche Zahl kleiner als diese.

2 Mögliche Bahnen

$$v^2 = 2\Omega(r) - C \quad \Omega = \frac{(1-\mu)r_1^2}{2} + \frac{\mu r_2^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (8)$$

Für die Lagrangepunkte gilt:

$$2\Omega(L_i) = C_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Suche Bahnen, wo $v = 0$ ist, genannt „curves of zero velocity“ (Abkürzung: c.o.z.v.), dann treffe Aussage, wo sich Testteilchen sich bewegen kann.

2.1 Außerhalb oder innerhalb der Ellipsoide

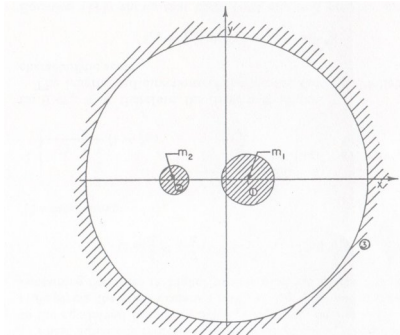


FIG. 4.22. General shape of permissible areas for $C > C_2$. Curves correspond to $\mu = 0.3$, $C = 5$.

Mögliche Bahnen innerhalb der schraffierten Bereiche.

Für $C > C_2$ sind c.o.z.v. näherungsweise Kreisbahnen um einer der beiden Massen oder um beide Massen.

Wenn C kleiner wird, werden die inneren c.o.z.v. um die beiden Massen größer, die äußere c.o.z.v. um beide Massen wird kleiner.

Bei $C = C_2$ beide Bahnen treffen sich beim Lagrangept. L_2 und bilden eine Figur wie ein Unendlichkeitszeichen.

2.2 $C_1 < C < C_2$ Birnenform

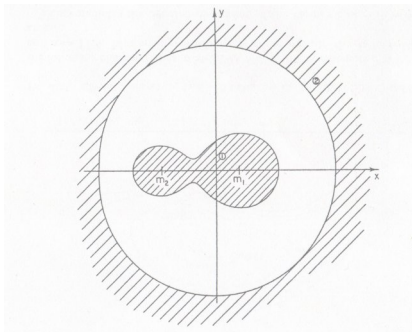


FIG. 4.23. General shape of permissible areas for $C_1 < C < C_2$. Curves correspond to $\mu = 0.3$, $C = 4$.

Mögliche c.o.z.v. innerhalb der schraffierten Bereiche. Ist $C < C_2$ die „Figure Eight“ öffnet sich bei L_2 zu Bahnen, die wie Hanteln aussehen.

2.3 $C_3 < C < C_1$ Hufeisenform

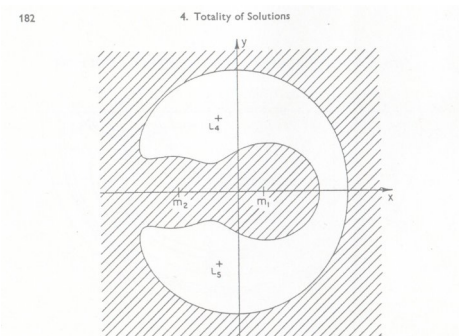
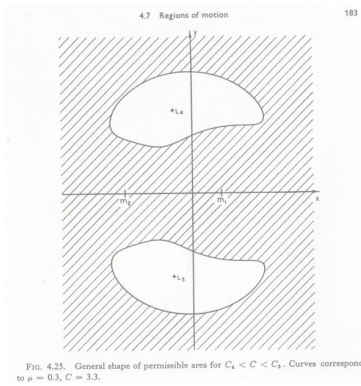


FIG. 4.24. General shape of permissible area for $C_3 < C < C_1$. Curve corresponds to $\mu = 0.3$, $C = 3.6$.

Mögliche c.o.z.v. innerhalb der schraffierten Bereiche. Bei $C = C_1$ innere und äußere c.o.z.v. treffen sich bei L_1 , bilden eine Spitze, diese öffnet sich wenn $C > C_1$ und wenn $C = C_3$, die Spitze ist bei L_3 .

2.4 $C_4 = C_5 < C < C_3$ Kaulquappenform



Mögliche c.o.z.v. innerhalb der schraffierten Bereiche. Wenn $C > C_3$ öffnet sich die Spitze und es entstehen zwei Zweige um L_4 und L_5 .

Literatur

- [1] Victor Szebehely „Theory of Orbits“ Academy Press New York, London (1967)
- [2] Feldmeier „Skript zur Vorlesung *Theoretische Mechanik*“ (SS06)
- [3] Wikipedia (www.wikipedia.de)