Mathematische Methoden in der Astrophysik 16.12.2006

Thomas Münch, Max Metzger

Die Ergodenhypothese

Def.:

Ein System heißt ergodisch, wenn der zeitliche Mittelwert einer Observablen O(q,p) äquivalent zum Ensemble- oder Kurvenscharmittelwert ist.

$$\lim_{T\to\infty} \overline{O_T}(q_{0,}p_0) = <O>_\mu \qquad (1)$$

Hierbei ist $\overline{O_T}(q_{0,}p_0)$ der zeitliche Mittelwert der Observablen O(q,p) entlang einer Trajektorie im Phasenraum mit gegebenen Anfangsbedingungen $q_{0,}p_0$:

$$\overline{O_T}(q_{0,}p_0) = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, O(q_{0,}p_0) \qquad (2)$$

$<O>_\mu$ bezeichnet den Ensemblemittelwert im dynamischen Gleichgewicht, definiert über

$$<O>_\mu = \left(\prod_{i=1}^{N} \int dq_i\, dp_i\right) \mu(q\,,p)\, O(q\,,p) \quad , \qquad (3)$$

wobei sich die Trajektorie durch eine Frequenz, mit der benachbarte Bereiche des Phasenraums besucht werden, charakterisieren lässt , die zu einem begrenzten Wert $\mu(q\,,p)$ konvergiert.
Mit diesem Wert lässt sich eine Wahrscheinlichkeit, mit der ein System, spezifiziert durch einen Satz von {q},{p}, in der Nachbarschaft dieses Zustandes ({q}, {p}) ist, postulieren:

$$\left(\prod_{i=1}^{N} dq_i\, dp_i\right) \mu(\{q\},\{p\}) \qquad (4)$$

Folglich, wenn Gl.(1) wahr ist, muß die Trajektorie vollständig ergodisch sein, d.h. für fast alle Anfangsbedingungen und mit einer Wahrscheinlichkeit von eins passiert die Trajektorie beliebig nahe irgendeinen Punkt {q,p} im Phasenraum zu einem späteren, beliebigen aber endlichen Zeitpunkt.

Resultate:

mathematisch:
(1) Die EH ist bewiesen für das „Sinai-“ und weitere Billards.
(2) Die EH ist verletzt für bestimmte Systeme (Satz von KAM).
(3) Die EH dient zur Beschreibung der Natur des Flusses.

physikalisch:
(1) Die Beschreibung dynamischer Systeme mit vielen Freiheitsgraden unmöglich, Geburt der statistischen Methode.
(2) Die EH findet kaum Anwendung in der Physik, da der ergodische Einfluss auf Experimente derart gering ist, dass er immer vernachlässigt wird.